

LUẬT SỐ LỚN CHO DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN MỜ PHỤ THUỘC ÂM ĐÔI MỘT

LAWS OF LARGE NUMBERS FOR PAIRWISE NEGATIVELY DEPENDENT FUZZY RANDOM VARIABLES SEQUENCES

Nguyễn Tấn Chiến, Lê Trần Đức Hoàng*, Trịnh Thị Ly Na

Trường Đại học Sư Phạm – Đại học Đà Nẵng, Việt Nam¹

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: duchoangkhdq@gmail.com

(Nhận bài / Received: 14/7/2025; Sửa bài / Revised: 15/11/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 20/11/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.23(11).371

Tóm tắt - Luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund và Kolmogorov là hai kết quả kinh điển trong lý thuyết xác suất và có nhiều ứng dụng quan trọng trong thống kê. Các định lý giới hạn cho biến ngẫu nhiên mờ và tập ngẫu nhiên đã nhận được nhiều sự chú ý trong những năm gần đây vì tính hữu ích của nó trong một số lĩnh vực ứng dụng như kinh tế toán học, phân tích hồi quy, phân tích hệ thống và lý thuyết điều khiển ngẫu nhiên. Gần đây, tác giả Tôn Thất Tú [1] đã thu được một số kết quả về luật số lớn đối với tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một. Trong bài báo này chúng tôi mở rộng một số kết quả của tác giả Tôn Thất Tú [1] sang biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một, qua đó mở rộng các kết quả cổ điển về luật số lớn của Marcinkiewicz-Zygmund và Kolmogorov.

Từ khóa - Biến ngẫu nhiên mờ; Bất đẳng thức mômen; Luật số lớn; Phụ thuộc âm; Hội tụ theo trung bình; Tổng có trọng số

1. Đặt vấn đề

Các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển về lý thuyết và các ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, trong đó, luật số lớn nghiên cứu hội tụ theo xác suất và hội tụ hầu chắc chắn (h.c.c) của tổng các biến ngẫu nhiên. Với $\{X_n, n > 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên có kì vọng μ hữu hạn, độc lập và có cùng phân phối xác suất, luật mạnh số lớn cổ điển Kolmogorov chỉ ra rằng

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \text{ hầu chắc chắn (h.c.c.) khi } n \rightarrow \infty.$$

Ngày nay, luật số lớn vẫn đang là vấn đề thời sự và được mở rộng từ không gian các số thực sang nhiều không gian khác nhau. Gần đây, tác giả Tôn Thất Tú [1] đã thu được luật đối với dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một bị chặn bởi một biến ngẫu nhiên theo xác suất. Trong bài báo này chúng tôi mở rộng một số kết quả này sang dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một. Trong toàn bộ bài báo này, hằng số C không nhất thiết giống nhau trong mỗi lần xuất hiện.

Định nghĩa 1. [2] Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là phụ thuộc âm (NQD) nếu với mọi x và y ,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Abstract - The Marcinkiewicz-Zygmund and Kolmogorov laws of large numbers are classical results in probability theory with numerous important applications in statistics. Limit theorems for fuzzy random variables and random sets have received much attention in recent years because of their usefulness in several applied fields such as mathematical economics, regression analysis, system analysis and stochastic control theory. Recently, Ton That Tu [1] established several results on laws of large numbers for weighted sums of pairwise independent random variables. In this paper, we extend some results of Ton That Tu [1] to the case of pairwise negatively dependent fuzzy random variables, thereby further generalizing the classical results of Marcinkiewicz-Zygmund and Kolmogorov laws of large numbers.

Key words - Fuzzy Random Variables; Moment Inequalities; Law of Large Numbers; Negatively Quadrant Dependent; Mean Convergence; Weighted Sums

Như vậy, hai biến ngẫu nhiên độc lập là phụ thuộc âm. Joag-Dev and Proschan [3] đã chỉ ra rằng có nhiều phân phối xác suất hữu ích có tính chất phụ thuộc âm. Các biến ngẫu nhiên thành phần của phân phối chuẩn nhiều chiều với các hệ số tương quan âm là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một. Mẫu ngẫu nhiên có hoàn lại cũng là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một.

