ỨNG DỤNG SỐ NGUYÊN GAUSS TRONG PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

USING GAUSSIAN INTEGERS IN INTEGER SOLUTION EQUATIONS

Nguyễn Thị Sinh

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; Email: sinhsp@gmail.com

Tóm tắt: Phương trình nghiệm nguyên là một lĩnh vực rất lý thú và rất khó của Toán học, nó được đưa vào hầu hết các chương trình phổ thông với nhiều cách giải hay, độc đáo và phát huy được khả năng sáng tạo của người học. Thông qua việc giải phương trình nghiệm nguyên, ngoài việc rèn luyện kỹ năng giải phương trình, người học còn được nâng cao về mặt tư duy logic, lập luận các vấn đề chặt chẽ và rèn luyện khả năng sáng tạo. Có thể nói phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng và là tổng hợp các phương pháp giải phương trình của các cấp học như phương pháp sử dụng các tính chất số học, phương pháp phân tích, phương pháp loại trừ, phương pháp tham số hóa, phương pháp miền giá trị, phương pháp lựa chọn modulo, … Bài báo này trình bày một phương pháp mới để giải một số dạng phương trình nghiệm nguyên, đó là phương pháp sử dụng lý thuyết về số nguyên Gauss.

Từ khóa: Phương trình nghiệm nguyên; vành Gauss; số nguyên Gauss; số nguyên tố Gauss; ứng dụng số nguyên Gauss

Abstract: Integer solution equations is a very interesting and difficult field of mathematics. It is presented in high school with many exciting and unique solutions and promoting creative abilities of learners. By solving integer solution equations, the learners not only train skills to solve equations, but also improve in terms of logical thinking, argue the issues closely and practice abilities creativity. It can be said that the method of solving integer solution equations is very varied and it is synthesized by many methods of solving equations of all educational levels, such as the method of using arithmetic's properties, the method of analysing, the method of excluding, the method of parametriczation, the method of using the range of variables, the method of choosing modulo, … This article presents a new method in solving several types of integer solution equations. This is a method that uses the theory of Gaussian integers to solve integer solution equations.

Key words: Integer solution equations; the ring of Gaussian integers; Gaussian integers; Gaussian primes; application of Gaussian integers

1. Đặt vấn đề

Số nguyên Gauss xuất hiện trong nhiều lĩnh vực của toán học. Một trong những ứng dụng của số nguyên Gauss là góp phần giải một số lớp phương trình nghiệm nguyên. Trước tiên, bài báo trình bày Vành các số nguyên Gauss và những khái niệm liên quan (xem [3]).

Định nghĩa 1. *(Số nguyên Gauss)*

Số phức có dạng $a+ib$, trong đó $a,b\in Z$ được gọi là các số nguyên Gauss.

Tập tất cả các số nguyên Gauss được ký hiệu là $Z[i]$. Rõ ràng $Z\subset Z[i]$.

Dễ dàng kiểm tra được $Z[i]$ là một vành và được gọi là vành các số nguyên Gauss.

Định nghĩa 2. Cho $\alpha,\beta\in Z[i]$, trong đó $\beta\neq 0$, ta nói β chia hết α hay α chia hết cho β nếu tồn tại $\gamma\in Z[i]$ sao cho $\alpha=\gamma\beta$. Nếu β chia hết α ta nói β là một ước của α và viết $\beta\mid\alpha$ hay α là bội của β và viết $\alpha\,\vdots\,\beta$.

Một số nguyên Gauss ε được gọi là đơn vị nếu ε là ước của mọi số nguyên Gauss.

Chuẩn của một số nguyên Gauss $\alpha=a+ib$, ký hiệu là $N(\alpha)$, được xác định bởi

$$N(\alpha)=|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$$

Chuẩn $N(\alpha)$ là một số tự nhiên. $N(\alpha)=0$ khi và chỉ khi $\alpha=0$. Nếu $\alpha=\gamma\beta$ thì $N(\alpha)=N(\gamma)N(\beta)$.

Mệnh đề 1. Số nguyên Gauss ε là đơn vị khi và chỉ khi $N(\varepsilon)=1$. Tập U tất cả các đơn vị của $Z[i]$ là $U=\{\pm 1\ ,\ \pm i\}$.

