

KHÔI PHỤC TÍN HIỆU, HÌNH ẢNH THEO PHƯƠNG PHÁP “LẤY MẪU NÉN”

SIGNAL AND IMAGE RECONSTRUCTION USING COMPRESSIVE SENSING

Nguyễn Văn Điền¹, Hồ Phước Tiến², Nguyễn Tấn Hưng²

¹Trường Đại học Công nghiệp TP. Hồ Chí Minh; nguyenvandien@iuh.edu.vn

²Trường Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng; {hptien, hung.nguyen}@dut.edu.vn

Tóm tắt - “Lấy mẫu nén” (Compressed Sensing) là một vấn đề rất được quan tâm trong thời gian vừa qua, khi nó cho phép khôi phục lại được chính xác tín hiệu gốc với một số lượng nhỏ các mẫu đo đạc. Phương pháp này mở ra nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như chụp ảnh y khoa, xử lý tín hiệu và xử lý ảnh. Bài báo này sẽ phân tích bài toán khôi phục tín hiệu và hình ảnh bằng phương pháp “lấy mẫu nén” và cách giải bài toán này. Trong đó, bài báo sẽ tập trung vào phương pháp GPSR (Gradient Projection for Sparse Reconstruction). Kết quả thí nghiệm trong bài báo cho thấy giải thuật GPSR có thể khôi phục tín hiệu thưa với độ chính xác cao và thời gian thực hiện rất nhanh. Đồng thời, bằng việc kết hợp giữa GPSR và các kiểu định dạng khác nhau cho ma trận lấy mẫu, ta có thể khôi phục được hình ảnh mà không bị các hiệu ứng khối, hiệu ứng nhòe ở các đường viền và có độ chính xác cao.

Từ khóa - tín hiệu thưa; khôi phục ảnh, tín hiệu; “lấy mẫu nén”; ma trận cấu trúc; GPSR.

1. Giới thiệu

Khôi phục tín hiệu là một bài toán quan trọng trong các ngành kỹ thuật và đã được quan tâm từ rất sớm. Định lý lấy mẫu nổi tiếng Shannon (hay Nyquist), kể từ khi ra đời đã đóng vai trò trụ cột trong lĩnh vực này, phát biểu rằng “để khôi phục nguyên vẹn tín hiệu gốc thì tần số lấy mẫu phải lớn hoặc bằng hai lần tần số lớn nhất của tín hiệu” [1]. Hệ quả là, trong phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT - Discrete Fourier Transform), ta cần N tần số để khôi phục lại nguyên vẹn tín hiệu ban đầu chứa N mẫu trong miền thời gian.

Bên cạnh đó, việc khôi phục tín hiệu từ một số lượng rất nhỏ các mẫu đo đạc đã thu hút nhiều nghiên cứu trong thời gian qua, từ lĩnh vực toán ứng dụng đến xử lý tín hiệu, xử lý ảnh. Cụ thể, xét một phép biến đổi tuyến tính như sau:

$$y = Ax \quad (1)$$

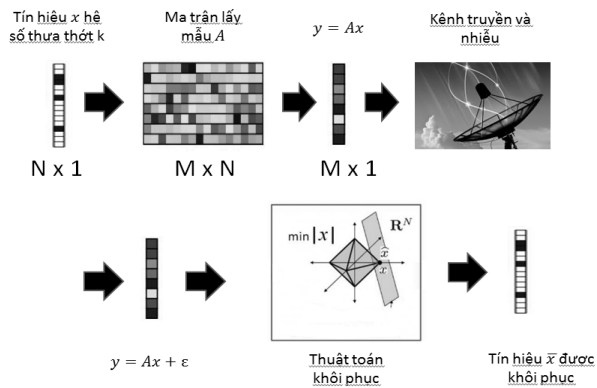
với A là ma trận lấy mẫu kích thước $M \times N$, vector x là tín hiệu gốc có kích thước N , và y là vector đo đạc được có kích thước là M (vector y được truyền thông qua vệ tinh và các kênh truyền như Hình 1). Thông thường, M nhỏ hơn N rất nhiều, làm thế nào để khôi phục lại x khi biết y và A ? Ta biết rằng, trong trường hợp này, ta có M phương trình để tìm N nghiệm, nhưng M nhỏ hơn N nên sẽ không có nghiệm duy nhất. Ta có thể minh họa trường hợp trên bằng phép biến đổi DFT với y chỉ lấy M tần số trong số N tần số từ phép biến đổi DFT đầy đủ. Câu hỏi đặt ra là liệu có thể khôi phục lại được tín hiệu x chỉ từ M tần số của tín hiệu y đo được?

