

TÔ MÀU DANH SÁCH CỦA ĐỒ THỊ TÁCH CỤC

LIST COLORING OF SPLIT GRAPHS

Lê Xuân Hùng

Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội; lxhung@hunre.edu.vn

Tóm tắt - Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đồ thị tách cực nếu tồn tại phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con của G cảm sinh trên I là đồ thị rỗng và đồ thị con của G cảm sinh trên K là đồ thị đầy đủ. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa vào năm 1977 bởi S. Foldes và P.L. Hammer. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan các vấn đề tổ hợp và khoa học máy tính như bài toán đóng gói và xếp ba lô trong quy hoạch nguyên, lý thuyết matroid, nghiên cứu hàm Boolean, giải quyết việc xử lý song song trong các chương trình máy tính và xác định công việc trong hệ phân tán,... Một trong những vấn đề chủ yếu trong lý thuyết đồ thị là bài toán tô màu đồ thị. Bài báo này sẽ tổng quát hóa các khái niệm về tô màu đã được nghiên cứu từ trước, đặc biệt là xác định sắc số danh sách đối với đồ thị tách cực.

Từ khóa - đồ thị tách cực; tô màu đỉnh (tô màu); sắc số; tô màu danh sách đỉnh (tô màu danh sách); sắc số danh sách đỉnh (sắc số danh sách).

1. Đặt vấn đề

Tất cả các đồ thị được nói tới trong bài báo này là những đơn đồ thị hữu hạn, vô hướng, không có khuyên và không có cạnh bội. Nếu G là một đồ thị, thì $V(G)$ (hoặc V) được gọi là *tập đỉnh* và $E(G)$ (hoặc E) được gọi là *tập cạnh*. Tập hợp tất cả các đỉnh là hàng xóm của tập con $S \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $N_G(S)$ (hoặc $N(S)$). Với mỗi đỉnh $v \in V(G)$, ta gọi $|N_G(v)|$ là bậc của đỉnh v , ký hiệu là $\deg_G(v)$ (hoặc $\deg(v)$). Đồ thị con của G cảm sinh trên tập $U \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $G[U]$. Ngoài ra, một số khái niệm và ký hiệu khác được định nghĩa trong [1].

Đồ thị $G = (V, E)$ có cấp $|V(G)| = n$ và cỡ $|E(G)| = 0$ được gọi là đồ thị rỗng, ký hiệu là O_n .

Đồ thị $G = (V, E)$ có cấp $|V(G)| = n$ và cỡ $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2}$ được gọi là đồ thị đầy đủ cấp n , ký hiệu là K_n .

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị tách cực* nếu tồn tại một phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con

$G[I]$ là đồ thị rỗng và đồ thị con $G[K]$ là đồ thị đầy đủ. Chúng ta ký hiệu đồ thị tách cực là $S(I \cup K, E)$. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa đầu tiên vào năm 1977 bởi Foldes và Hammer [5]. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan nhiều đến các vấn đề về tổ hợp và khoa học máy tính như bài toán đóng gói và xếp ba lô trong quy hoạch nguyên [3], lý thuyết matroid [6], nghiên cứu hàm Boolean [10], giải quyết việc xử lý song song trong các chương trình máy tính [7] và xác định công việc trong hệ phân tán [8],...

Abstract - A graph $G = (V, E)$ is called a split graph if there exists a partition $V = I \cup K$ so that the subgraphs of G induced by I and K are empty and complete respectively. The notion of split graphs was introduced in 1977 by S. Foldes and P.L. Hammer. These graphs have been paid much attention to because they have connection with packing and knapsack problems, with the matroid theory, with Boolean function, with the analysis of parallel processes in computer programming and with the task allocation in distributed systems,... One of the fundamentals in graph theory is the problem of graph colorings. In this paper, we take a look at a relatively recent generalization of the concepts of coloring studied so far. In particular we will determine list-chromatic number for split graphs.

Key words - Split graph; vertex coloring (coloring); chromatic number; list coloring; list-chromatic number

Giả sử G là một đồ thị và λ là một số nguyên dương. Một ánh xạ $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ được gọi là λ -*tô màu* (λ -*coloring*) của đồ thị G , nếu với mỗi cặp đỉnh u, v kề nhau trong G ta luôn có $f(u) \neq f(v)$. Số λ nhỏ nhất để đồ thị G có λ -tô màu được gọi là *sắc số* (*chromatic number*) của đồ thị G và được ký hiệu là $\chi(G)$. Đồ thị G được gọi là *k-sắc* nếu $\chi(G) = k$.

