

SỰ HỘI TỤ TRÊN CỦA TẬP NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG VÉCTƠ MẠNH KIỂU STAMPACCHIA TRONG MÔI TRƯỜNG MỜ VÀ ỨNG DỤNG

ON THE UPPER CONVERGENCE OF SOLUTION SETS FOR STAMPACCHIA-TYPE FUZZY STRONG VECTOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS AND APPLICATIONS

Nguyễn Văn Hưng¹, Nguyễn Huỳnh Vũ Duy²

¹Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông cơ sở Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Trường Đại học Mở Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: duy.nhv@ou.edu.vn

(Nhận bài / Received: 14/3/2026; Sửa bài / Revised: 01/7/2026; Chấp nhận đăng / Accepted: 14/7/2026)

DOI: 10.31130/ud-jst.2026.24(7A).149

Tóm tắt - Bài báo này nghiên cứu tính hội tụ trên của tập nghiệm đối với bài toán tựa cân bằng véctor mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ. Đầu tiên, nghiên cứu giới thiệu khái niệm tập mờ và ánh xạ mờ, trên cơ sở những khái niệm này, chúng tôi thiết lập một mô hình mới của bài toán tựa cân bằng véctor mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ (viết tắt, (SVQEP)). Tiếp theo, bằng cách sử dụng các dãy hàm và dãy tập, thiết lập các điều kiện đủ cho sự hội tụ trên của tập nghiệm cho bài toán (SVQEP). Cuối cùng, khảo sát mô hình bài toán tối ưu trong môi trường mờ như là phần ứng dụng thực tế cho kết quả này. Các kết quả đạt được của nghiên cứu là mới và khác so với một số công trình đã công bố trước đây. Một số ví dụ minh họa cũng được trình bày nhằm làm rõ các kết quả thu được.

Từ khóa - Bài toán tựa cân bằng véctor mạnh; bài toán tối ưu véctor; hội tụ trên; lý thuyết tập mờ; ánh xạ đa trị; tập nghiệm

1. Giới thiệu

Cho A là tập con khác rỗng của không gian Banach thực X và B là tập khác rỗng. Ký hiệu $\mathcal{F}(A)$ là tập hợp tất cả các tập mờ xác định trên A , tức là $\mathcal{F}(A) = \{\tau \mid \tau : A \rightarrow [0,1]\}$. Khi đó, ta có kết quả sau:

i) Ánh xạ $\mathcal{D} : B \rightarrow \mathcal{F}(A)$ được gọi là ánh xạ mờ trên B ;
 ii) Nếu $\mathcal{D}$ ánh xạ mờ trên B , thì với mỗi $x \in B$, $\mathcal{D}(x)$ là tập mờ trên A , và $\mu_{\mathcal{D}(x)}(y)$ là hàm thuộc của phần tử y trong tập mờ $\mathcal{D}(x)$;

iii) Với $P \in \mathcal{F}(A)$ và $\gamma \in (0,1]$, tập $P_\gamma = \{x \in A \mid \mu_P(x) \geq \gamma\}$ gọi là tập cắt γ của tập mờ P .

Cho $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ là ba không gian Banach, $X \subset \mathcal{X}, Z \subset \mathcal{Z}$ là các tập con lồi, đóng, khác rỗng, và C là nón lồi, đóng trong $\mathcal{Y}$ sao cho $\text{int } C \neq \emptyset$, trong đó $\text{int } C$ là phần trong của nón C . Cho $S : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q : X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ là các ánh xạ mờ, và hàm véctor $f : X \times Z \times X \rightarrow \mathcal{Y}$ và hàm

Abstract - This paper is to investigate the upper convergence of the solution set for strong Stampacchia-type vector quasi-equilibrium problems in fuzzy environments. First, the study introduce the notions of fuzzy sets and fuzzy mappings. Based on these concepts, establish a new model of strong Stampacchia-type vector quasi-equilibrium problems in fuzzy environments (abbreviated as (SVQEP)). Next, by employing sequences of functions and sequences of sets, we derive sufficient conditions for the upper convergence of the solution set to problem (SVQEP). Finally, the study a fuzzy optimization problem as a practical application of the obtained results. The results are new and differ from several previously published works. Some illustrative examples are also presented to clarify the obtained results.