Bổ đề 1. [2] Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên NQD. Khi đó ta có:

$$1) \text{cov}(X, Y) \leq 0;$$

2) Nếu f và g là hai hàm số không giảm (hoặc không tăng) thì $f(X)$ và $g(Y)$ cũng là hai biến ngẫu nhiên NQD.

Bổ đề 2. [4] Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên NQD đôi một với kì vọng bằng 0 và phương sai hữu hạn. Khi đó

$$E \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^2 \right) \leq C \sum_{i=1}^n E(|X_i|^2)$$

và

$$E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k X_i \right|^2 \right) \leq C \ln^2 n \sum_{i=1}^n E(|X_i|^2).$$

Mỗi tập con mờ của không gian $\mathbb{R}^d$ được xác định bởi

¹ The University of Danang – University of Science and Education, Vietnam (Nguyen Tan Chien, Le Tran Duc Hoang, Trinh Thi Ly Na)

một hàm thuộc u là ánh xạ từ $\mathbb{R}^d$ vào $[0, 1]$. Ký hiệu $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$ là tập tất cả các ánh xạ $u: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện sau (xem Chương 6 của tài liệu tham khảo [5]):

- (1) $\{x \in \mathbb{R}^d : u(x) = 1\} \neq \emptyset$;
- (2) u là hàm nửa liên tục trên;
- (3) $\text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^d : u(x) > 0\}$ là tập compact;
- (4) u là hàm tựa lõm, nghĩa là $u(\gamma x + (1 - \gamma)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d$ và $\gamma \in [0, 1]$.

Với mỗi $u \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$, *lát cắt mức* α của u được định nghĩa bởi $u_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : u(x) \geq \alpha\} \forall \alpha \in [0, 1]$, $\text{supp } u$ được ký hiệu là u_0 .

Với $u, v \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$ và $\gamma \in \mathbb{R}$, một cấu trúc tuyến tính trên $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$ được định nghĩa bởi các phép toán sau.

$$(u \oplus v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\},$$

$$(\gamma \otimes u)(x) = \begin{cases} u(\gamma^{-1}x), & \text{nếu } \gamma \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x), & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

Trong đó, $\chi_A(x)$ là hàm đặc trưng của A , tức là $\chi_A(x) = 1$ nếu $x \in A$ và bằng không nếu ngược lại.

Hàm hỗ trợ của u , ký hiệu là s_u , được xác định với mọi $(\alpha, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^d$ bởi

$$s_u(\alpha, t) = \sup\{\langle t, a \rangle : a \in u_\alpha\}.$$

Với $p \geq 1$, sử dụng hàm hỗ trợ chúng ta xác định khoảng cách (xem Chương 7 của tài liệu tham khảo [5])

$$\rho_p(u, v) = \left(\int_0^1 \int_{S^{d-1}} |s_u(\alpha, t) - s_v(\alpha, t)|^p d\mu d\alpha \right)^{1/p},$$

Trong đó, μ là độ đo Lebesgue chuẩn hóa trên mặt cầu đơn vị S^{d-1} trong $\mathbb{R}^d$. Chuẩn của $u \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$ được xác định bởi

$$\|u\|_{\rho_p} = \left(\int_0^1 \int_{S^{d-1}} |s_u(\alpha, t)|^p d\mu d\alpha \right)^{1/p},$$