Điều thú vị là E. Candes và T. Tao [2] đã cho thấy câu trả lời cho câu hỏi trên là khẳng định trong trường hợp x là tín hiệu thưa (sparse), tức là x có độ dài N chỉ chứa k phần tử khác không. Hệ số “thưa” được định nghĩa là tỷ số giữa k và N . Cũng để ý rằng “thưa” là một tính chất rất hay gặp

Abstract - Compressed Sensing (CS) has been of great interest since it allows exact reconstruction of a sparse signal from a small number of measurements. This method leads to many important applications in different domains such as medical imaging (for example Computerized Tomography), signal and image processing. The paper will analyse the problem of compressed sensing signal reconstruction and its solution. We will focus particularly on the Gradient Projection for Sparse Reconstruction (GPSR) method, which reveals many advantages such as high precision and efficient implementation. Experimental results suggest that GPSR method offers a fast signal reconstruction with high precision. In addition, by combining GPSR and different types of sampling matrix, we can reconstruct images without block artifacts, false contouring and high PSNR.

Key words - Sparse signal; image reconstruction; signal; compressive sensing; structurally random matrices; GPSR (Gradient projection for sparse reconstruction).

trong các tín hiệu tự nhiên. Ví dụ, ảnh mà chúng ta chụp hàng ngày có phần rất lớn năng lượng tập trung ở các tần số nhỏ. Từ các nghiên cứu của Romberg, Candes và Tao [2], [3], [4], “lấy mẫu nén” (Compressed Sensing), tức lấy mẫu hay đo đạc với một số lượng mẫu rất ít, đã thu hút sự quan tâm đặc biệt của các nhà nghiên cứu, khi nó cho phép mở ra rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như ảnh y khoa (ví dụ ảnh CT), máy ảnh, radar.



Hình 1. Phương pháp “lấy mẫu nén” (CS)

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mô tả một cách tổng quát bài toán “lấy mẫu nén” và cách giải, sau đó sẽ áp dụng cho việc khôi phục các tín hiệu một chiều và hai chiều, cụ thể là ảnh. Đặc biệt, bài báo sẽ tập trung vào phương pháp GPSR-BB (Gradient Projection for Sparse Reconstruction của Barzilai-Borwein) [5] và chứng minh sự hiệu quả của phương pháp này thông qua các tiêu chí về PSNR và thời gian thực hiện. Chúng tôi tin rằng bài báo sẽ giới thiệu những vấn đề cơ bản và góp phần thúc đẩy những nghiên cứu trong lĩnh vực “lấy mẫu nén” đang được quan tâm rộng rãi hiện nay.

2. Khôi phục tín hiệu từ “lấy mẫu nén”

2.1. Mô tả

Cho tín hiệu thưa x có chiều dài N , trong đó bao gồm k phần tử khác không và $N-k$ phần tử còn lại, được xem như là bằng không. Thông qua phép chiếu với ma trận lấy mẫu A ta có vector đo đạc y :

$$y = Ax + \varepsilon \quad (2)$$

Trong đó ε là hàm nhiễu Gauss có trung bình bằng không và phương sai σ_ε^2 .

Để khôi phục tín hiệu $\bar{x}$ như Hình 1, vấn đề được đưa ra là giải quyết bài toán tối ưu hóa cực tiểu:

$$\bar{x} = \min_x \|x\|_1 \text{ với } \|y - Ax\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (3)$$

hoặc

$$\bar{x} = \min_x \|y - Ax\|_2^2 \text{ với } \|x\|_1 \leq t \quad (4)$$

Theo [5], [6] cho vector đo đạc y kết hợp nhiễu kênh truyền, bài toán tối ưu (3) trở thành:

$$\bar{x} = \min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \tau \|x\|_1 \quad (5)$$

với $x \in R^N, y \in R^M, A$ là ma trận $M \times N$, τ là hệ số không âm, $\|v\|_2 = (\sum_i |v_i|^2)^{1/2}$ là chuẩn (norm) bậc 2 của vector v và $\|v\|_1 = \sum_i |v_i|$ là chuẩn bậc 1 của vector v .

2.2. Lời giải

Trong bài báo này, việc giải quyết bài toán (5) được thực hiện dựa theo phương pháp khôi phục tín hiệu thưa bằng phép chiếu gradient (GPSR-Gradient Projection for Sparse Reconstruction)[5]. Tín hiệu x được chia thành thành phần dương và thành phần âm. Ta sử dụng phép thay thế:

$$x = u - v \text{ với } u_i = \max\{x_i, 0\}; v_i = \max\{-x_i, 0\}$$

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| = 1_N^T u + 1_N^T v$$

Với $1_N = [1, 1, \dots, 1]^T$ là vector đơn vị có độ dài N . Bài toán (5) được chuyển thành:

$$\min_{u,v} \frac{1}{2} \|y - A(u - v)\|_2^2 + \tau \cdot 1_N^T u + \tau \cdot 1_N^T v \quad (6)$$

với $u, v \geq 0$

Bài toán tối thiểu hóa ở (6) được viết lại dưới dạng BCQP (Bound Constrained Quadratic Problem) [8] như sau:

$$\min_z c^T z + \frac{1}{2} z^T B z \equiv F(z) \text{ với } z \geq 0 \quad (7)$$

$$\text{Trong đó } z = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, b = A^T y, c = \tau 1_{2N} + \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix}$$

$$\text{và } B = \begin{pmatrix} A^T A & -A^T A \\ -A^T A & A^T A \end{pmatrix} \quad (8)$$