Key words - Strong vector quasi-equilibrium problem; vector optimization problem; upper convergence; fuzzy set theory; set-valued mapping; solution set

$a, b : X \rightarrow (0,1]$. Xét bài toán tựa cân bằng véctor mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ sau đây:

(SVQEP). Tìm $x \in S(x)_{a(x)}$ và $z \in Q(x)_{b(x)}$ sao cho,

$$f(x, z, y) \in C, \quad \forall y \in S(x)_{a(x)}.$$

Trong đó, $S(x)_{a(x)}$ và $Q(x)_{b(x)}$ lần lượt là các tập cắt $a(x)$ và $b(x)$ của các tập mờ $S(x)$ và $Q(x)$ được xác định bởi,

$$S(x)_{a(x)} = \{y \in X \mid \mu_{S(x)}(y) \geq a(x)\},$$

$$Q(x)_{b(x)} = \{z \in Z \mid \mu_{Q(x)}(z) \geq b(x)\}.$$

Cho các dãy ánh xạ mờ $S_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q_n : X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ và dãy hàm $f_n : X \times Z \times X \rightarrow \mathcal{Y}$, $a_n, b_n : X \rightarrow (0,1]$, với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Xét dãy bài toán tựa cân bằng véctor mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ, sau đây:

(SVQEP)_n. Tìm $x \in S_n(x)_{a_n(x)}$, $z \in Q_n(x)_{b_n(x)}$ sao cho,

$$f_n(x, z, y) \in C, \quad \forall y \in S_n(x)_{a_n(x)}.$$

¹ Post and Telecommunications Institute of Technology, Ho Chi Minh City, Vietnam (Nguyen Van Hung)

² Ho Chi Minh City Open University, Vietnam (Nguyen Huynh Vu Duy)

Trong đó, $S_n(x)_{a_n(x)}$ và $Q_n(x)_{b_n(x)}$ lần lượt là các dãy tập cắt $a_n(x)$ và $b_n(x)$ của các tập mờ $S_n(x)$ và $Q_n(x)$ được xác định bởi,

$$S_n(x)_{a_n(x)} = \{t \in X \mid \mu_{S_n(x)}(t) \geq a_n(x)\},$$

$$Q_n(x)_{b_n(x)} = \{t \in Z \mid \mu_{Q_n(x)}(t) \geq b_n(x)\}.$$

Nhằm minh họa cho động cơ của việc thiết lập mô hình này, xét một số trường hợp đặc biệt của bài toán như sau:

Nhận xét 1.1.

Đặt $\mathcal{X} = Y = \mathcal{Z} = H$, với H không gian Hilbert, $a(x) = b(x) = v$, $C = \mathbb{R}_+$, $S = S(x)_{a(x)} = H$, $Q(x) = T(x)$, $Q(x)_{b(x)} = (T(x))_v$, $f(x, z, y) = \langle z, y - x \rangle + \varphi(y) - \varphi(x)$, khi đó bài toán (SVQEP) trở thành bất đẳng thức biến phân hỗn hợp trong môi trường mờ được nghiên cứu trong [1].

Đặt $\mathcal{X} = Y = \mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$, $C = \mathbb{R}_+$, $S(x) = K$, $K \subset \mathbb{R}^n$, $Q(x) = T(x)$, $a(x) = b(x) = 1$, $Q(x)_{b(x)} = T(x)_{a(x)}$ và $f(x, z, y) = \langle z, y - x \rangle$, khi đó bài toán (SVQEP) trở thành một trường hợp đặc biệt bất đẳng thức biến phân phi tuyến cho ánh xạ mờ được nghiên cứu bởi Tang và các cộng sự trong [2].

Lý thuyết tập mờ đã được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như kỹ thuật điều khiển, lý thuyết trò chơi, xử lý ảnh cũng như trong kinh tế và tài chính. Khái niệm tập mờ được Zadeh [3] đề xuất vào năm 1965 như là sự mở rộng của lý thuyết tập hợp cổ điển. Năm 1989, Chang và Zhu [4] đã giới thiệu lớp bất đẳng thức biến phân mờ thông qua các tập cắt của ánh xạ mờ. Trong những năm gần đây, nhiều kết quả mới đã được công bố. Cụ thể, Hung và Keller [5], [6] đã nghiên cứu tính đặt chỉnh, sự tồn tại và ổn định nghiệm cho trò chơi tổng quát trong môi trường mờ. Độc giả quan tâm có thể tham khảo thêm các tài liệu [7], [8], [9], [10] để biết thêm chi tiết về lý thuyết tập mờ và các ứng dụng của nó.