Định lý 1. *(Phép chia Euclid trên vành các số nguyên Gauss)* Cho α,β là hai số nguyên Gauss bất kỳ với $\beta\neq 0$, khi đó tồn tại các số nguyên Gauss γ,δ sao cho

$$\alpha=\gamma\beta+\delta\ ,\ \ 0\le N(\delta)<N(\beta).$$

Định nghĩa 3. Cho α,β là hai số nguyên Gauss khác không.

i) α,β được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu tất cả các ước chung của α,β chỉ thuộc $\{\pm 1\ ,\ \pm i\}$.

ii) Ta nói rằng $\gamma\in Z[i]$ là ước chung lớn nhất (UCLN) của α,β và viết $(\alpha,\beta)=\gamma$ nếu γ là ước chung của α và β, đồng thời chuẩn $N(\gamma)$ có giá trị lớn nhất trong tập hợp chuẩn của tất cả các ước chung của α và β.

Định lý 3. Giả sử $(\alpha,\beta)=\gamma$. Khi đó

i) Tồn tại $\theta,\delta\in Z[i]$ sao cho $\alpha\theta+\beta\delta=\gamma$.

ii) Nếu μ là một ước chung bất kỳ của α và β thì $\mu\mid\gamma$.

Hệ quả 1. Giả sử $\delta\mid\alpha\beta$ và α,δ nguyên tố cùng nhau. Khi đó $\delta\mid\beta$.

Định nghĩa 4. (Số nguyên tố Gauss)

Một số nguyên Gauss khác đơn vị γ được gọi là số nguyên tố Gauss nếu γ không thể biểu diễn dưới dạng tích của hai số nguyên Gauss khác đơn vị.

Nếu γ không phải là số nguyên tố Gauss thì ta nói γ là một hợp số Gauss.

Định nghĩa 5. Số nguyên Gauss β được gọi là số kết hợp với số nguyên Gauss α nếu $\alpha=\varepsilon\beta$, trong đó ε là một đơn vị.

Ta nhận thấy nếu β là số kết hợp với α thì $\alpha=\varepsilon\beta$, suy ra $\beta=\overline{\varepsilon}\alpha$, do đó α cũng là số kết hợp với β. Ta nói α và β là hai số kết hợp nhau.

Bổ đề 1. Cho γ là một số nguyên tố Gauss. Nếu $\gamma \mid \alpha\beta$ thì $\gamma \mid \alpha$ hoặc $\gamma \mid \beta$.

Định lý 4. *(Định lý cơ bản của số học cho vành các số nguyên Gauss)*

Cho α là số nguyên Gauss khác không và đơn vị. Khi đó α có thể biểu diễn được dưới dạng $\alpha = \gamma_1\gamma_2...\gamma_n$, trong đó $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ là các số nguyên tố Gauss. Thêm vào đó sự biểu diễn này là duy nhất chỉ sai khác nhau thứ tự và các thừa số đơn vị.Nghĩa là nếu có hai biểu diễn

$$\alpha = \gamma_1\gamma_2...\gamma_n = \omega_1\omega_2...\omega_m$$

thì ta phải có $m = n$ và tồn tại một hoán vị σ trên tập $\{1,2,3,...,n\}$ sao cho với mọi *i*, ta có ω_i và $\gamma_{\sigma(i)}$ là hai số kết hợp nhau.

Định lý 5. Cho α và β là hai số nguyên Gauss nguyên tố cùng nhau. Giả sử

$$\alpha\beta = \gamma^k \;,\; k \geq 2 \;,\; k \in N \,.$$

Khi đó tồn tại các số nguyên Gauss α_1, β_1 và các đơn vị ε, δ sao cho

$$\alpha = \varepsilon\alpha_1^k \;,\; \beta = \delta\beta_1^k \,.$$

Định lý sau đây sẽ xác định tất cả các số nguyên tố Gauss.

Định lý 6. Cho $\gamma = a + ib$ là số nguyên Gauss khác đơn vị. Khi đó

i) Nếu $b = 0,\; a \neq 0$ thì γ là số nguyên tố Gauss khi và chỉ khi *a* là số nguyên tố thông thường dạng 4k+1.

ii) Nếu $a = 0,\; b \neq 0$ thì γ là số nguyên tố Gauss khi và chỉ khi *b* là số nguyên tố thông thường dạng 4k+1.

iii) Nếu $a \neq 0,\; b \neq 0$ thì γ là số nguyên tố Gauss khi và chỉ khi $N(\gamma) = a^2 + b^2$ là một số nguyên tố thông thường.