Theo Barzilai-Borwein [5] và [6], từ đó thuật toán có tên GPSR-BB, ta tính giá trị $\delta^{(k)} = -H_k^{-1} \nabla F(z^{(k)})$ ở mỗi bước lặp thứ k với H_k là hàm Hessian của $F(z^{(k)})$. Barzilai và Borwein đưa ra việc lựa chọn giá trị hàm Hessian được xác định bởi $H_k = \eta^{(k)} \cdot I$ với I là ma trận đơn vị và $\eta^{(k)}$ được xác định theo phép tính gần đúng $\nabla F(z^{(k)}) - \nabla F(z^{(k-1)}) \approx \eta^{(k)} [z^{(k)} - z^{(k-1)}]$. Dựa trên thông số $\eta^{(k)}$ chúng ta xác định bước lặp tiếp theo $z^{(k+1)} = z^{(k)} -$

$(\eta^{(k)})^{-1} \nabla F(z^{(k)})$. Các bước lặp này vẫn tiếp tục kể cả khi giá trị $F(z^{(k)})$ tăng lên.

Thuật toán GPSR-BB được tóm tắt lại như sau:

1. Giá trị ban đầu: Chọn $z^{(0)}$ và các thông số $\alpha_{min}, \alpha_{max}, \alpha^{(0)} \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. Thiết lập chỉ số vòng lặp $k = 0$.

2. Tính toán:

$$\delta^{(k)} = \left(z^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla F(z^{(k)}) \right)_+ - z^{(k)} \quad (9)$$

3. Thực hiện: Tìm thông số $\lambda^{(k)}$ để giá trị hàm $F(z^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta^{(k)})$ đạt giá trị nhỏ nhất trong khoảng $\lambda^{(k)} \in [0, 1]$ sau đó tính toán $z^{(k+1)} = z^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta^{(k)}$

4. Cập nhật lại giá trị α : Tính đại lượng $\gamma^{(k)} = (\delta^{(k)})^T B \delta^{(k)}$

Nếu $\gamma^{(k)} = 0$ ta thiết lập $\alpha^{(k+1)} = \alpha_{max}$

Còn lại tính giá trị α bằng phép tính điểm giữa:

$$\alpha^{(k+1)} = \text{mid} \left\{ \alpha_{min}, \frac{\|\delta^{(k)}\|_2^2}{\gamma^{(k)}}, \alpha_{max} \right\}$$

5. Kết thúc nếu $z^{(k+1)}$ thỏa mãn yêu cầu. Nếu chưa đạt, đặt lại bước lặp $k \leftarrow k + 1$ và thực hiện lại vòng lặp tại bước 2.

Điều kiện kết thúc

Kiểm tra điều kiện kết thúc luôn là một tiêu chí quan trọng để đánh giá chất lượng của thuật toán. Chúng ta mong muốn kết quả khôi phục tín hiệu phải xấp xỉ gần đúng với tín hiệu được truyền đi và đồng thời chúng ta cũng muốn tránh thời gian quá dài để thực hiện các vòng lặp. Một tiêu chuẩn cơ bản được dùng cho bài toán tối ưu BCQP là:

$$\|z - (z - \bar{\alpha} \nabla F(z))_+\| \leq \text{tolP} \quad (10)$$

với tolP là một hằng số dương nhỏ và $\bar{\alpha}$ là hằng số dương. Ngoài ra, còn nhiều tiêu chuẩn khác để kết thúc vòng lặp mà độc giả có thể tìm thấy ở [5].

Giảm độ lệch hệ số khác không (Debiasing)

Ngoài việc thực hiện thuật toán tối ưu hóa để thu được kết quả xấp xỉ gần đúng, ta còn thêm bước giảm độ lệch của các hệ số khác không. Kết quả $z = [u^T, v^T]^T$ được chuyển về dạng $x_{GP} = u - v$. Các hệ số gần bằng không được thiết lập bằng không, sau đó tối ưu hóa x theo:

$$\|y - Ax\|_2^2 \leq \text{tolD} \|y - Ax_{GP}\|_2^2 \quad (11)$$

Với tolD là hằng số dương nhỏ.