Klement và cộng sự [6] đã đưa ra định nghĩa biến ngẫu nhiên mờ như sau. Cho một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, một ánh xạ $X: \Omega \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$ được gọi là *biến ngẫu nhiên mờ* nếu nó là một ánh xạ Borel – đo được đối với σ -đại số Borel $\mathcal{B}(\mathfrak{F}(\mathbb{R}^d))$ sinh ra bởi Tôpô liên kết với metric d_∞ trên $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$, trong đó metric d_∞ trên $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)$ được xác định bởi

$$d_\infty(u, v) = \sup\{|s_u(\alpha, t) - s_v(\alpha, t)| : (\alpha, t) \in [0, 1] \times S^{d-1}\}.$$

Kì vọng của biến ngẫu nhiên mờ X được xác định theo cách tiếp cận của Fréchet với metric ρ_2 (xem [7]), cụ thể là

$$E^F(X) = \left\{ u \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^d) : E(\rho_2(X, u)) = \inf_{v \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^d)} \rho_2(X, v) \right\}.$$

Körner [7] cũng đã giới thiệu khái niệm hiệp phương sai giữa hai biến ngẫu nhiên mờ X và Y , được định nghĩa bởi

$$\text{cov}(X, Y) = \int_0^1 \int_{S^{d-1}} \text{cov}(s_X(\alpha, t), s_Y(\alpha, t)) d\mu d\alpha.$$

Nếu với mọi $(\alpha, t) \in [0, 1] \times S^{d-1}$,

$$\text{cov}(s_X(\alpha, t), s_Y(\alpha, t)) \leq 0$$

thì ta có $\text{cov}(X, Y) \leq 0$. Từ đó, ta định nghĩa khái niệm

biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm như sau

Định nghĩa 2. Hai biến ngẫu nhiên mờ X và Y được gọi là *phụ thuộc âm* nếu với mọi $(\alpha, t) \in [0, 1] \times S^{d-1}$, $s_X(\alpha, t)$ và $s_Y(\alpha, t)$ là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm.

Trong trường hợp $d = 1$ ta có $S^0 = \{-1, 1\}$. Bằng cách chọn độ đo $\mu(\{-1\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ ta được Định nghĩa 4.1 trong tài liệu tham khảo [8].

Định nghĩa 3. Một dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là *bị chặn ngẫu nhiên* bởi một biến ngẫu nhiên thực X theo metric ρ_p ($p \geq 1$) nếu

$$\sup_n P(\|X_n\|_{\rho_p} > t) \leq P(|X| > t) \text{ với mọi } t > 0.$$

Như vậy, một dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n, n \geq 1\}$ có cùng phân phối xác suất bị chặn ngẫu nhiên bởi $\|X_1\|_{\rho_p}$ theo metric ρ_p với mọi $p \geq 1$.

Chứng minh tương tự chứng minh Bổ đề 3 của tác giả Tôn Thất Tú [1] ta thu được Bổ đề sau.

Bổ đề 3. Cho $p, q \geq 1$, $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên thực X theo metric ρ_p và $E(|X|^p) < \infty$. Khi đó, với mọi $x > 0$,

$$1) E\left(\|X_n\|_{\rho_p}^q \chi_{\{\|X_n\|_{\rho_p} \leq x\}}\right) \leq E(|X|^q \chi_{\{|X| \leq x\}}) + x^q P(|X| > x).$$

$$2) E\left(\|X_n\|_{\rho_p}^q \chi_{\{\|X_n\|_{\rho_p} > x\}}\right) \leq E(|X|^q \chi_{\{|X| > x\}}) \text{ nếu } q \leq p.$$

Với hai dãy số dương $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$, nếu tồn tại hằng số dương C sao cho $a_n \leq C b_n \forall n \geq 1$ thì ta ký hiệu $a_n = O(b_n)$. Chứng minh tương tự Bổ đề 2.4 trong bài báo [9] ta được bổ đề tiếp theo.