Mệnh đề 2. Nếu *x, y* là hai số nguyên khác tính chẵn lẻ và *(x, y) = 1* thì *x + iy* và *x – iy* là nguyên tố cùng nhau trong $Z[i]$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại số nguyên tố Gauss γ sao cho $\gamma \mid x + iy$ và $\gamma \mid x - iy$.

Suy ra $\gamma \mid 2x$ và $\gamma \mid 2iy$.

Nếu $\gamma \mid 2$ thì $N(\gamma) \mid 4$, suy ra $N(\gamma)$ chẵn. Mà $N(\gamma) \mid x^2 + y^2$ nên $x^2 + y^2$ là một số chẵn (mâu thuẫn do *x, y* khác tính chẵn lẻ).

Vậy $\gamma \mid x$ và $\gamma \mid y$. Suy ra $N(\gamma) \mid x^2$ và $N(\gamma) \mid y^2$.

Mặt khác theo định lý 6, vì γ là một số nguyên tố Gauss nên tồn tại một số nguyên tố thông thường *p* sao cho $p \mid N(\gamma)$.

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} p \mid x^2 \\ p \mid y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid x \\ p \mid y \end{cases}$$

(mâu thuẫn do *(x, y) = 1*).

Vậy *x + iy* và *x – iy* là hai số nguyên tố cùng nhau trong $Z[i]$.

2. Ứng dụng số nguyên Gauss trong phương trình nghiệm nguyên

Bài toán 2.1. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^{2n+1} = y^2 + 1, \quad n \in N^*$$

Giải. Ta nhận thấy nếu *x* chẵn thì $y^2 + 1$ chẵn, suy ra *y* lẻ.

Suy ra $y^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, điều này vô lý do $x^{2n+1} \equiv 0 \pmod 4$.

Vậy x lẻ, ychẵn. Phương trình được viết lại dưới dạng

$$x^{2n+1} = (y - i)(y + i)$$

Ta nhận thấy $y + i$ và $y - i$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên theo Định lý 5, tồn tại $a + ib \in Z[i]$ sao cho

$$y + i = (a + ib)^{2n+1} \text{ (*)}$$

(do mọi phần tử đơn vị đều là lũy thừa bậc $2n+1$của một phần tử đơn vị nào đó).

Khai triển vế phải của (*) rồi đồng nhất phần ảo hai vế, ta sẽ tìm được các giá trị nguyên *a, b*. Từ đó suy ra các nghiệm nguyên cần tìm.

Ví dụ 2.1. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^5 = y^2 + 1$$

Giải. Ta nhận thấy nếu *x* chẵn thì $y^2 + 1$ chẵn, suy ra *y* lẻ.

Suy ra $y^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, điều này vô lý do $x^5 \equiv 0 \pmod 4$.

Vậy x lẻ, ychẵn. Phương trình được viết lại dưới dạng

$$x^5 = (y - i)(y + i)$$

Ta nhận thấy $y + i$ và $y - i$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên theo Định lý 5, tồn tại $a + ib \in Z[i]$ sao cho $y + i = (a + ib)^5$ (do $1=1^5$, $-1=(-1)^5$, $i = i^5$, $-i = (-i)^5$). Từ đó suy ra

$$y + i = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) + i(5a^4b - 10a^2b^3 + b^5).$$

Đồng nhất phần ảo, ta được

$$5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 = 1$$
$$\Leftrightarrow \; b(5a^4 - 10a^2b^2 + b^4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ 5a^4-10a^2+1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ 5a^4-10a^2+1=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy $x=1,\ y=0$ là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình trên.

Với lập luận tương tự như trên, ta có kết quả sau:

Các phương trình $x^3=y^2+1$, $x^7=y^2+1$, $x^9=y^2+1$ *chỉ có nghiệm nguyên duy nhất* $(x,y)=(1,0)$.

Bài toán 2.2. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^{2n+1}=y^2+4^k;\quad n,k\in N^*$$

Giải. Ta nhận thấy *x, y* phải cùng tính chẵn lẻ.

Trường hợp 1: *x, y là các số lẻ.* Phương trình trên tương đương với

$$x^{2n+1}=(y+2^k i)(y-2^k i).$$

Do $y+2^k i$ và $y-2^k i$ là hai số nguyên tố cùng nhau (theo mệnh đề 2) nên theo Định lý 5, tồn tại $a+ib\in Z[i]$ sao cho

$$y+2^k i=(a+ib)^{2n+1} \quad (**)$$

(do mọi phần tử đơn vị đều là lũy thừa bậc $2n+1$ của một phần tử đơn vị nào đó).