2.3. Ma trận lấy mẫu

Ma trận lấy mẫu A dùng để thu được vector đo đạc y theo công thức (1) cần thỏa mãn các đặc điểm:

+ Tính tối ưu: việc lấy mẫu phải tối ưu hoặc gần tối ưu, số lượng các phép đo để có kết quả chính xác đạt mức tiệm cận nhỏ nhất.

+ Tính phổ biến: việc lấy mẫu phải tốt và đều áp dụng được cho tất cả các loại wavelet tạo tín hiệu thưa.

+ Độ phức tạp thấp và tính toán nhanh: áp dụng được cho các chuỗi tín hiệu có độ dài lớn.

+ Phù hợp với thiết kế phần cứng: các giá trị của ma

trận lấy mẫu phải là $\{-1, 0, 1\}$.

Thay vì sử dụng ma trận lấy mẫu ngẫu nhiên A kích thước $M \times N$, ma trận lấy mẫu được sử dụng ở bài báo này là ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc (SRM – Structurally Random Matrix). Nó được định dạng theo [7] bằng công thức

$$A = \sqrt{\frac{N}{M}} DFR \quad (12)$$

+ $R \in R^{N \times N}$ là ma trận hoán vị ngẫu nhiên hoặc ma trận chéo ngẫu nhiên với các giá trị trên đường chéo R_{ii} tuân theo phân bố Bernoulli với $P\{R_{ii} = \pm 1\} = \frac{1}{2}$.

+ $F \in R^{N \times N}$ là ma trận trực giao được chọn dựa theo các dạng ma trận biến đổi nhanh như ma trận biến đổi nhanh Fourier (FFT), ma trận rời rạc cosine (DCT), ma trận Wash-Hadamard (WHT). Ma trận F dùng để mã hóa chuỗi tín hiệu thành vector đo đặc.

+ $D \in R^{M \times N}$ là ma trận lấy mẫu phụ. Nó lựa chọn ngẫu nhiên các cột trong ma trận RF để tạo nên ma trận A có kích thước $M \times N$.

Từ đó, vector đo đặc y được thực hiện thông qua ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc như sau:

+ Bước 1: Ngẫu nhiên hóa tín hiệu truyền đi x tức nhân tín hiệu này với ma trận R .

+ Bước 2: Áp dụng ma trận biến đổi F cho tín hiệu ngẫu nhiên từ bước 1.

+ Bước 3: Chọn ngẫu nhiên M phép đo từ N hệ số biến đổi để có được vector đo đặc y .

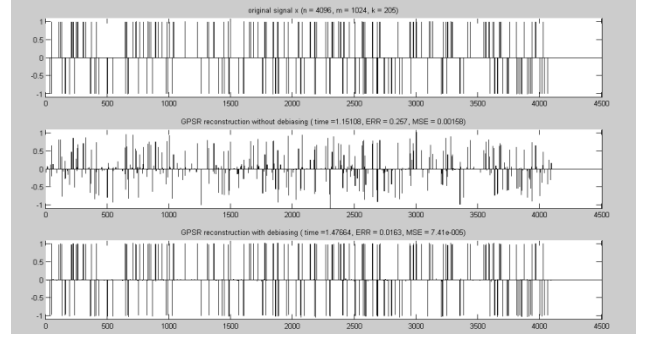
Tính rời rạc của ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc và ma trận biến đổi tín hiệu thưa, tính nhanh và độ hiệu quả được chứng minh bởi Do [7].

3. Kết quả thực nghiệm

3.1. Khôi phục tín hiệu

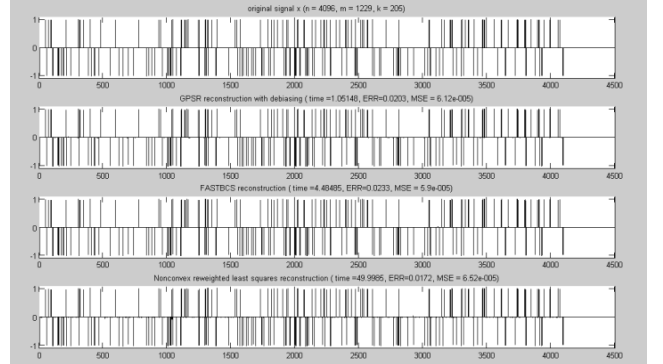
3.1.1. Khôi phục tín hiệu thưa theo GPSR-BB