Mặt khác, khái niệm hội tụ Painlevé–Kuratowski (P.K.) của tập nghiệm giữ vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các bài toán liên quan đến tối ưu hóa. Khái niệm này đã được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như tối ưu hóa, lý thuyết điều khiển, giải tích biến phân, giải tích đa trị cũng như trong nhiều ứng dụng khác. Bên cạnh đó, các tính chất ổn định và đặt chỉnh của các bài toán cân bằng vectơ cũng đã được nghiên cứu trong [11], [12]. Năm 2023, Hung và Keller [5] đã nghiên cứu hệ điều khiển bài toán tựa tối ưu vectơ trong môi trường mờ. Năm 2025, Hung và Keller [13] đã nghiên cứu tính hội tụ cho bài toán điều khiển tối ưu cho trò chơi đa mục tiêu. Rất gần đây, Hung và cộng sự [10] đã nghiên cứu tính hội tụ cho bài toán tựa cân bằng mờ dạng yếu. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết tốt nhất của chúng tôi, cho đến nay chưa có công trình nào nghiên cứu về hội tụ trên của tập nghiệm đối với bài toán tựa cân bằng vectơ kiểu Stampacchia dạng mạnh trong môi trường mờ. Do đó, việc nghiên cứu sự hội tụ trên của tập nghiệm cho bài toán tựa cân bằng vectơ kiểu Stampacchia dạng mạnh trong môi trường mờ đang là vấn đề mở và thú vị.

Tiếp theo, tác giả sẽ nhắc lại một số định nghĩa sẽ được sử dụng trong phần tiếp theo.

Định nghĩa 1.2. (Xem [14]) Cho không gian định chuẩn X , dãy tập $\{D_n\}, D_n \subset X$ được gọi là *hội tụ trên* (tương ứng, *hội tụ dưới*) đến D theo nghĩa của Painlevé–Kuratowski nếu;

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_n \subset D \text{ (tương ứng, } D \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} D_n).$$

Dãy $\{D_n\}$ được gọi là hội tụ đến D theo nghĩa Painlevé–Kuratowski (P.K.) nếu;

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_n \subset D \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} D_n,$$

với,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_n := \{x \in X \mid \exists n_k \rightarrow \infty, \exists x_{n_k} \in D_{n_k} \text{ sao cho } x_{n_k} \rightarrow x\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_n := \{x \in X \mid \forall n_k \rightarrow \infty, \exists x_{n_k} \in D_{n_k} \text{ sao cho } x_{n_k} \rightarrow x\}.$$

Định nghĩa 1.3. (Xem [14]) Cho $S : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và $S_n : X \rightrightarrows Y$ là dãy ánh xạ đa trị. Dãy $\{S_n\}$ được gọi là *hội tụ liên tục ngoài* (tương ứng, *hội tụ liên tục trong*) đến S tại x_0 nếu $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) \subset S(x_0)$ (tương ứng,

$S(x_0) \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n)$) với mọi $x_n \rightarrow x_0$. Dãy $\{S_n\}$ được gọi là *hội tụ liên tục* đến S tại x_0 nếu $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) \subset S(x_0) \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n)$ với mọi $x_n \rightarrow x_0$.

Nếu $\{S_n\}$ *hội tụ liên tục* đến S tại mọi $x_0 \in X$, thì ta nói rằng $\{S_n\}$ *hội tụ liên tục* đến S trên X .

Định nghĩa 1.4. (Xem [14]) Dãy ánh xạ $\{f_n\}$, với $f_n : X \rightarrow Y$ được gọi là *hội tụ liên tục* đến ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ tại x_0 nếu,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0), \quad \forall x_n \rightarrow x_0.$$

Nếu $\{f_n\}$ *hội tụ liên tục* đến f tại mọi $x_0 \in X$, thì ta nói rằng $\{f_n\}$ *hội tụ liên tục* đến f trên X .

2. Kết quả chính

Trước hết, định nghĩa các ánh xạ đa trị $\tilde{S}$ và $\tilde{Q}$ thông qua các ánh xạ mờ $S : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ và $Q : X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ như sau:

$$\tilde{S} : X \rightrightarrows X, \quad x \mapsto S(x)_{a(x)}, \quad \forall x \in X,$$

$$\tilde{Q} : X \rightrightarrows Z, \quad x \mapsto Q(x)_{b(x)}, \quad \forall x \in X.$$

Với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, các dãy ánh xạ đa trị $\tilde{S}_n$ và $\tilde{Q}_n$ thông qua các dãy ánh xạ mờ $S_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ và $Q_n : X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ như sau:

$$\tilde{S}_n : X \rightrightarrows X, \quad x \mapsto S_n(x)_{a_n(x)}, \quad \forall x \in X,$$

$$\tilde{Q}_n : X \rightrightarrows Z, \quad x \mapsto Q_n(x)_{b_n(x)}, \quad \forall x \in X.$$

Ký hiệu $\Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$ và $\Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n)$ lần lượt là các

tập nghiệm của các bài toán (SVQEP) và $(SVQEP)_n$, tương ứng. Chúng tôi giả thiết rằng $\Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$ và $\Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n)$ khác rỗng.

