

SỰ HỘI TỤ CỦA CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH CỦA HÀM ĐIỀU HOÀ DƯỚI

CONVERGENCE OF THE INTEGRAL MEANS OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

Bùi Lê Hương Thảo*, Trần Mạnh Tân, Vũ Phương Liên, Nguyễn Phạm Phương Trà, Hồ Văn Anh Khê

Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, Việt Nam¹

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: huongthaost1@gmail.com

(Nhận bài / Received: 19/01/2026; Sửa bài / Revised: 14/5/2026; Chấp nhận đăng / Accepted: 15/5/2026)

DOI: 10.31130/ud-jst.2026.24(5A).051

Tóm tắt - Lớp hàm điều hoà dưới là lớp hàm rộng hơn lớp hàm liên tục và do đó có nhiều ứng dụng trong toán học và trong các lĩnh vực khác. Các đại lượng trung bình là yếu tố quan trọng khi nghiên cứu các lớp hàm khác nhau. Đối với lớp hàm lồi, có nhiều tính chất của các đại lượng trung bình được chứng minh dựa trên các công cụ của giải tích lồi [1]. Mục đích chính của bài báo này là sử dụng các công cụ của giải tích phức một biến để nghiên cứu tính chất hội tụ của các đại lượng trung bình tích phân của hàm điều hoà dưới. Kết quả thu được chỉ ra rằng tốc độ hội tụ của các đại lượng trung bình tích phân của hàm điều hoà dưới bằng tốc độ hội tụ của hàm $\log r$ khi r tiến tới 0.

Từ khóa - Hàm biến phức; hàm điều hoà dưới; trung bình tích phân; hội tụ

1. Giới thiệu

Hàm điều hoà dưới là đối tượng nghiên cứu chính của lý thuyết thế vị. Rất nhiều kết quả quan trọng về lớp hàm này đã được thiết lập vào nửa sau của thế kỉ thứ XX (xem [2] - [5]). Đây là lớp hàm với nội hàm rất yếu là chỉ yêu cầu tính nửa liên tục trên và khả tích địa phương. Vì vậy, đây là lớp hàm rộng và phù hợp với nhiều mô hình trong các lĩnh vực khác như lý thuyết tối ưu, hệ động lực.

Trong tài liệu [1], ta đã biết tới các tính chất của của các đại lượng trung bình tích phân đối với lớp hàm lồi. Đây là lớp hàm quan trọng trong giải tích nói chung và giải tích lồi nói riêng. Lớp hàm này có tính chất rất phong phú nên việc ứng dụng để nghiên cứu các tính chất của các đại lượng trung bình tích phân là rất thuận lợi. Hàm điều hoà dưới trên $\mathbb{R}^n$ được trình bày trong [2]. Một số tính chất của các đại lượng trung bình tích phân của hàm điều hoà dưới n biến thực đã được chứng minh dựa trên công cụ của giải tích thực nhiều biến.

Trong [2], tác giả đã chỉ ra tính lồi của các đại lượng trung bình theo hàm logarit (Định lý 3.5.6 [2]). Ở đây, chúng tôi sẽ xem xét các đại lượng trung bình của hàm điều hoà dưới trên $\mathbb{C}$ và so sánh tốc độ hội tụ của các đại lượng trung bình với hàm logarit. Các công cụ chính được sử dụng để nghiên cứu ở đây là các tính chất của hàm điều hoà dưới trên mặt phẳng phức và các công cụ của giải tích phức một biến như công thức tích phân Cauchy (xem [3]). Kết quả chính của bài báo là Định lý 3.4. Ở đó chúng ta

Abstract - Subharmonic functions form a larger class than continuous functions. Therefore, this class of functions has many applications in mathematics and other fields such as dynamic systems. Means play a very important role when studying different classes of functions. For convex functions, many properties of means have been established using tools from convex analysis [1]. The main aim of this paper is to use tools from complex analysis in one variable to establish the convergence of the integral means of subharmonic functions. The results show that the convergence speed of the integral means is the same as that of the function $\log r$ as $r \rightarrow 0$.

Key words - Complex functions; subharmonic functions; integral means; convergence

sẽ thấy rằng tốc độ hội tụ của các đại lượng trung bình tích phân của hàm điều hoà dưới thấp hơn hoặc bằng tốc độ hội tụ của hàm $\log r$ khi r tiến tới 0. Cụ thể, kết quả chỉ ra rằng hệ số chặn tiệm cận là khối lượng của một độ đo Radon tại điểm 0.