Với thí nghiệm đầu tiên, ta khảo sát tín hiệu thưa ban đầu x (hình trên cùng của Hình 2) có độ dài $N=4096$ và $k=0.05*N=205 < N$ được tạo ngẫu nhiên với các giá trị ± 1 . Số lượng các phép đo $M=0.25*N=1024$. Ma trận lấy mẫu được tạo ngẫu nhiên có độ lớn 1024×4096 ($M \times N$). Vector nhiễu ε được tạo theo phân bố chuẩn Gauss với phương sai $\sigma_\varepsilon^2 = 0.01$. Thông số τ được chọn là $\tau = 0.1 \|A^T y\|_\infty$ (chọn $\tau = 0.08$ cho các thí nghiệm dưới). Tín hiệu khôi phục $\bar{x}$ được thực hiện theo hai bước: Bước 1 định vị tất cả các vị trí của $\bar{x}$ mà biên độ có giá trị khác không nhưng không quan tâm đến độ lớn của nó như hình giữa của Hình 2, ta nhận thấy tín hiệu khôi phục bị sai; bước 2 sử dụng thêm bước giảm độ lệch với thông số $tolD=0.0001$ để được tín hiệu khôi phục (hình dưới cùng của Hình 2) với sai số MSE nhỏ (7.10^{-5}) và rất nhanh (1.4s). Thông số $tolD$ nằm trong khoảng từ 10^{-5} đến 10^{-4} . Việc tăng thông số $tolD$ trong bước giảm độ lệch hệ số khác không sẽ làm MSE tăng lên và khi $tolD$ giảm, MSE cũng giảm nhưng thời gian khôi phục lâu hơn. Các thí nghiệm dưới đây đều chọn $tolD$ là 10^{-4} .



Hình 2. Khôi phục tín hiệu thưa $k=205$, độ dài $N=4096$ và số phép đo $M=1024$ theo GPSR-BB.

3.1.2. So sánh với các phương pháp khác

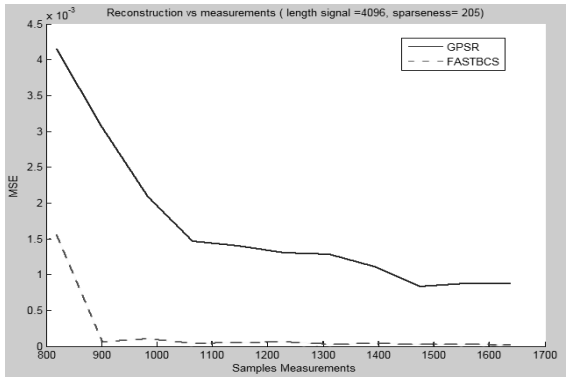


Hình 3. Khôi phục tín hiệu thưa với $k=205$, $N=4096$; $M=1229$. Từ trên xuống: tín hiệu gốc, kết quả từ GPSR-BB, FASTBCS và IRWLS

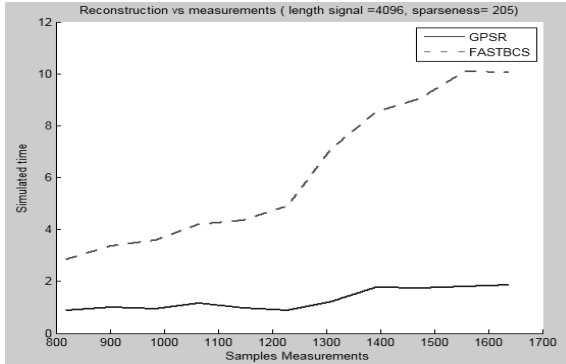
Sau đây, ta sẽ thực hiện so sánh giữa GPSR-BB và một số thuật toán khác như FASTBCS (Fast Bayesian Compressive Sensing) [8] và IRWLS (Iteratively ReWeighted Least Squares minimization) [9]. Ta sử dụng tín hiệu ban đầu x với độ dài $N=4096$ và $k=205$ ($0.05*N$), số phép đo được chọn là $M=1229$. Kết quả nhận được theo Hình 3 cho thấy các thuật toán đều khôi phục chính xác chuỗi dữ liệu với sai số MSE rất nhỏ (10^{-5}). Thuật toán FASTBCS và IRWLS tính tất cả các vị trí và giá trị các hệ số của tín hiệu khôi phục $\bar{x}$ cho đến khi thỏa mãn điều kiện kết thúc nên độ sai số là rất nhỏ; chính vì thế có sự khác biệt lớn ở thời gian khôi phục. Trong khi GPSR-BB rất nhanh và FASTBCS chấp nhận được thì IRWLS phải rất lâu mới xây dựng chính xác lại chuỗi tín hiệu.