Vấn đề tô màu danh sách được đề cập đến bởi R. Diestel (xem [4]). Cho đồ thị $G = (V, E)$, với mỗi đỉnh $v \in V$ ta cho một danh sách các màu S_v . Nếu c là tô màu đỉnh của G thỏa mãn $c(v) \in S_v$ với mọi $v \in V$ thì ta gọi c là *tô màu danh sách đỉnh* (hay *tô màu danh sách*) từ các danh sách S_v . Đồ thị G được gọi là *k-tô màu danh sách* (*k-list-colorable*) nếu với mọi họ $(S_v)_{v \in V}$ thỏa mãn $|S_v| = k$ với mọi $v \in V$, ta luôn có một tô màu đỉnh từ các danh sách S_v . Số nguyên dương k nhỏ nhất để đồ thị G là *k-tô màu danh sách* được gọi là *sắc số danh sách* (*list-chromatic number*) của G , ký hiệu là $ch(G)$.

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu G là đồ thị *k-tô màu danh sách* thì G cũng là đồ thị *k-tô màu*. Thật vậy, giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị *k-tô màu danh sách*. Ta chỉ việc chọn $S_v = \{1, 2, \dots, k\}$ với mọi $v \in V$. Từ đó suy ra G là đồ thị *k-tô màu*. Như vậy, với mọi đồ thị G ta luôn có $ch(G) \geq \chi(G)$.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số kết quả liên quan

Trước hết là các kết quả đã biết về sắc số của một số

lớp đồ thị đặc biệt.

Bổ đề 1 ([1]). Nếu P là một đường không tầm thường thì $\chi(P) = 2$.

Bổ đề 2 ([1]). Giả sử C là một chu trình với

$$|V(C)| = n \geq 3.$$

Khi đó

(i) Nếu n lẻ thì $\chi(C) = 3$;

(ii) Nếu n chẵn thì $\chi(C) = 2$.

Bổ đề 3 ([2]). Đồ thị đầy đủ K_n có

$$\chi(K_n) = n.$$

Tiếp theo là một kết quả về sắc số của đồ thị tách cực.

Định lý 4 ([9]). Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|K| = n$ và

$$k = \max \{ \deg(u) \mid u \in I \}.$$

Khi đó

(i) $\chi(G) = n$ khi và chỉ khi $k < n$;

(ii) $\chi(G) = n + 1$ khi và chỉ khi $k = n$.

2.2. Kết quả chính

Trước hết ta sẽ phát biểu và chứng minh các kết quả về sắc số danh sách của một số lớp đồ thị đặc biệt.

Mệnh đề 5. Nếu P là một đường không tầm thường thì $ch(P) = 2$.

Chứng minh. Giả sử $P = v_1 v_2 \dots v_n$, $n \geq 2$. Theo Bổ đề 1 ta có $\chi(P) = 2$. Do đó $ch(P) \geq 2$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $ch(P) \leq 2$.

Giả sử các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ lần lượt có các danh sách màu là $S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$ sao cho $|S_{v_i}| = 2$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Giả sử f là tô màu đỉnh của P thỏa mãn

$$f(v_1) \in S_{v_1}, f(v_2) \in S_{v_2} \setminus \{f(v_1)\}, \dots,$$

$$f(v_n) \in S_{v_n} \setminus \{f(v_{n-1})\}.$$

Do đó, f là 2-tô màu danh sách của P . Suy ra $ch(P) \leq 2$ và ta có điều phải chứng minh. ■

Mệnh đề 6. Giả sử C là một chu trình với

$$|V(C)| = n \geq 3.$$

Khi đó

(i) Nếu n lẻ thì $ch(C) = 3$;

(ii) Nếu n chẵn thì $ch(C) = 2$.

Chứng minh. (i) Giả sử n lẻ. Theo Bổ đề 2 ta có $\chi(C) = 3$. Do đó $ch(C) \geq 3$. Ta sẽ chứng minh

$$ch(C) \leq 3.$$

Giả sử $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ và $v_1, v_2, \dots, v_n$ lần lượt có các

danh sách màu là $S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$ sao cho $|S_{v_i}| = 3$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Gọi f là tô màu đỉnh của C thỏa mãn

$$f(v_1) \in S_{v_1}, f(v_2) \in S_{v_2} \setminus \{f(v_1)\}, \dots,$$

$$f(v_{n-1}) \in S_{v_{n-1}} \setminus \{f(v_{n-2})\},$$

$$f(v_n) \in S_{v_n} \setminus \{f(v_{n-1}), f(v_1)\}.$$

Khi đó, rõ ràng f là 3-tô màu danh sách của C , hay $ch(C) \leq 3$. Suy ra điều phải chứng minh.