2. Kiến thức chuẩn bị

2.1. Trong bài báo này ta sẽ dùng kí hiệu $\log r$ để chỉ logarit cơ số e của r .

2.2. Đĩa tâm a bán kính r trong mặt phẳng phức

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

2.3. Hàm điều hoà dưới: Cho $U \subset \mathbb{C}$ là một tập mở, hàm số $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm điều hoà dưới nếu u là hàm nửa liên tục trên và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương, tức là với mọi $w \in U$ tồn tại $\rho > 0$ sao cho

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it}) dt, \quad (0 \leq r < \rho).$$

Hàm u được gọi là hàm điều hoà trên U nếu $-u$ là hàm điều hoà dưới trên U .

2.4. Các đại lượng trung bình tích phân: Ta nhắc lại một số đại lượng trung bình quan trọng của hàm điều hoà dưới. Cho u là hàm điều hoà dưới trên đĩa $\Delta(0, \rho)$ và $0 < r < \rho$.

- Giá trị lớn nhất trên đường tròn

$$M_u(r) = \sup_{|z|=r} u(z).$$

¹ The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam (Bui Le Huong Thao, Tran Manh Tan, Vu Phuong Lien, Nguyen Pham Phuong Tra, Ho Van Anh Khe)

- Giá trị trung bình trên đường tròn

$$C_u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt.$$

- Giá trị trung bình trên đĩa

$$B_u(r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z| < r} u(z) dA(z).$$

2.5. Độ đo Dirac: Độ đo Dirac trên $\mathbb{C}$ tại điểm z được kí hiệu và xác định như sau: với $A \subset \mathbb{C}$

$$\delta_z(A) = \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \notin A. \end{cases}$$

2.6 Cho μ là một độ đo Borel hữu hạn với giá compact trên $\mathbb{C}$. Ta gọi thế vị của μ là hàm $p_\mu: \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ xác định bởi

$$p_\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \log|z - \tau| d\mu(\tau), (z \in \mathbb{C}).$$

Bởi Bổ đề 4.2.2 [2], thế vị p_μ là hàm điều hoà dưới trên $\mathbb{C}$.

3. Kết quả chính

Bổ đề 3.1. Cho $\zeta \in \mathbb{C}$ và $r > 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} \log|\zeta| & \text{nếu } r \leq |\zeta| \\ \log r & \text{nếu } r > |\zeta| \end{cases}$$

Chứng minh.

Trường hợp 1: Với $r < |\zeta|$.

Xét hàm $u(z) = \log|z - \zeta|$.

Ta có, hàm u là điều hòa trên đĩa

$$\Delta\left(0, \frac{r+|\zeta|}{2}\right),$$

và ζ nằm ngoài đĩa này. Áp dụng tính chất giá trị trung bình của hàm điều hòa tại $z = 0$ ta có

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt.$$

Hay

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - \zeta| dt = \log|\zeta|.$$

Trường hợp 2: Với $r > |\zeta|$: Đặt

$$\varphi_r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - \tau| dt.$$

Khi đó $\varphi_r(0) = \log r$. Có thể viết

$$\varphi_r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \log[(re^{it} - \tau)(re^{-it} - \bar{\tau})] dt.$$

Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x}(\tau) = \frac{\partial \varphi_r}{\partial y}(\tau) = 0$$

Suy ra $\varphi_r = \text{const}$ trên $\Delta(0, r)$. Do $\varphi_r(0) = \log r$, nên

$\varphi_r(\zeta) = \log r$ với mọi $|\zeta| < r$.

Trường hợp 3: Với $r = |\zeta|$: Khi đó, ta định nghĩa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - \zeta| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - re^{i\theta}| dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta| \geq \varepsilon} \log|re^{it} - re^{i\theta}| dt. \end{aligned}$$

Theo chứng minh ở các trường hợp trên, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta| \geq \varepsilon} \log|re^{it} - re^{i\theta}| dt \\ = \lim_{r' \rightarrow r} \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta| \geq \varepsilon} \log|r'e^{it} - re^{i\theta}| dt = \log r. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - \zeta| dt = \log r = \log|\zeta|.$$

Bổ đề 3.2. Giả sử μ là độ đo Borel hữu hạn trên $\Delta(0, 1)$, $0 < r < 1$ và $1 > \varepsilon > 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt \right| &= \left| \int_{\Delta(0,1)} \max(\log r, \log|\omega|) d\mu(\omega) \right| \\ &\leq |\log r| (\mu(\Delta(0, r^\varepsilon)) + \varepsilon \mu(\Delta(0, 1))). \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu $\mu(\{0\}) = 0$ thì

$$\frac{1}{\log r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt \right) \rightarrow 0 \text{ khi } r \rightarrow 0$$