3.1.3. Ảnh hưởng của số lượng phép đo M

Ta so sánh GPSR-BB và FASTBCS theo các tiêu chí MSE và thời gian thực hiện khi số lượng phép đo M tăng dần, trong việc khôi phục tín hiệu thưa ban đầu có $k=205$ và chiều dài $N=4096$. Khi chúng ta tăng số lượng các phép đo M từ $0.5*N$ đến N thì sai số MSE giảm dần đạt đến giá trị 10^{-5} như Hình 4. Tuy nhiên, thời gian thực hiện tăng nhanh đối với thuật toán FASTBCS khi M lớn. Kết hợp Hình 4 và 5 ta thấy GPSR-BB có sai số MSE nằm trong phạm vi cho phép, nhưng thường lớn hơn MSE của FASTBCS. Tuy nhiên, thời gian thực hiện của GPSR-BB không thay đổi hoặc tăng ít khi M tăng.



Hình 4. Khôi phục tín hiệu thưa với $k=205$, độ dài $N=4096$ và số phép đo M tăng dần theo tiêu chí MSE



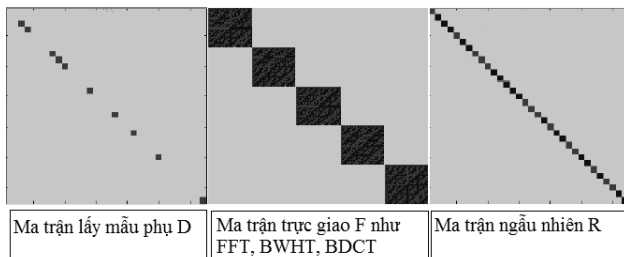
Hình 5. Khôi phục tín hiệu thưa với $k=205$, độ dài $N=4096$ và số phép đo M tăng dần theo tiêu chí thời gian

Ta sẽ tiếp tục khảo sát GPSR-BB cho tín hiệu có kích thước rất lớn như ảnh ở phần sau.

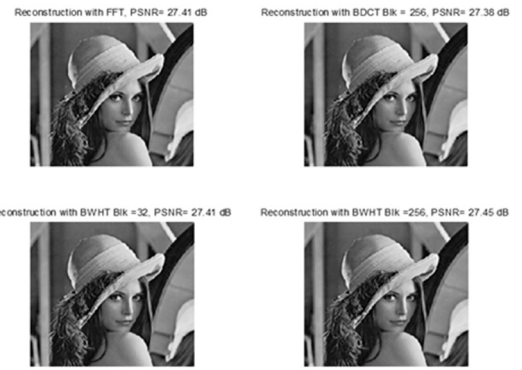
3.2. Khôi phục ảnh

3.2.1. Khôi phục ảnh kết hợp thuật toán GPSR và các dạng ma trận cấu trúc

Từ hình ảnh gốc Lena kích thước 256×256 , ta chuyển thành dạng vector α kích thước 65536×1 . Sử dụng ma trận chuyển đổi ψ DWT (DiscreteWavelet Transform) ta có tín hiệu thưa $x = \psi\alpha$. Sau đó, sử dụng ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc A ($M \times N$) để lấy mẫu với số phép đo $M=0.6 \cdot N$ ($N=65536$) ta có được vector đo đạc $y = Ax$. Việc lựa chọn ma trận lấy mẫu được mô tả như Hình 6 với $R \in R^{N \times N}$ (ma trận hoán vị ngẫu nhiên), $D \in R^{M \times N}$ (ma trận lấy mẫu phụ) như phần lý thuyết 2.3 và ma trận trực giao $F \in R^{N \times N}$ có nhiều kiểu định dạng khác nhau như ma trận Fast Fourier Transform (FFT), ma trận Discrete Cosine Transform theo khối (BDCT), ma trận Walsh-Hadamard Transform theo khối (BWHT). Nhiễu kênh truyền ε tuân theo phân bố chuẩn Gauss với phương sai $\sigma_\varepsilon^2 = 0,01$.



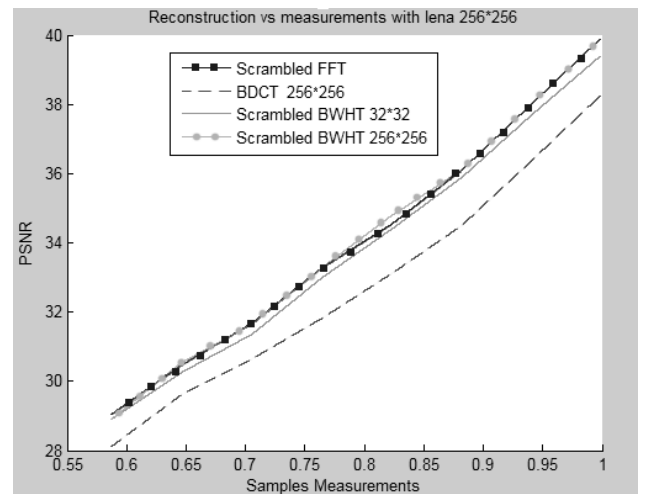
Hình 6. Ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc với ma trận F theo công thức (14) có cấu trúc khối