Tiếp theo, thiết lập tính hội tụ trên của tập nghiệm đối với các bài toán tựa cân bằng vectơ mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ cho bài toán (SVQEP) và $(SVQEP)_n$.

Định lý 2.1. Cho $\mathcal{X}, Y, \mathcal{Z}$ là ba không gian Banach, $X \subset \mathcal{X}, Z \subset \mathcal{Z}$ là các tập con khác rỗng, và C là nón lồi, đóng trong Y sao cho $\text{int} C \neq \emptyset$. Cho $S: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q: X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ là các ánh xạ mờ, $f: X \times Z \times X \rightarrow Y$ là hàm vectơ, và hàm $a, b: X \rightarrow (0, 1]$. Cho các dãy ánh xạ mờ $S_n: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q_n: X \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ và các dãy hàm $f_n: X \times Z \times X \rightarrow Y$, $a_n, b_n: X \rightarrow (0, 1]$, với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, f_n hội tụ liên tục đến f . Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $\tilde{S}_n$ hội tụ liên tục đến $\tilde{S}$ với giá trị compact, trong đó các ánh xạ đa trị $\tilde{S}_n, \tilde{S}$ được xác định bởi $\tilde{S}(x) = S(x)_{a(x)}$, $\tilde{S}_n(x) = S_n(x)_{a_n(x)}$, $\forall x \in X$;

(ii) $\tilde{Q}_n$ hội tụ liên tục ngoài đến $\tilde{Q}$ với giá trị compact, trong đó các ánh xạ đa trị $\tilde{Q}_n$ và $\tilde{Q}$ được xác định bởi $\tilde{Q}(x) = Q(x)_{b(x)}$, $\tilde{Q}_n(x) = Q_n(x)_{b_n(x)}$, $\forall x \in X$;

Khi đó, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) \subset \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$.

Chứng minh. Để chứng minh $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) \subset \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$, ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) \not\subset \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n)$ nhưng $x_0 \notin \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$. Với $x_0 \in \limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n)$, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k}\} \subset \Psi^{n_k}(\tilde{S}_{n_k}, \tilde{Q}_{n_k}, f_{n_k})$ sao cho $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Khi đó, tồn tại $z_{n_k} \in \tilde{Q}_{n_k}(x_{n_k})$ sao cho,

$$f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y) \in C, \quad \forall y \in \tilde{S}_{n_k}(x_{n_k}).$$

Do $\tilde{S}_{n_k}$ hội tụ liên tục ngoài đến $\tilde{S}$ với giá trị compact, nên ta có $x_0 \in \tilde{S}(x_0)$. Chúng ta sẽ chứng minh $x_0 \in \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$. Nếu $x_0 \notin \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$, khi đó với mọi $z_0 \in \tilde{Q}(x_0)$ tồn tại $y_0 \in \tilde{S}(x_0)$ sao cho,

$$f(x_0, z_0, y_0) \notin C. \quad (1)$$

Với $\tilde{S}_{n_k}$ hội tụ liên tục trong đến $\tilde{S}$ với giá trị compact, nên với mọi $y_0 \in \tilde{S}(x_0)$, tồn tại $y_{n_k} \in \tilde{S}_{n_k}(x_{n_k})$, sao cho

$y_{n_k} \rightarrow y_0$ với $k \rightarrow \infty$. Vì $x_{n_k} \in \Psi^{n_k}(\tilde{S}_{n_k}, \tilde{Q}_{n_k}, f_{n_k})$, ta có

$$f_{n_k}(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}) \in C \quad (2)$$

Từ giả thiết rằng f_{n_k} hội tụ liên tục đến f và $(x_{n_k}, z_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (x_0, z_0, y_0)$, từ (2) suy ra

$$f(x_0, z_0, y_0) \in C,$$

nghĩa là, $x_0 \in \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$. Điều này mâu thuẫn với (1). Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng điều kiện $\tilde{S}_n$ hội tụ liên tục đến $\tilde{S}$ trong Định lý 2.1 cần thiết.