Chứng minh. Áp dụng Fubini ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathbb{C}} \log|re^{it} - \omega| d\mu(\omega) \right) dt \\ &= \int_{\Delta(0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - \omega| dt \right) d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 3.1 ta có

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|re^{it} - \omega| dt = \max(\log r, \log|\omega|).$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt = \int_{\Delta(0,1)} \max(\log r, \log|\omega|) d\mu(\omega).$$

Để chứng minh bất đẳng thức trong bổ đề ta chia đĩa đơn vị như sau

$$\Delta(0, 1) = \Delta(0, r^\varepsilon) \cup \{\omega \in \Delta(0, 1) : r^\varepsilon \leq |\omega| < 1\}.$$

Trên tập $\Delta(0, r^\varepsilon)$ ta có $|\omega| \leq r^\varepsilon < r$, nên

$$\max(\log r, \log|\omega|) = \log r.$$

Suy ra

$$\int_{\Delta(0, r^\varepsilon)} \max(\log r, \log|\omega|) d\mu(\omega) = \log r \mu(\Delta(0, r^\varepsilon)).$$

Trên tập $\{\omega \in \Delta(0, 1) : r^\varepsilon \leq |\omega| < 1\}$, ta có

$$\log|\omega| \geq \log(r^\varepsilon) = \varepsilon \log r > \log r.$$

Suy ra

$$\max(\log r, \log |\omega|) = \log |\omega| \geq \varepsilon \log r.$$

Vậy ta có

$$\int_{r^\varepsilon \leq |\omega| < 1} \max(\log r, \log |\omega|) d\mu(\omega) \geq \varepsilon \log r \cdot \mu(\{r^\varepsilon \leq |\omega| < 1\})$$

Do hai vế của bất đẳng thức trên là âm nên khi lấy giá trị tuyệt đối hai vế ta có

$$\left| \int_{r^\varepsilon \leq |\omega| < 1} \max(\log r, \log |\omega|) d\mu(\omega) \right| \leq \varepsilon |\log r| \mu(\{r^\varepsilon \leq |\omega| < 1\}) \leq \varepsilon |\log r| \mu(\Delta(0, 1)).$$

Kết hợp phần trên, ta được

$$\left| \int_{\Delta(0, 1)} \max(\log r, \log |\omega|) d\mu(\omega) \right| \leq |\log r| (\mu(\Delta(0, r^\varepsilon)) + \varepsilon \mu(\Delta(0, 1))).$$

Do đó

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt \right| \leq |\log r| (\mu(\Delta(0, r^\varepsilon)) + \varepsilon \mu(\Delta(0, 1))).$$

Nếu $\mu(\{0\}) = 0$ thì $\mu(\Delta(0, r^\varepsilon)) \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow 0$. Chia hai vế cho $|\log r|$ và $r \rightarrow 0$, ta suy ra

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\log r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt \right) \right| \leq \varepsilon \mu(\Delta(0, 1)).$$

Cho $\varepsilon \downarrow 0$ ta nhận được

$$\frac{1}{\log r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\mu(re^{it}) dt \right) \rightarrow 0 \text{ khi } r \rightarrow 0.$$

Ta có kết quả sau về đánh giá giữa giá trị lớn nhất trên đường tròn và các đại lượng giá trị trung bình của hàm điều hòa dưới.

Bổ đề 3.3. Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên đĩa $\Delta(0, \rho)$ và $u \neq -\infty$. Khi đó, ta có

a. $B_u(r) \leq C_u(r) \leq M_u(r)$ với mọi $0 < r < \rho$.

b. Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$M_u(r) \leq C_u(2r) + C \text{ với mọi } 0 < r < \frac{\rho}{2}.$$

Chứng minh

a. + Ta chứng minh $B_u(r) \leq C_u(r)$.

Vì u là hàm điều hòa dưới trên $\Delta(0, \rho)$, nên với mọi $z \in \Delta(0, r)$ ta có bất đẳng thức Poisson

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) P_r(z, e^{it}) dt,$$

trong đó hạt nhân Poisson được cho bởi

$$P_r(z, e^{it}) = \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{it} - z|^2}.$$

Lấy tích phân Lebesgue hai vế theo z trên đĩa $|z| < r$, ta được

$$\int_{|z| < r} u(z) dA(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \left(\int_{|z| < r} P_r(z, e^{it}) dA(z) \right) dt$$

$$\text{Vì } \int_{|z| < r} P_r(z, e^{it}) dA(z) = \pi r^2,$$

nên

$$\int_{|z| < r} u(z) dA(z) \leq \pi r^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt.$$

Chia hai vế cho πr^2 , ta suy ra

$$B_u(r) \leq C_u(r)$$

+ Ta chứng minh $C_u(r) \leq M_u(r)$.