Bổ đề 4. Cho $p \geq 1$ và $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ. Đặt $S_n = \bigoplus_{k=1}^n X_k$. Cho $\{b_n; n \geq 1\}$ là dãy các hằng số dương sao cho $0 < b_n \uparrow \infty$ và $\frac{b_{2n}}{b_n} = O(1)$. Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \rho_p(S_k, E^F(S_k)) > \varepsilon b_n\right) < \infty$$

với mọi $\varepsilon > 0$, thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \rho_p(S_n, E^F(S_n)) = 0 \text{ h. c. c.}$$

Chứng minh. Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, từ giả thiết $b_n \uparrow +\infty$ ta có:

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} \rho_p(S_i, E^F(S_i)) > \varepsilon b_n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} \rho_p(S_i, E^F(S_i)) > \varepsilon b_n\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq i \leq 2^k} \rho_p(S_i, E^F(S_i)) > \varepsilon b_{2^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Borel–Cantelli và kết hợp với giả thiết $b_{2n}/b_n = O(1)$ ta được:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{2^k}} \max_{1 \leq i \leq 2^{k+1}} \rho_p(S_i, E^F(S_i)) = 0 \text{ (h. c. c.)}.$$

Mặt khác, với $2^k \leq n < 2^{k+1}$, ta có:

$$\frac{1}{b_n} \rho_p(S_n, E^F(S_n)) \leq \frac{1}{b_{2^k}} \max_{1 \leq i \leq 2^{k+1}} \rho_p(S_i, E^F(S_i)).$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được điều phải chứng minh. $\square$

2. Kết quả nghiên cứu

Định lý 5. Cho $1 \leq r \leq 2$, $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X sao cho $E(|X|^r) < \infty$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là hai dãy số thực dương, $b_n \uparrow +\infty$ thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = O(n) \text{ và } c_0 \leq \frac{b_n}{n} \leq c_1 \forall n \geq 1,$$

trong đó c_0 và c_1 là các số thực dương. Khi đó

$$\frac{1}{b_n} \rho_1(S_n, E^F(S_n)) \xrightarrow{L_1} 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty,$$

trong đó $S_n = \bigoplus_{k=1}^n \otimes X_k$.

Chứng minh. Với mỗi $(\alpha, t) \in [0, 1] \times S^{d-1}$, đặt $U_n = s_{X_n}(\alpha, t)$, $n \geq 1$. Lấy $\varepsilon > 0$ bé tùy ý và $0 < p < 1/r$ cố định, với mỗi $1 \leq k \leq n$ đặt

$$Y_{nk} = -I(U_k < -b_n^{1/r} \varepsilon^p) + U_k I(|U_k| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p) + I(U_k > b_n^{1/r} \varepsilon^p).$$

$$Z_{nk} = (U_k + b_n^{1/r} \varepsilon^p) I(U_k < -b_n^{1/r} \varepsilon^p) + (U_k - b_n^{1/r} \varepsilon^p) I(U_k > b_n^{1/r} \varepsilon^p).$$

Chú ý rằng với các hằng số dương a, b, c , các hàm số $f(x) = ax$, $g(x) = -I(x < -b) + xI(|x| \leq b) + I(x > b)$ và $h(x) = (x + c)I(x < -c) + (x - c)I(x > c)$ là các hàm số không giảm. Do đó, áp dụng Bổ đề 1 ta có $\{a_k Y_{nk}, 1 \leq k \leq n\}$ và $\{a_k Z_{nk}, 1 \leq k \leq n\}$ cũng là hai dãy biến ngẫu nhiên NQD đôi một. Hơn nữa, $a_k Y_{nk} + a_k Z_{nk} = a_k U_k$. Đặt