Ví dụ 2.2. Cho $\mathcal{X} = Y = \mathcal{Z} = \mathbb{R}$, $X = Z = [-1, 1]$, $C = [0, +\infty)$ và $S, S_n: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q, Q_n: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ các ánh xạ mờ và $f, f_n: X \times Z \times X \rightarrow Y$ được cho bởi,

$$\mu_{S(x)}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{khi } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{khi } |t| > 1. \end{cases}$$

$$\mu_{S_n(x)}(t) = \begin{cases} 1 - \left| t - \frac{(-1)^n}{2} \right|, & \left| t - \frac{(-1)^n}{2} \right| \leq 1, \\ 0, & \left| t - \frac{(-1)^n}{2} \right| > 1. \end{cases}$$

$$\mu_{Q(x)}(t) = \mu_{Q_n(x)}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{khi } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{khi } |t| > 1. \end{cases}$$

$$f(x, z, y) = f_n(x, z, y) = y + x - z.$$

Các ánh xạ $a, a_n: [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ được định nghĩa bởi

$$a(x) = a_n(x) = \frac{1}{2} \text{ và } b, b_n: [-1, 1] \rightarrow (0, 1] \text{ được xác định}$$

$$b(x) = b_n(x) = \frac{1}{2}. \text{ Khi đó, với mọi } x \in [-1, 1], \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x) &= S(x)_{a(x)} = \{t \in [-1, 1] \mid \mu_{S(x)}(t) \geq a(x)\} \\ &= \{t \in [-1, 1] \mid 1 - |t| \geq \frac{1}{2}\} \cup \{t \notin [-1, 1] \mid 0 \geq \frac{1}{2}\} \\ &= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup \emptyset = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

- Nếu n chẵn thì

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(x) &= S_n(x)_{a_n(x)} = \{t \in [-1, 1] \mid \mu_{S_n(x)}(t) \geq a_n(x)\} \\ &= \left\{ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], 1 - \left| t - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], 0 \geq \frac{1}{2} \right\} = [0, 1] \cup \emptyset = [0, 1]. \end{aligned}$$

- Nếu n lẻ thì

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(x) &= S_n(x)_{a_n(x)} = \{t \in [-1, 1] \mid \mu_{S_n(x)}(t) \geq a_n(x)\} \\ &= \left\{ t \in \left[-1, \frac{1}{2} \right], 1 - \left| t + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ t \notin \left[-1, \frac{1}{2} \right], 0 \geq \frac{1}{2} \right\} \\ &= [-1, 0] \cup \emptyset = [-1, 0], \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x) &= \tilde{Q}_n(x) = Q(x)_{b(x)} = Q_n(x)_{b_n(x)} \\ &= \left\{ t \in [-1, 1], \mu_{Q(x)}(t) \geq b(x) \right\} \\ &= \left\{ t \in [-1, 1], \mu_{Q_n(x)}(t) \geq b_n(x) \right\} \\ &= \left\{ t \in [-1, 1], 1 - |t| \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ t \notin [-1, 1], 0 \geq \frac{1}{2} \right\} \\ &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cup \emptyset = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].\end{aligned}$$

Tính toán trực tiếp, ta có $\Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$,

nếu n chẵn thì $\Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) = \left[0, \frac{1}{2} \right]$, nếu n lẻ thì

$$\Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) = \left[-1, -\frac{1}{2} \right].$$

Chúng ta dễ dàng thấy rằng, f_n hội tụ liên tục đến f , $\tilde{Q}_n$ hội tụ liên tục ngoài đến $\tilde{Q}$. Nhưng kết quả Định lý 2.1 không xác định, vì $\tilde{S}_n$ không hội tụ liên tục đến $\tilde{S}$.

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng, điều kiện $\tilde{Q}_n$ hội tụ liên tục ngoài đến $\tilde{Q}$ của Định lý 2.1 thiết yếu.

Ví dụ 2.3. Cho $\mathcal{X} = Y = \mathcal{Z} = \mathbb{R}, X = Z = [-1, 1], C = [0, +\infty)$ và $S, S_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q, Q_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ các ánh xạ mờ và $f, f_n : X \times Z \times X \rightarrow Y$ được cho bởi,

$$\mu_{S(x)}(t) = \mu_{S_n(x)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{khi } t \in [0, 1], \\ 0, & \text{khi } t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

$$\mu_{Q(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{khi } t = 1, \\ 0, & \text{khi } t \neq 1. \end{cases}$$

$$\mu_{Q_n(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{khi } t = -1, \\ 0, & \text{khi } t \neq -1. \end{cases}$$

$$f(x, z, y) = z(y - x),$$

$$f_n(x, z, y) = \left(1 + \frac{1}{7n} \right) z(y - x).$$

Các ánh xạ $a, a_n; [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ được định nghĩa bởi

$a(x) = a_n(x) = \frac{1}{2}$ và $b, b_n; [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ được xác định

$b(x) = \frac{1}{3}, b_n(x) = \frac{1}{5}$. Khi đó, với mọi $x \in [-1, 1]$, ta có