Vì

$$u(re^{it}) \leq \sup_{|z|=r} u(z) = M_u(r) \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

nên khi lấy tích phân theo t trên đoạn $[0, 2\pi]$, ta được

$$C_u(r) \leq M_u(r).$$

Vậy ta có $B_u(r) \leq C_u(r) \leq M_u(r)$.

b. Không chế $M_u(r)$ bởi $C_u(2r)$

Cho z_0 sao cho $|z_0| = r$ và $u(z_0) = M_u(r)$. Vì u là hàm điều hòa dưới nên với mọi $\delta > 0$ sao cho $\overline{\Delta(z_0, \delta)} \subset \Delta(0, 2r)$, ta có

$$u(z_0) \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{|z-z_0| < \delta} u(z) dA(z).$$

Chọn $\delta = r$, khi đó $\Delta(z_0, r) \subset \Delta(0, 2r)$ và do đó

$$M_u(r) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z| < 2r} u(z) dA(z) = 4B_u(2r).$$

Áp dụng kết quả khẳng định a) cho $2r$, ta được

$$M_u(r) \leq 4C_u(2r).$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể viết

$$M_u(r) \leq C_u(2r) + C,$$

với C là hằng số độc lập với r .

Sau đây là kết quả chính của bài báo về sự hội tụ của giá trị lớn nhất trên đường tròn và các đại lượng trung bình của hàm điều hòa dưới.

Định lý 3.4. Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên $\Delta(0, \rho)$ sao cho $u(0) = -\infty$ và u không đồng nhất $-\infty$. Khi đó, ta có

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M_u(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_u(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_u(r)}{\log r} = \Delta u(\{0\}).$$

Chứng minh: + Ta chứng minh $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_u(r)}{\log r} = \Delta u(\{0\})$:

Vì u là hàm điều hòa dưới và không đồng nhất $-\infty$, theo biểu diễn Riesz (Định lý 4.4.1 [2]), tồn tại một hàm điều hòa h và một độ đo Borel hữu hạn $\mu = \Delta u$ sao cho

$$u(z) = h(z) + p_\mu(z),$$

$$p_\mu(z) = \int_{\Delta(0,\rho)} \log|z - \omega| d\mu(\omega),$$

với mọi $z \in \Delta(0,\rho) \setminus \{0\}$.

Từ giả thiết $u(0) = -\infty$ suy ra $\mu(\{0\}) > 0$.

Ta có thể phân tích độ đo μ thành tổng hai độ đo, trong đó một độ đo tập trung tại điểm 0 và một độ đo tập trung vào phần còn lại (tức là độ đo của nó tại 0 bằng không) như sau:

$$\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + \nu, \quad \nu(\{0\}) = 0,$$

ở đó, δ_0 là độ đo Dirac tại điểm 0. Khi đó

$$p_\mu(z) = \mu(\{0\})\log|z| + p_\nu(z).$$

Xét giá trung bình trên đường tròn

$$C_u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt = C_h(r) + C_{p_\mu}(r).$$

Vì h là hàm điều hòa nên theo đẳng thức giá trị trung bình (Định lý 3, trang 112 trong [3]) suy ra $C_h(r) = h(0)$.

Từ đây suy ra

$$\frac{C_h(r)}{\log r} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

Mặt khác,

$$C_{p_\mu}(r) = \mu(\{0\})\log r + C_{p_\nu}(r).$$

Vì $\nu(\{0\}) = 0$ nên theo Bổ đề 3.2 ta có

$$\frac{1}{\log r} C_{p_\nu}(r) \rightarrow 0 \quad \text{ khi } r \rightarrow 0.$$

Do đó

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_u(r)}{\log r} = \mu(\{0\}) = \Delta u(\{0\}).$$

+ Ta chứng minh $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_u(r)}{\log r} = \Delta u(\{0\})$:

Từ kết quả biểu diễn Riesz của hàm u như trên ta có

$$B_u(r) = B_h(r) + B_{p_\mu}(r).$$

Vì h là hàm điều hòa nên ta có

$$B_h(r) = h(0) \Rightarrow \frac{B_h(r)}{\log r} \rightarrow 0 \quad \text{ khi } r \rightarrow 0.$$

Ta sẽ chứng minh: $B_{p_\mu}(r) = \mu(\{0\})\log r + O(1)$.