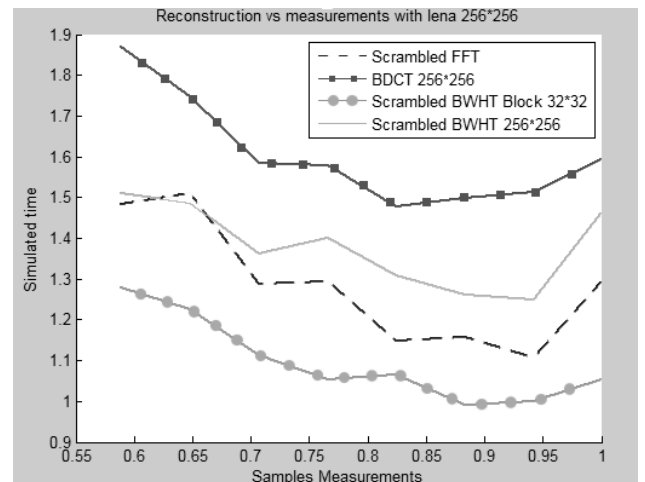
Hình 7. Khôi phục ảnh Lena sử dụng thuật toán GPSR-BB và ma trận lấy mẫu khác nhau

Dựa vào thuật toán GPSR-BB kết hợp với bước giảm độ lệch (debiasing), ta thu được vector thưa $\tilde{x}(N \times 1)$. Sau đó sử dụng ma trận chuyển đổi ngược IDWT ta thu được vector hình ảnh $\tilde{\alpha}$ và hình ảnh Lena như Hình 7. Ta thấy ảnh khá mượt, nhanh với tỷ lệ PSNR tương tự như nhau.

3.2.2. Khôi phục ảnh với số phép đo M tăng dần theo tiêu chí PSNR và thời gian thực hiện



Hình 8. PSNR khi khôi phục ảnh sử dụng các ma trận lấy mẫu khác nhau với M tăng dần



Hình 9. Thời gian khôi phục tín hiệu khi sử dụng các ma trận lấy mẫu khác nhau với M tăng dần

Khôi phục ảnh sử dụng các định dạng ma trận cấu trúc khác nhau FFT, BDCT với khối có kích thước 256×256 , BWHT với khối có kích thước 32×32 và BWHT với khối có kích thước 256×256 theo cùng thuật toán khôi phục tín hiệu GPSR-BB có chiều dài $N=256 \times 256$ và có số phép đo tăng dần từ $M = 55\% \cdot N$ đến $M = 100\% \cdot N$. Kết quả được thể hiện trong các Hình 8 và 9.

4. Bàn luận

4.1. Nhận xét về khôi phục tín hiệu

4.1.1. Phương pháp GPSR-BB

Như chúng ta đã biết, khi chuỗi tín hiệu có kích thước càng lớn thì việc tính toán ma trận nghịch đảo hoặc các biện pháp tương đương thường dẫn đến thời gian rất lâu. Và chuỗi tín hiệu thưa thường dài, nhưng số lượng hệ số khác không rất ít nên thuật toán GPSR-BB lựa chọn giải pháp thông minh hơn. Thay vì phải tìm hết tất cả giá trị và vị trí của từng hệ số trong chuỗi, GPSR-BB chỉ đi tìm vị trí mà xuất hiện các hệ số khác không, mà không tính toán những giá trị này. Kế tiếp, nó áp dụng bước giảm độ lệch hệ số khác không chỉ cho những vị trí vừa tìm được để tìm chính xác giá trị biên độ của nó theo tiêu chí MSE. Như Hình 2, ta thấy bước một chỉ tốn 1.15s để tìm vị trí và 0.32s để tìm giá trị biên độ. Ta nhận thấy thuật toán GPSR-BB rất thích hợp để khôi phục tín hiệu thưa theo tiêu chí MSE và thời gian.

4.1.2. Vai trò của số lượng phép đo

Khác biệt theo tiêu chí về thời gian được thấy rõ ràng qua thí nghiệm được mô tả trong Hình 3. Tín hiệu thưa ban đầu cần được khôi phục có kích thước $N=4096$, $k=205$ và $M=1229$ phép đo: các thuật toán đều khôi phục tín hiệu rất tốt, có độ sai số MSE rất nhỏ; tuy nhiên IRWLS cần sử dụng thời gian rất lâu $t=50s$, vì thế nó không thích hợp cho những tín hiệu kích thước lớn. Trong những thí nghiệm tiếp theo, ta chỉ so sánh thuật toán GPSR-BB và FASTBCS theo tiêu chí MSE và thời gian.