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x) &= Q(x)_{b(x)} = \left\{ t \in [-1, 1] \mid \mu_{Q(x)}(t) \geq b(x) \right\} \\ &= \left\{ t = 1, \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ t \in [-1, 1], 0 \geq \frac{1}{3} \right\} = \{1\}.\end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n(x) &= Q_n(x)_{b_n(x)} = \left\{ t \in [-1, 1] \mid \mu_{Q_n(x)}(t) \geq b_n(x) \right\} \\ &= \left\{ t = -1, \frac{1}{3} \geq \frac{1}{5} \right\} \cup \left\{ t \notin [-1, 1], 0 \geq \frac{1}{5} \right\} = \{-1\}.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) &= \tilde{S}_n(x) = S(x)_{a(x)} = S_n(x)_{a_n(x)} \\ &= \left\{ t \in [-1, 1] \mid \mu_{S(x)}(t) \geq a(x) \right\} \\ &= \left\{ t \in [-1, 1] \mid \mu_{S_n(x)}(t) \geq a_n(x) \right\} \\ &= \left\{ t \in [0, 1], 1 \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ t \in [-1, 0], 0 \geq \frac{1}{2} \right\} = [0, 1].\end{aligned}$$

Tính toán trực tiếp, ta có $\Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f) = \{0\}$, $\Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) = \{1\}$. Do đó,

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) = \{1\} \not\subset \{0\} = \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$. Dễ dàng chỉ ra rằng, các điều kiện của Định lý 2.1 thỏa mãn, trừ điều kiện $\tilde{Q}_n$ hội tụ liên tục ngoài đến $\tilde{Q}$, vì $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}_n(x) = \{-1\} \not\subset \{1\} = \tilde{Q}(x)$.

Tiếp theo, tác giả đưa ra một ví dụ thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.1.

Ví dụ 2.4. Cho $\mathcal{X} = Y = \mathcal{Z} = \mathbb{R}, X = Z = [-1, 1], C = [0, +\infty)$ và $S, S_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $Q, Q_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ các ánh xạ mờ và $f, f_n : X \times Z \times X \rightarrow Y$ được cho bởi,

$$\mu_{S(x)}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{khi } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{khi } |t| > 1. \end{cases}$$

$$\mu_{S_n(x)}(t) = \begin{cases} 1 - |t| + \frac{1}{n}, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

$$\mu_{Q(x)}(t) = \mu_{Q_n(x)}(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{khi } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{khi } |t| > 1. \end{cases}$$

$$f(x, z, y) = z + y - x,$$

$$f_n(x, z, y) = z + y - x - \frac{1}{n}.$$

Các ánh xạ $a, a_n; [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ được định nghĩa bởi

$a(x) = a_n(x) = \frac{1}{2}$ và $b, b_n; [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ được xác định

$b(x) = b_n(x) = \frac{1}{2}$. Khi đó, với mọi $x \in [-1, 1]$, ta có

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) &= S(x)_{a(x)} = \{t \in [-1, 1] \mid \mu_{S(x)}(t) \geq a(x)\} \\ &= \left\{ t \in [-1, 1], 1 - |t| \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ t \notin [-1, 1], 0 \geq \frac{1}{2} \right\} \\ &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cup \emptyset = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_n(x) &= S_n(x)_{a_n(x)} = \{t \in [-1, 1] \mid \mu_{S_n(t)} \geq a_n(x)\} \\
&= \left\{t \in [-1, 1], 1 - |t| + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{t \notin [-1, 1], 0 \geq \frac{1}{2}\right\} \\
&= \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \cup \emptyset = \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right],
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(x) &= \tilde{Q}_n(x) = Q(x)_{b(x)} = Q_n(x)_{b_n(x)} \\
&= \{t \in [-1, 1], \mu_{Q(x)}(t) \geq b(x)\} \\
&= \{t \in [-1, 1], \mu_{Q_n(x)}(t) \geq b_n(x)\} \\
&= \left\{t \in [-1, 1], 1 - t^2 \geq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{t \notin [-1, 1], 0 \geq \frac{1}{2}\right\} \\
&= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \emptyset = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

Tính toán trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned}
\Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f) &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right], \\
\Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) &= \left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{2}{n}\right].
\end{aligned}$$

Nên

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right] = \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f).$$

Để dàng kiểm tra tất cả các giả thuyết trong Định lý 2.1 thỏa mãn.

Nhận xét 2.5. Định lý 2.1 thiết lập các điều kiện đủ để bảo đảm tính hội tụ trên của tập nghiệm đối với bài toán tựa cân bằng vectơ mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ. Tuy nhiên, các giả thiết của định lý không hẳn là các điều kiện cần. Ví dụ 2.6 dưới đây minh họa nhận xét này.