(ii) Bây giờ ta chứng minh mệnh đề cho trường hợp n chẵn.

Theo Bổ đề 2 ta có $\chi(C) = 2$, do đó $ch(C) \geq 2$. Ta cần phải chứng minh $ch(C) \leq 2$.

Giả sử $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ và $v_1, v_2, \dots, v_n$ lần lượt có các danh sách màu là $S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$ sao cho $|S_{v_i}| = 2$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Giả sử α thuộc một trong các tập $S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $\alpha \in S_{v_i}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Giả sử $S_{v_i} = \{\alpha, t_i\}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Xét tô màu f của C thỏa mãn

$$f(v_i) = \alpha \text{ nếu } i \text{ lẻ, } f(v_i) = t_i \text{ nếu } i \text{ chẵn.}$$

Khi đó f cũng là 2-tô màu danh sách của C .

Trường hợp 2: Tồn tại $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ sao cho $\alpha \in S_{v_i}$ và $\alpha \notin S_{v_{i-1}}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\alpha \in S_{v_n}$ và $\alpha \notin S_{v_{n-1}}$. Gọi g là tô màu của C thỏa mãn

$$g(v_1) \in S_{v_1} \setminus \{\alpha\}, g(v_2) \in S_{v_2} \setminus \{g(v_1)\}, \dots,$$

$$g(v_{n-1}) \in S_{v_{n-1}} \setminus \{g(v_{n-2})\}, g(v_n) = \alpha.$$

Rõ ràng g là 2-tô màu danh sách của C .

Như vậy, trong cả hai trường hợp ta đều chứng minh được tồn tại 2-tô màu danh sách của C , hay $ch(C) \leq 2$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. ■

Mệnh đề 7. Đồ thị đầy đủ K_n có $ch(K_n) = n$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 3 ta có $\chi(K_n) = n$. Do đó $ch(K_n) \geq n$. Ta tiếp tục phải chứng minh $ch(K_n) \leq n$.

Giả sử đồ thị đầy đủ K_n có các đỉnh là $v_1, v_2, \dots, v_n$ và S_{v_i} là danh sách màu của đỉnh v_i sao cho $|S_{v_i}| = n$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Giả sử f là tô màu đỉnh của K_n thỏa mãn

$$f(v_1) \in S_{v_1}, f(v_2) \in S_{v_2} \setminus \{f(v_1)\}, \dots,$$

$$f(v_n) \in S_{v_n} \setminus \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{n-1})\}.$$

Khi đó f cũng là n -tô màu danh sách của đồ thị K_n , do đó $ch(K_n) \leq n$. Suy ra điều phải chứng minh. ■

Cuối cùng ta sẽ phát biểu và chứng minh một kết quả về sắc số danh sách của đồ thị tách cực.

Định lý 8. *Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|K| = n$ và*

$$k = \max \{ \deg(u) \mid u \in I \}.$$

Khi đó

(i) $ch(G) = n$ *khi và chỉ khi $k < n$;*

(ii) $ch(G) = n + 1$ *khi và chỉ khi $k = n$.*

Chứng minh. (i) Giả sử $ch(G) = n$. Nếu $k = n$ thì G chứa đồ thị đầy đủ cấp $n + 1$. Từ Mệnh đề 7 ta suy ra $ch(G) \geq n + 1$, điều này trái với giả thiết. Vậy ta phải có $k < n$.

Bây giờ giả sử $k < n$. Theo Định lý 4 ta có $\chi(G) = n$, do đó $ch(G) \geq n$. Ta sẽ chứng minh $ch(G) \leq n$. Giả sử

$$I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\},$$

$$K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

và $S_{u_1}, S_{u_2}, \dots, S_{u_m}, S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$ lần lượt là danh sách màu của các đỉnh $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$ sao cho

$$|S_{u_1}| = |S_{u_2}| = \dots = |S_{u_m}| = |S_{v_1}| = |S_{v_2}| = \dots = |S_{v_n}| = n.$$

Theo Mệnh đề 7, tồn tại n -tô màu danh sách g của đồ thị $G[K]$ với các danh sách màu là $S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$. Gọi f là tô màu đỉnh của G thỏa mãn

$$f(v_i) = g(v_i) \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(u_i) \in S_{u_i} \setminus g(N(u_i)) \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, m.$$

Rõ ràng f là n -tô màu danh sách của đồ thị G , do đó $ch(G) \leq n$. Suy ra điều phải chứng minh.