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k Y_{nk}, \quad T'_n = \sum_{k=1}^n a_k Z_{nk}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & E\left(\frac{1}{b_n^{1/r}} \rho_1(S_n, E^F(S_n))\right) \\ &= \frac{1}{b_n^{1/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k (U_k - E(U_k))\right|\right) d\mu d\alpha \\ &\leq \frac{1}{b_n^{1/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E(|(T_n - E(T_n))|) d\mu d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{b_n^{1/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E(|(T'_n - E(T'_n))|) d\mu d\alpha \\ &\leq \left(\frac{1}{b_n^{2/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E(|(T_n - E(T_n))|^2) d\mu d\alpha\right)^{1/2} \\ &\quad + \frac{1}{b_n^{1/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E(|(T'_n - E(T'_n))|) d\mu d\alpha \\ &:= M^{\frac{1}{2}} + N. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Áp dụng Bổ đề 2 và bất đẳng thức tam giác ta được

$$\begin{aligned} E(|T_n - E(T_n)|^2) &\leq \sum_{k=1}^n E(Y_{nk} - E(Y_{nk}))^2 \\ &\leq C \sum_{k=1}^n E(Y_{nk}^2) \\ &\leq C \sum_{k=1}^n E(U_k^2 I(|U_k| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) + C \sum_{k=1}^n P(|U_k| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\ &\leq C \sum_{k=1}^n E(U_k^2 I(\|X_k\|_{\rho_2} \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \\ &\quad + C \sum_{k=1}^n P(\|X_k\|_{\rho_2} > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\ &\leq C \sum_{k=1}^n E(U_k^2 I(\|X_k\|_{\rho_2} \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \\ &\quad + Cn P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{b_n^{2/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E(|(T_n - E(T_n))|^2) d\mu d\alpha \\ &\leq \frac{C}{b_n^{2/r}} \sum_{k=1}^n a_k^2 E(\|X_k\|_{\rho_2}^2 I(\|X_k\|_{\rho_2} \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \\ &\quad + \frac{Cn}{b_n^{2/r}} P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\ &\leq \frac{C}{b_n^{2/r}} E(|X|^2 I(|X| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &\quad + CP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{Cn}{b_n^{2/r}} P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\ &\leq \frac{Cn}{b_n^{2/r}} E(|X|^2 I(|X| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) + 2nP(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon) \\ &\quad + \frac{Cn}{b_n^{2/r}} P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\ &\leq C\varepsilon^{2-rp} E(|X|^r I(|X| \leq b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon^{rp}} E(|X|^r I(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon)) \\ &\quad + \frac{C}{b_n^{2/r} \varepsilon^{rp}} E(|X|^r I(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \\ &\rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ trước, sau đó cho } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có

$$\begin{aligned} E(|T'_n - E(T'_n)|) &\leq \sum_{k=1}^n E(a_k |Z_{nk} - E(Z_{nk})|) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n a_k E(Z_{nk}) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n a_k E(|U_k| I(|U_k| > b_n^{1/r} \varepsilon^p)) \\ &\quad + 2b_n^{1/r} \varepsilon^p \sum_{k=1}^n P(|U_k| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \sum_{k=1}^n a_k E \left(|U_k| I(\|X_k\|_{\rho_1} > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \right) \\
&\quad + 2b_n^{1/r} \varepsilon^p \sum_{k=1}^n P(\|X_k\|_{\rho_1} > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^n a_k E \left(|U_k| I(\|X_k\|_{\rho_1} > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \right) \\
&\quad + 2b_n^{1/r} \varepsilon^p n P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{b_n^{1/r}} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} |(T'_n - E(T'_n))| d\mu d\alpha \\
&\leq \frac{C}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k E \left(\|X_k\|_{\rho_1} I(\|X_k\|_{\rho_1} > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \right) \\
&\quad + C\varepsilon n P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\
&\leq \frac{C}{b_n^{1/r}} \sum_{k=1}^n a_k E \left(|X| I(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \right) \\
&\quad + C\varepsilon^p n P(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \\
&\leq C\varepsilon^{1-rp} E \left(|X|^r I(|X| > b_n^{1/r} \varepsilon^p) \right) \\
&\rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ trước, sau đó cho } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.1)-(2.3) ta được điều phải chứng minh. $\square$

Lấy $a_i = 1$ với mọi $i \geq 1$ và $b_n = n^{1/r}$ với $1 \leq r \leq 2$ và $n \geq 1$ ta thu được luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund đối với dãy các biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một và bị chặn ngẫu nhiên.