Ví dụ 2.6. Cho $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $C = [0, +\infty)$, $\tilde{S}(x) = \{0\}$, $\tilde{S}_n(x) = \{0, 1\}$, $\tilde{Q}(x) = \tilde{Q}_n(x) = \{0\}$, $f(x, z, y) = f_n(x, z, y) = 1$.
Rõ ràng $\tilde{S}_n$ không liên tục đến $\tilde{S}$, vì với mọi dãy $x_n \rightarrow x_0$, lấy $y_n = 1 \in \tilde{S}_n(x_n)$, thì $y_n \rightarrow 1 \notin \tilde{S}(x_0) = \{0\}$.
Do đó, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n(x_n) \not\subset \tilde{S}(x_0)$. Nên điều kiện (i) vi phạm. Ta có, $x \in \tilde{S}_n(x) = \{0, 1\}$, và tồn tại $z = 0$ sao cho với mọi $y \in (0, 1)$, $f_n(x, z, y) = 1$, luôn đúng. Nên $\Psi_n = \{0, 1\}$.
Với $\tilde{S}(x) = \{0\}$, điều kiện $x \in \tilde{S}(x)$.
Nên $\Psi(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) = \{0\}$. Khi đó,
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\tilde{S}_n, \tilde{Q}_n, f_n) \subset \Psi(\tilde{S}, \tilde{Q}, f)$.

3. Ứng dụng

Bài toán tựa cân bằng vectơ kiểu Stampacchia dạng mạnh trong môi trường mờ có nhiều ứng dụng như bài toán tối ưu, bài toán mạng giao thông, bài toán kinh tế và nhiều bài toán khác, trong mục này đề minh họa cho phần ứng

dụng, tác giả chỉ xét cho trường hợp bài toán tối ưu trong môi trường mờ như là một ví dụ.

Giả sử $\mathcal{X}, Y, C, S, X$ và a như trong Mục 1. Xét hàm vectơ $p : X \rightarrow Y$. Chúng tôi thiết lập mô hình bài toán tối ưu trong môi trường mờ như sau:

$$(\text{FQVOP}) \begin{cases} \min_C p(x), \\ \text{sao cho } x \in S(x)_{a(x)}. \end{cases}$$

Tức là, tìm $x \in X$ sao cho $x \in S(x)_{a(x)}$ và

$$p(y) - p(x) \in C, \quad \forall y \in S(x)_{a(x)}.$$

Giả sử $S_n, \tilde{S}$ và a_n như trong Mục 1. Xét dãy hàm vectơ $p_n : X \rightarrow Y$. Tác giả xét dãy bài toán tối ưu trong môi trường mờ sau:

$$(\text{FQVOP})_n : \begin{cases} \min_C p_n(x), \\ \text{sao cho } x \in S_n(x)_{a_n(x)}. \end{cases}$$

Tức là, tìm $x \in X$ sao cho $x \in S_n(x)_{a_n(x)}$ và

$$p_n(y) - p_n(x) \in C, \quad \forall y \in S_n(x)_{a_n(x)},$$

Tác giả ký hiệu tập nghiệm của các bài toán (FQVOP) và $(\text{FQVOP})_n$ lần lượt bởi $\Pi(T, p)$ và $\Pi_n(T_n, p_n)$, tương ứng, tức là

$$\begin{aligned}
\Pi(T, p) &:= \{x \in X \cap S(x)_{a(x)} \mid p(y) - p(x) \in C, \forall y \in S(x)_{a(x)}\}, \\
\Pi_n(T_n, p_n) &:= \{x \in X \cap S_n(x)_{a_n(x)} \mid p_n(y) - p_n(x) \in C, \forall y \in S_n(x)_{a_n(x)}\}.
\end{aligned}$$

Khi đó, tập nghiệm của bài toán (FQVOP) và $(\text{FQVOP})_n$ được viết $\Pi(\tilde{S}, p)$ và $\Pi_n(\tilde{S}_n, p_n)$, tương ứng và giả sử $\Pi(\tilde{S}, p)$ và $\Pi_n(\tilde{S}_n, p_n)$, khác rỗng.

Sau đây, tác giả thiết lập tính hội tụ trên của tập nghiệm đối với các bài toán tối ưu trong môi trường mờ (FQVOP) và $(\text{FQVOP})_n$.

Định lý 3.1. Cho $\mathcal{X}, Y$ là các không gian Banach, $X \subset \mathcal{X}$, là tập con khác rỗng, và C là nón lồi, đóng trong Y sao cho $\text{int } C \neq \emptyset$. Cho $S : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ là ánh xạ mờ, và $p : X \times X \rightarrow Y$ là hàm vectơ, và hàm $a : X \rightarrow (0, 1]$. Cho các dãy ánh xạ mờ $S_n : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, và các dãy hàm $p_n : X \times X \rightarrow Y$, $a_n : X \rightarrow (0, 1]$, với $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, p_n hội tụ liên tục đến p và $\tilde{S}_n$ hội tụ liên tục đến $\tilde{S}$ với giá trị compact. Khi đó, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(\tilde{S}_n, p_n) \subset \Pi(\tilde{S}, p)$.