Một trong những cách làm tăng độ chính xác của tín hiệu khôi phục là thường tăng số lượng phép đo M . Theo kết quả Hình 4, ta thấy với cùng một tín hiệu có kích thước lớn $N=4096$ và $k=205$, khi tăng M thì giá trị sai số MSE giảm mạnh. Tuy nhiên, điều này cũng dẫn đến độ phức tạp tính toán tăng theo. Vì thế, thời gian cho thuật toán FASTBCS cũng tăng mạnh. Trong khi với việc lựa chọn vị trí và chỉ tính toán các giá trị này, thời gian của GPSR-BB chỉ tăng ít hoặc gần như không đổi như theo Hình 5. Vì vậy, đối với những tín hiệu thưa có kích thước rất lớn như hình ảnh, ta áp dụng GPSR-BB để khôi phục như phần 3.2.

4.2. Nhận xét về khôi phục ảnh

4.2.1. Phương pháp GPSR-BB kết hợp với ma trận cấu trúc

Thông thường để khôi phục ảnh, tín hiệu có kích thước rất lớn, ảnh được chia thành những khối nhỏ và được khôi phục lại. Vì thế, việc xây dựng lại ảnh khá lâu; đồng thời, do tạo ra nhiều khối nhỏ nên, sau khi kết hợp lại, ảnh dễ bị hiệu ứng khối và các đường viền thường bị nhòe.

Với việc sử dụng thuật toán GPSR-BB cho phép khôi phục tín hiệu có kích thước rất lớn kết hợp với ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc, ảnh được khôi phục rất tốt và khá nhanh như Hình 7; không có các hiệu ứng khối và hiệu ứng nhòe ở các đường viền, đồng thời khả năng lọc nhiễu rất tốt. Tỷ lệ PSNR khá cao.

4.2.2. Ảnh hưởng của định dạng ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc

Thay thế ma trận F trong định dạng ma trận ngẫu nhiên cấu trúc bằng nhiều kiểu khác nhau như FFT, BDCT 256×256 , BWHT 32×32 và BWHT 256×256 , ta thu được kết quả khá tương tự nhau về PSNR và thời gian, theo Hình 8 và 9, đối với FFT, BWHT 32×32 và BWHT 256×256 . Khi tăng số lượng phép đo, tức tăng mẫu thử, thì kết quả thu được chính xác hơn, giá trị PSNR tăng lên nhưng thời gian vẫn giữ ở mức cho phép. Các định dạng ma trận FFT, BWHT 32×32 , BWHT 256×256 có các kết quả tương tự nhau. Trong khi ma trận khối DCT có PSNR thấp hơn và thời gian thực hiện lâu hơn.

5. Kết luận

Với phương pháp “lấy mẫu nén”, khi số phép đo M nhỏ hơn chiều dài của chuỗi dữ liệu thì tín hiệu thưa vẫn được khôi phục lại chính xác. Điều này dẫn đến việc truyền và khôi phục các thông tin, hình ảnh được nhanh hơn.

Đồng thời với các ưu điểm của GPSR-BB và ma trận ngẫu nhiên dạng cấu trúc, qua các thí nghiệm về khôi phục ảnh, ta nhận thấy có thể khôi phục tín hiệu có kích thước rất lớn nhưng nhanh và hiệu quả, đạt độ chính xác cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. E. Shannon, “A mathematical theory for communication.” SIGMOBILE Mob. Comput. Commu. Rev, 53-55, Tháng 1, 2001.
- [2] E. J. Candes, “Compressive sampling,” Proceedings of the International Congress Mathematicians, Madrid, Tây Ban Nha, 2006.
- [3] E. Candes, J. Romberg, T. Tao, “Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”, IEEE Transactions on Information Theory, 52(2), pp. 489-509, năm 2006.
- [4] E. Candes, J. Romberg, T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” Communications on Pure and Applied Mathematics, 59(8), pp.1207-1223, 2006.
- [5] M. Figueiredo, R. Novak, S.J. Wright, “Gradient Projection for Sparse Reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems,” IEEE Journal of selected Topics in Signal Processing, năm 2007.
- [6] J. Barzilai and J. Borwein. “Two-point step size gradient method”. IMA J. Numerical Analysis 8, 141–148, 1988.
- [7] Thong T. Do, Lu Gan, Nam H. Nguyen, Tran D. Tran, “Fast and efficient compressive sensing using structurally random matrices,” IEEE Transactions on signal processing. Vol 60, Tháng 1, 2012.
- [8] S. D. Babacan, R. Molina, A. K. Katsaggelos, “Fast Bayesian compressive sensing using Laplace priors,” IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 2873-2876, năm 2009.
- [9] I. Daubechies, R. Devore, M. Fornasier, C. S. Güntürk, “Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery,” Communications on Pure and Applied Mathematics, 63(1), Tháng 10, 2009.