Hệ quả 6. Cho $1 \leq r \leq 2$, $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên thực X sao cho $E(|X|^r) < \infty$. Khi đó

$$\frac{1}{n^{1/r}} \rho_1(S_n, E^F(S_n)) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty,$$

trong đó $S_n = \bigoplus_{k=1}^n X_k$.

Định lý 8. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X theo ρ_2 sao cho $E(|X|^2) < \infty$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là hai dãy số thực dương, $b_n \uparrow +\infty$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned}
\frac{b_{2n}}{b_n} &= O(1), \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \\
\sum_{k=1}^n a_k^2 &= O(b_n) \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{nb_n} < \infty.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_2(S_n, E^F(S_n))}{b_n} = 0 \text{ h. c. c.},$$

trong đó $S_n = \bigoplus_{k=1}^n a_k \otimes X_k$.

Để chứng minh Định lý 8 chúng tôi cần bổ đề sau đây.

Bổ đề 7. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một. Khi đó, với $n > 1$, ta có

$$\begin{aligned}
&E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \rho_2^2(S_k, E^F(S_k)) \right) \\
&\leq C \ln^2 n \sum_{i=1}^n E \left(\rho_2^2(X_i, E^F(X_i)) \right),
\end{aligned}$$

trong đó $S_k = \bigoplus_{i=1}^k X_i$.

Chứng minh. Với mỗi $(\alpha, t) \in [0, 1] \times S^{d-1}$, đặt $U_n = s_{X_n}(\alpha, t)$, $n \geq 1$. Khi đó $\{U_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một. Áp dụng Bổ đề 2 ta có

$$\begin{aligned}
&E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k (U_i - E(U_i)) \right)^2 \\
&\leq C \ln^2 n \sum_{i=1}^n E(U_i - E(U_i))^2.
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
&E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \rho_2^2(S_k, E^F(S_k)) \right) \\
&= E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} \sum_{i=1}^k (U_i - E(U_i))^2 d\mu d\alpha \right) \\
&\leq \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k (U_i - E(U_i))^2 \right) d\mu d\alpha \\
&\leq \int_0^1 \int_{S^{d-1}} C \ln^2 n \sum_{i=1}^k E(U_i - E(U_i))^2 d\mu d\alpha \\
&= C \ln^2 n \int_0^1 \int_{S^{d-1}} E \left(\sum_{i=1}^n (U_i - E(U_i))^2 \right) d\mu d\alpha \\
&= C \ln^2 n E \left(\int_0^1 \int_{S^{d-1}} \sum_{i=1}^n (U_i - E(U_i))^2 d\mu d\alpha \right) \\
&= C \ln^2 n \sum_{i=1}^n E \left(\rho_2^2(X_i, E^F(X_i)) \right).
\end{aligned}$$

$\square$

Chứng minh Định lý 8. Theo Bổ đề 7 ta có

$$\begin{aligned}
&E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \rho_2^2(S_k, E^F(S_k)) \right) \\
&\leq C \ln^2 n \sum_{i=1}^n a_i^2 E \left(\rho_2^2(X_i, E^F(X_i)) \right).
\end{aligned}$$

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta được

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P \left(\max_{1 \leq k \leq n} \rho_2(S_k, E^F(S_k)) > b_n \varepsilon \right) \\
&\leq \frac{1}{nb_n^2 \varepsilon^2} E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \rho_2^2(S_k, E^F(S_k)) \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{nb_n^2 \varepsilon^2} \ln^2 n \sum_{i=1}^n a_i^2 E \left(\rho_2^2(X_i, E^F(X_i)) \right) \\
&\leq C E(|X|^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{nb_n \varepsilon^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Do đó, theo Bổ đề 4, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_2(S_n, E^F(S_n))}{b_n} = 0 \text{ h.c.c.}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Lấy $a_i = 1$ với mọi $i \geq 1$, $b_n = n$ với mọi $n \geq 1$ và $r = 1$ ta thu được luật mạnh số lớn Kolmogorov đối với dãy các biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một và có cùng phân phối xác suất.