Chứng minh: Đặt $a(x) = b(x)$, $a_n(x) = b_n(x)$, $S(x) = Q(x)$, $S_n(x) = Q_n(x)$, và $f(x, z, y) = p(y) - p(x)$ $f_n(x, z, y) = p_n(y) - p_n(x)$. Khi đó, bài toán tựa cân bằng vectơ mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ (SVQEP) và $(\text{SVQEP})_n$ trở thành bài toán tối ưu trong môi trường mờ (FQVOP) và $(\text{FQVOP})_n$. Khi đó, tất cả các điều kiện của Định lý 2.1 thỏa mãn. Do đó, ta có điều phải chứng minh. $\square$

4. Kết luận

Trong bài báo này, đầu tiên, tác giả thiết lập bài toán tựa cân bằng véctor mạnh kiểu Stampacchia trong môi trường mờ. Sau đó, nghiên cứu các điều kiện đủ cho tính hội tụ trên của tập nghiệm cho bài toán này. Các kết quả cho bài toán tựa cân bằng véctor mạnh kiểu Stampacchia dạng mạnh trong môi trường mờ có rất nhiều ứng dụng trong thực tế như: bài toán tối ưu, bài toán mạng giao thông, bài toán kinh tế và nhiều bài toán khác, trong bài báo này, tác giả chỉ xét cho trường hợp bài toán tối ưu trong môi trường mờ như là một ví dụ minh họa. Bên cạnh đó, vẫn còn nhiều chủ đề thú vị mà tác giả sẽ nghiên cứu trong tương lai chẳng hạn như bài toán tối ưu ngẫu nhiên và các ứng dụng liên quan. Như đã trình bày trong phần giới thiệu, các kết quả nhận được trong bài báo là mới và khác với các kết quả đã tồn tại.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông. Mã số: 13-2026-HV-CB2.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. A. Noor, "Variational inequalities for fuzzy mappings (III)", *Fuzzy sets and Systems*, vol. 331, pp. 68–77, 2018.
- [2] G. J. Tang, T. Zhao, Z. P. Wan and D. X. He, "Existence results of a perturbed variational inequality with a fuzzy mapping", *Fuzzy sets and Systems*, vol. 331, pp. 68–77, 2018.
- [3] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.
- [4] S. S. Chang and Y. G. Zhu, "On variational inequalities for fuzzy mappings", *Fuzzy sets and Systems*, vol. 32, pp. 359–367, 1989.
- [5] N. V. Hung and A. A. Keller, "Generalized well-posedness for parametric fuzzy generalized multiobjective games", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 422, 114917, 2023.
- [6] N. V. Hung and A. A. Keller, "Existence results and equilibrium stability conditions to fuzzy n-player generalized multiobjective games with application to economic equilibrium models", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 439, 115587, 2024.
- [7] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, New York, Academic, 1980.
- [8] N. V. Hung, "On semi-continuity and continuity of solution maps of parametric generalized multiobjective games in fuzzy environments", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 457, 116303, 2025.
- [9] N. V. Hung and A. A. Keller, "Painlevé-Kuratowski convergence of the solution sets for controlled systems of fuzzy vector quasi-optimization problems with application to controlling traffic networks under uncertainty", *Computational and Applied Mathematics*, vol. 40, pp. 1–21, 2021.
- [10] N. V. Hung, N. H. V. Duy, J. C. Yao and S. Zeng, "Convergence analysis of solutions to fuzzy weak vector quasi-equilibrium problems and applications", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 848, 117502, 2026.
- [11] P.T. Kieu and N.V. Hung, "On the stability of solution mappings for parametric strong vector quasi-equilibrium problems and application", *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, vol. 18, no. 3, pp. 74-77, 2020.
- [12] H.A. Tuan, N.T.K. Truc, and N.V. Hung, "Stability and Levitin-Polyak well-posedness for bilevel weak vector equilibrium problems", *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, vol. 19, no. 5.1, pp. 58-61, 2021.
- [13] N. V. Hung and A. A. Keller, "Convergence results and optimal control problems via gap functions for n -player generalized multiobjective games with applications", *Mathematische Nachrichten*, vol. 298, pp. 1989–2013, 2025.
- [14] R. T. Rockafellar and J. B. R. Wets, *Variational Analysis*, 317, Springer-Verlag, Berlin, Berlin, 1998.