Thật vậy: Xét thế năng logarithm

$$p_\mu(z) = \int_{\Delta(0,\rho)} \log|z - \omega| d\mu(\omega),$$

trong đó μ là một độ đo Borel hữu hạn. Giá trị trung bình trên đĩa của hàm p_μ được cho bởi

$$B_{p_\mu}(r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z| < r} \int_{\Delta(0,\rho)} \log|z - \omega| d\mu(\omega) dA(z).$$

Áp dụng định lý Fubini, ta được

$$B_{p_\mu}(r) = \int \Phi_r(\omega) d\mu(\omega),$$

với

$$\Phi_r(\omega) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z| < r} \log|z - \omega| dA(z).$$

Ta tách độ đo

$$\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + \nu, \quad \nu(\{0\}) = 0.$$

Khi đó ta có

$$B_{p_\mu}(r) = \mu(\{0\})\Phi_r(0) + \int \Phi_r(\omega) d\nu(\omega).$$

- Với phần $\omega = 0$. Ta có

$$\Phi_r(0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z| < r} \log|z| dA(z).$$

Đổi sang tọa độ cực, ta tính được

$$\int_{|z| < r} \log|z| dA(z) = 2\pi \int_0^r \rho \log \rho d\rho = \pi r^2 \log r - \frac{\pi r^2}{2}.$$

Do đó

$$\Phi_r(0) = \log r - \frac{1}{2}.$$

Và

$$\mu(\{0\})\Phi_r(0) = \mu(\{0\})\log r + O(1).$$

- Với phần $\nu(\{0\}) = 0$. Xét tích phân

$$I(r) := \int \Phi_r(\omega) d\nu(\omega).$$

Ta chia miền tích phân thành hai phần.

(i) Trường hợp $|\omega| \geq 2r$. Với $|z| < r$ ta có $|z - \omega| \sim |\omega|$, do đó

$$\log|z - \omega| = \log|\omega| + O(1).$$

suy ra

$$\Phi_r(\omega) = \log|\omega| + O(1).$$

Vì ν là độ đo hữu hạn và $\log|\omega|$ bị chặn trên miền $|\omega| \geq 2r$, nên

$$\int_{|\omega| \geq 2r} \Phi_r(\omega) d\nu(\omega) = O(1).$$

(ii) Trường hợp $0 < |\omega| < 2r$. Với $|z| < r$ và $|\omega| < 2r$ ta có $|z - \omega| \leq 3r$, nên

$$\Phi_r(\omega) \leq \log(3r).$$

Do $\nu(\{0\}) = 0$, nên

$$\nu(B(0, 2r)) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

Vì thế

$$\int_{|\omega| < 2r} \Phi_r(\omega) d\nu(\omega) \leq \log(3r)\nu(B(0, 2r)) = O(1).$$

Tổng hợp các phần trên, ta thu được

$$B_{p_\mu}(r) = \mu(\{0\})(\log r - \frac{1}{2}) + O(1) = \mu(\{0\}) \log r + O(1),$$

$r \rightarrow 0$

Vậy ta có

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_u(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_h(r)}{\log r} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_{p_\mu}(r)}{\log r} = \mu(\{0\}) = \Delta u(\{0\}).$$

Ta chứng minh:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M_u(r)}{\log r} = \Delta u(\{0\})$$

Theo Bổ đề 3.3 ta có

$$B_u(r) \leq C_u(r) \leq M_u(r) \leq C_u(2r) + C,$$

với r đủ nhỏ.

Chia các bất đẳng thức trên cho $\log r$ và cho $r \rightarrow 0$, ta

$$\text{suy ra: } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M_u(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_u(r)}{\log r} = \Delta u(\{0\}).$$

Kết hợp các kết quả trên, ta được

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M_u(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_u(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{B_u(r)}{\log r} = \Delta u(\{0\}).$$

4. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã chỉ ra được tốc độ hội tụ của các đại lượng trung bình tích phân của hàm điều hoà dưới thấp hơn hoặc bằng tốc độ hội tụ của hàm $\log r$ khi r tiến tới 0.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. Niculescu and L. Persson, *Convex Functions and Their Applications*, Springer, 2018.
- [2] D. H. Armitage and Stephen J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer, 2001.
- [3] N. Q. Dieu and L. M. Hai, *Pluripotential theory*, Hanoi National University of Education Press, 2013.
- [4] P. H. Hiep, *Singularities of plurisubharmonic functions*, Pub. Hou. Sci. and Tec., 2016.
- [5] L. Q. Nam, *Analysis of Monge - Ampère Equation*, American Mathematical Society, 2024.