Hệ quả 9. Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một và có cùng phân phối xác suất sao cho $E(\|X\|_{p_1}^1) < \infty$. Khi đó

$$\frac{1}{n} \rho_1(S_n, E^F(S_n)) \xrightarrow{\text{h.c.c.}} 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty,$$

trong đó $S_n = \bigoplus_{k=1}^n X_k$.

Ví dụ. Xét lớp các tập con mờ tam giác đối xứng của tập số thực $\mathbb{R}$ với hàm thuộc có dạng

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < m - l, \\ 1 - \frac{m - x}{l} & \text{nếu } m - l \leq x < m, \\ 1 - \frac{x - m}{l} & \text{nếu } m \leq x < m + l, \\ 0 & \text{nếu } x \geq m + l, \end{cases}$$

Trong đó $m \in \mathbb{R}, l \geq 0$. Ký hiệu $u = (m; l; l)$.

Xét $\{M_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối xác suất với biến ngẫu nhiên M có $E(M) = 0$, $\{L_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối đều trên $[0, 1]$, $\{M_n, n \geq 1\}$ và $\{L_n, n \geq 1\}$ độc lập với nhau. Xét dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n, n \geq 1\}$ với $X_n = (M_n, L_n, L_n), n \geq 1$. Körner [7] đã chỉ ra rằng $E^F(X_n) = (E(M_n), E(L_n), E(L_n)) = (0; 0,5; 0,5)$. Chọn độ đo $\mu(\{-1\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ ta được

$$\frac{1}{n} \rho_1(S_n, E^F(S_n)) = \int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k - (1 - \alpha) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k - 0,5 \right) \right| d\alpha \rightarrow 0$$

(h.c.c.) khi $n \rightarrow +\infty$.

3. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi mở rộng luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund và luật mạnh số lớn Kolmogorov (cho trường hợp cùng phân phối xác suất) đối với dãy biến ngẫu nhiên mờ phụ thuộc âm đôi một. Định lý 5 và Định lý 8 cũng có thể mở rộng cho các trọng số $\{a_n, n \geq 1\}$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một và độc lập với dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n, n \geq 1\}$. Các kết quả trong bài báo này cũng có thể mở rộng cho tập các tập con mờ của không gian Banach hay áp dụng vào bài toán ước lượng mô hình hồi quy phi tham số mờ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] T. T. Tu, "Laws of large numbers for a sequence of pairwise independent stochastically dominated random variables", *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, vol. 23, no. 5A, pp. 97–101, 2025.
- [2] E. L. Lehmann, "Some concepts of dependence", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 43, pp. 1137–1153, 1996.
- [3] K. Joag-Dev and F. Proschan, "Negative association of random variables, with applications", *Ann. Stat.* Vol. 11, pp. 286–295, 1983.
- [4] P. Y. Chen, P. Bai, and S. H. Sung, "The von Bahr-Esseen moment inequality for pairwise independent random variables and applications", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 419, pp. 1290–1302, 2014.
- [5] P. Diamond and P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Application*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [6] E. P. Klement, M. L. Puri, and D. A. Ralescu, "Limit theorems for fuzzy random variables", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 407, pp. 171–182, 1986.
- [7] R. Körner, "On the variance of fuzzy random variables", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 92, pp. 83–93, 1997.
- [8] N. T. Thuan and N. V. Quang, "Negative association and negative dependence for random upper semicontinuous functions, with applications", *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 145, pp. 44–57, 2016.
- [9] S. H. Sung, "Marcinkiewicz-Zygmund type strong law of large numbers for pairwise i.i.d. random variables", *Journal of Theoretical Probability*, vol. 27, pp. 96–106, 2014.