Khai triển vế phải của (**) rồi đồng nhất phần ảo hai vế, ta sẽ tìm được các giá trị nguyên *a, b*. Từ đó suy ra các nghiệm nguyên cần tìm.

Trường hợp 2: *x, y là các số chẵn.* Đặt $x=2x_1,\ y=2y_1$ ta được phương trình

$$2^{2n-1}x_1^{2n+1}=y_1^2+4^{k-1}.$$

Tiếp tục nhận xét tính chẵn lẻ của x_1, y_1, nếu x_1 chẵn ta lại đặt $x_1=2x_2$, nếu y_1 chẵn ta lại đặt $y_1=2y_2$, … rồi rút gọn phương trình để tìm ra nghiệm hoặc biến đổi phương trình về dạng

$$\gamma^{2n+1}=\alpha\beta$$

trong đó α và β là hai số nguyên Gauss nguyên tố cùng nhau rồi sử dụng Định lý 5 để suy ra các nghiệm nguyên cần tìm.

Ví dụ 2.2. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^5=y^2+4$$

Giải. Ta nhận thấy *x, y* phải cùng tính chẵn lẻ.

Trường hợp 1: *x, y là các số lẻ.* Phương trình trên tương đương với

$$x^5=(y+2i)(y-2i).$$

Do $y+2i$ và $y-2i$ là hai số nguyên tố cùng nhau (mệnh đề 2) nên theo Định lý 5, tồn tại $a+ib\in Z[i]$ sao cho $y+2i=(a+ib)^5$ (do $1=1^5$, $-1=(-1)^5$, $i=i^5$, $-i=(-i)^5$). Từ đó suy ra

$$y+2i=(a^5-10a^3b^2+5ab^4)+i(5a^4b-10a^2b^3+b^5)$$

Đồng nhất phần ảo, ta được

$$5a^4b-10a^2b^3+b^5=2$$

$$\Leftrightarrow b(5a^4-10a^2b^2+b^4)=2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |b|=1 \\ |5a^4-10a^2+1|=2 \end{cases} \\ \begin{cases} |b|=2 \\ |5a^4-40a^2+16|=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Bằng phép giải phương trình trùng phương thông thường ta nhận thấy các hệ phương trình trên đều không có nghiệm nguyên.

Trường hợp 2: *x, y là các số chẵn.* Đặt $x=2x_1,\ y=2y_1$ ta được phương trình

$$8x_1^5=y_1^2+1.$$

Do $8x_1^5\equiv 0 \pmod 4$ nên y_1^2+1 là số chẵn hay y_1 lẻ. Suy ra $y_1^2+1\equiv 2 \pmod 4$ (mâu thuẫn).

Vậy phương trình trên vô nghiệm.

Ví dụ 2.3. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^5=y^2+16$$

Giải. Ta nhận thấy *x, y* phải cùng tính chẵn lẻ.

Trường hợp 1: *x, y là các số lẻ.* Phương trình trên tương đương với

$$x^5=(y+4i)(y-4i)$$

Do *y* lẻ nên $y+4i$ và $y-4i$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Vì thế theo Định lý 5, tồn tại $a+ib\in Z[i]$ sao cho $y+4i=(a+ib)^5$ (do $1=1^5$, $-1=(-1)^5$, $i=i^5$, $-i=(-i)^5$). Từ đó suy ra

$$y+4i=(a^5-10a^3b^2+5ab^4)+i(5a^4b-10a^2b^3+b^5)$$

Đồng nhất phần ảo, ta được

$$5a^4b-10a^2b^3+b^5=4$$

$$\Leftrightarrow\ b(5a^4-10a^2b^2+b^4)=4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |b|=1 \\ |5a^4-10a^2+1|=4 \end{cases} \\ \begin{cases} |b|=2 \\ |5a^4-40a^2+16|=2 \end{cases} \\ \begin{cases} |b|=4 \\ |5a^4-160a^2+256|=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=1 \end{cases} \ hay\ \begin{cases} x=2 \\ y=\pm 4 \end{cases}$$

Trường hợp này không nhận nghiệm vì *x, y* là các số lẻ.