(ii) Giả sử $ch(G) = n + 1$. Nếu $k < n$ thì theo (i) ta có $ch(G) = n$, điều này trái với giả thiết. Do đó ta phải có $k = n$.

Giả sử $k = n$. Khi đó G chứa đồ thị con đầy đủ cấp $n + 1$ nên theo Định lý 4 ta có $\chi(G) = n + 1$. Suy ra $ch(G) \geq n + 1$. Ta sẽ chứng minh $ch(G) \leq n + 1$. Giả sử

$$I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\},$$

$$K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

và $S_{u_1}, S_{u_2}, \dots, S_{u_m}, S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$ lần lượt là danh sách màu của các đỉnh $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$ sao cho

$$|S_{u_1}| = |S_{u_2}| = \dots = |S_{u_m}| = |S_{v_1}| = |S_{v_2}| = \dots = |S_{v_n}| = n + 1.$$

Theo Mệnh đề 7, tồn tại $(n + 1)$ -tô màu danh sách g của đồ thị $G[K]$ với các danh sách màu là $S_{v_1}, S_{v_2}, \dots, S_{v_n}$. Gọi

f là tô màu đỉnh của G thỏa mãn

$$f(v_i) = g(v_i) \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(u_i) \in S_{u_i} \setminus g(N(u_i)) \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, m.$$

Rõ ràng f là $(n + 1)$ -tô màu danh sách của đồ thị G , do đó $ch(G) \leq n + 1$. Suy ra điều phải chứng minh. ■

3. Kết luận

Trong lý thuyết đồ thị, đã có nhiều kết quả nghiên cứu về bài toán tô màu. Đặc biệt, trong [4] có đề cập đến bài toán tô màu danh sách của đồ thị (bao gồm cả tô màu danh sách đỉnh và tô màu danh sách cạnh). Đây có thể coi là một tổng quát hóa của bài toán tô màu đồ thị. Với việc tiếp cận vấn đề tô màu danh sách đỉnh, bài báo đã giải quyết xong bài toán tô màu danh sách đỉnh đối với một số lớp đồ thị, trong đó nổi bật là lớp đồ thị tách cực, đây là những kết quả lần đầu tiên được phát biểu và chứng minh, góp phần làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu về bài toán tô màu nói chung và bài toán tô màu danh sách đỉnh nói riêng. Từ những kết quả này, trong tương lai hy vọng sẽ tiếp tục có những kết quả sâu sắc hơn về bài toán tô màu danh sách nói riêng và bài toán tô màu nói chung.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Behazad and G. Chartrand (1971), Introduction to the Theory of graphs, Allyn and Bacon, Boston.
- [2] M. Behazad and G. Chartrand and J. Cooper (1967), *The coloring numbers of complete graphs*, J. London Math. Soc. 42, 226 – 228.
- [3] V. Chvatal and P.L. Hammer (1977), *Aggregation of inequalities in integer programming*, Ann. Discrete Math. 1, pp. 145 – 162.
- [4] R. Diestel (2000), Graph Theory, Springer – Verlag, New Your.
- [5] S. Foldes and P.L. Hammer (1977), *Split graphs*, In: Proceeding of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1977), Congressus Numerantium, vol. XIX, Utilitas Mathematics, Winnipeg, Man., pp. 311 – 315.
- [6] S. Foldes and P.L. Hammer (1978), *On a class of matroid-producing graphs*, In: Combinatorics (Proceeding of the Fifth Hungarian Colloquium, Keszthely, 1976), vol. 1, Colloquium Mathematical Society, Janos Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, New York, pp. 331 - 352.
- [7] P. B. Henderson and Y. Zalcstein (1977), *A graph-theoretic characterization of the PV_{chunk} class of synchronizing primitive*, SIAM J. Comput. 6, 88-108.
- [8] A. Hesham H. And El-R. Hesham (1993), *Task allocation in distributed systems: a split graph model*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 14, 15-32.
- [9] Lê Xuân Hùng (2014), “Sắc số, đa thức tô màu và tính duy nhất tô màu của đồ thị tách cực”, *Tạp chí Khoa học và Giáo dục*, Trường Đại học Sư phạm, ĐHQĐHN, 13(04), 23 – 27.
- [10] U. N. Peled (1975), *Regular Boolean functions and their polytope*, Chapter VI, PH. D. Thesis, Univ. Of Waterloo, Dept. Combin. And Optimization.