Trường hợp 2: *x, y là các số chẵn.*

Đặt $x=2x_1,\ y=2y_1$ ta được phương trình mới

$$8x_1^{\ 5}=y_1^{\ 2}+4$$

Ta thấy y_1 phải là số chẵn nên tiếp tục đặt $y_1=2y_2$ và phương trình trở thành

$$2x_1^{\ 5}=y_2^{\ 2}+1$$

Lại do VT là số chẵn nên y_2 lẻ, từ đó suy ra x_1 cũng phải là số lẻ. Phương trình được viết lại như sau

$$-i(i+1)^2x_1^{\ 5}=(y_2+i)(y_2-i)$$

$$\Leftrightarrow (-ix_1)^5=\frac{y_2+i}{i+1}.\frac{y_2-i}{i+1}$$

Ta chứng minh $(y_2+i,y_2-i)=i+1$. Thật vậy ta có $i+1$ là ước chung của y_2+i và y_2-i bởi vì

$$y_2+i=(i+1)\left(\frac{y_2+1}{2}+i\frac{1-y_2}{2}\right),$$

$$y_2-i=(i+1)\left(\frac{y_2-1}{2}-i\frac{1+y_2}{2}\right).$$

Giả sử tồn tại $\gamma\in Z[i]$ sao cho $\gamma\,|\,y_2+i$, $\gamma\,|\,y_2-i$. Suy ra $\gamma\,|\,2i$, hay $N(\gamma)\,|\,4$. Suy ra $N(\gamma)$ là số chẵn. Mặt khác $N(\gamma)\,|\,y_2^2+1$, vậy nên $N(\gamma)\,|\,(4,y_2^2+1)$.

Do y_2 lẻ nên $(4,y_2^2+1)=2$. Suy ra $N(\gamma)\,|\,2=N(i+1)$. Điều này chứng tỏ $i+1$ là ước chung lớn nhất của y_2+i và y_2-i.

Từ đó suy ra $\frac{y_2+i}{i+1}$ và $\frac{y_2-i}{i+1}$ là hai số nguyên Gauss nguyên tố cùng nhau. Theo Định lý 5, tồn tại $\delta\in Z[i]$ sao cho $\frac{y_2+i}{i+1}=\delta^5$.

Lại có

$$y+4i=4(y_2+i)=-(i+1)^4(y_2+i)$$

$$=-(i+1)^5\frac{y_2+i}{i+1}=\left[\delta(-i-1)\right]^5$$

Như vậy $y+4i$ cũng là lũy thừa bậc năm của một số nguyên Gauss. Với những lập luận như trong trường hợp 1, ta suy ra $(x,y)=(2,\pm 4)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(2,4)$ và $(2,-4)$.

3. Kết luận

Tóm lại, bài báo đã đưa ra hướng giải quyết bài toán tìm nghiệm nguyên của các phương trình dạng

$$x^{2n+1}=y^2+4^k\ ;\ n,k\in N;\ n\geq 1.$$

Từ đó ta có thể sáng tạo ra một số bài tập về nghiệm nguyên như sau:

Bài 1. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình*

$$x(x^2+3x+3)-y(y-2)=4$$

Bài 2. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^6+9x^5+27x^4+27x^3-64=y^2$$

Bài 3. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình*

$$x(x+1)(x+4)(x+5)=y^6-20$$

Hướng dẫn: Biến đổi đưa các phương trình trên về một trong số các dạng phương trình đã được trình bày trong phần 2, từ đó suy ra các nghiệm nguyên cần tìm.

Chú ý: Đối với bài toán tìm nghiệm nguyên của các phương trình $x^{2n}=y^2+k\ ;\ n\in N;\ k\in Z;\ n\geq 1$ ta biến đổi phương trình về dạng

$$\left(x^n-y\right)\left(x^n+y\right)=k$$

rồi tìm nghiệm nguyên thông qua việc giải các hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^n-y=a \\ x^n+y=b \\ a.b=k\ ;a,b\in Z \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Võ Đại Mau, *Chuyên đề số học*, NXB trẻ, 1993.

[2] Nguyễn Vũ Thanh, *Chuyên đề bồi dưỡng số học,* NXB Tiền Giang, 1992.

[3] Đặng Hùng Thắng, *Số nguyên Gauss và ứng dụng của nó trong lý thuyết số,* Một số chuyên đề Toán chọn lọc, trường hè 2006.

[4] Nguyễn Chu Gia Vượng, *Vành các số nguyên Gauss và ứng dụng Diophante*, Một số chuyên đề Toán Olympiad của Viện toán, 2010.

(BBT nhận bài: 15/01/2014, phản biện xong: 26/02/2014)