

ỨNG DỤNG THUẬT TOÁN METROPOLIS – HASTING CỦA PHƯƠNG PHÁP XÍCH MARKOV MONTE CARLO TRONG PHÂN TÍCH ĐỘ TIN CẬY

USING METROPOLIS – HASTING ALGORITHM OF MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHOD IN RELIABILITY ANALYSIS

Đăng Công Thuật

Trường Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng; dangcongthuat@dut.udn.vn

Tóm tắt - Trong phân tích độ tin cậy, phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) cung cấp một công cụ đơn giản và mạnh mẽ để ước lượng xác suất phá hủy kết cấu, không phụ thuộc vào độ phức tạp của hàm trạng thái phá hủy kết cấu. Tuy nhiên không thích hợp cho việc tính toán các xác suất bé, bởi vì cần số lượng mẫu lớn và khi đó số lượng phân tích kết cấu cần thiết sẽ lớn. Một phương pháp tiên tiến hơn là xích Markov Monte Carlo (MCMC) có thể bù đắp cho nhược điểm này. Bài viết này trình bày ứng dụng của Markov Chain phương pháp Monte Carlo (MCMC) dựa trên thuật toán Metropolis-Hastings để phân tích độ tin cậy của kết cấu với các tham số không chắc chắn. Bài báo sẽ minh chứng khả năng áp dụng phương pháp thông qua hai ví dụ đơn giản. Cuối cùng, sự so sánh giữa hai phương pháp MCS và MCMC được thực hiện để tính xác suất phá hủy của hệ một bậc tự do phi tuyến chịu tác động của các gia tốc nền động đất được mô phỏng bởi mô hình Boore.

Từ khóa - mô phỏng Monte Carlo; xích Markov Monte Carlo; thuật toán Metropolis-Hastings; độ tin cậy; động đất.

1. Đặt vấn đề

Các kết cấu công trình xây dựng (nhà xưởng, cầu cống, cảng biển...), trong quá trình sử dụng bình thường, sẽ chịu tác động ngẫu nhiên của các tải trọng động (ví dụ như gió bão, động đất...) [1], [2]. Bên cạnh đó, chúng ta cần phải kể đến đồng thời các yếu tố ngẫu nhiên của vật liệu làm kết cấu, của kích thước và của tải trọng tác dụng... Điều này dẫn đến ứng xử đầu ra của kết cấu cũng dao động ngẫu nhiên, và sẽ có một số trường hợp ứng xử đầu ra vượt quá giới hạn cho phép (ngưỡng thiệt hại) được định trước như: chuyển vị vượt quá chuyển vị cho phép, ứng suất vượt quá ứng suất cho phép, v.v. Xác suất các trường hợp ứng xử đầu ra vượt quá giới hạn cho phép được gọi là xác suất không an toàn của kết cấu hay xác suất phá hủy kết cấu. Khi đó, việc xác định xác suất phá hủy của kết cấu khi có sự dao động ngẫu nhiên của các yếu tố đầu vào được gọi là bài toán phân tích độ tin cậy cho kết cấu.

Hiện nay, đã có nhiều phương pháp khác nhau được đề xuất để giải bài toán phân tích độ tin cậy như: phương pháp độ tin cậy bậc nhất (FORM-First Order Reliability Method), phương pháp độ tin cậy bậc hai (SORM-Second Order Reliability Method), phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS - Monte Carlo Simulation) [3] v.v... Trong số đó, phương pháp MCS được xem như là một công cụ mạnh mẽ để ước lượng xác suất phá hủy kết cấu. Tuy nhiên khi sử dụng phương pháp này để ước lượng các xác suất bé lại không phù hợp bởi vì số lượng mẫu cần thiết phải lớn và khi đó số lượng phân tích kết cấu sẽ rất lớn để đạt được độ chính xác cho trước.

Vì vậy, một phương pháp tiên tiến hơn là xích Markov

Abstract - In the reliability analysis literature, Monte Carlo simulation method offers a simple and robust means for estimating the failure probability for a specified structure and loading conditions regardless of the complexity of the performance functions. However it is not suitable for finding small probabilities because of the number of samples, and hence the number of structure analyses required to achieve a given accuracy is proportional to $1/P_f$. A more advanced method is Markov Chain Monte Carlo (MCMC) which compensates for this drawback. This article presents the application of the Markov Chain Monte Carlo method (MCMC) based on Metropolis-Hastings algorithm, which is developed by Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller, and Teller (1953) and generalized by Hastings (1970), to analyse the reliability of structures with uncertainty parameters. The document illustrates the principles of the methodology on two simple examples. Finally, a comparison of two simulation methods (MCS and MCMC) is done, which is employed for the estimation of failure probabilities for a nonlinear (Bouc-Wen type) single degree of freedom system subjected to seismic excitation generated by the Boore's model.

Key words - Monte Carlo simulation; Markov Chain Monte Carlo; Metropolis-Hastings algorithm; reliability; earthquake.

Monte Carlo (MCMC) có thể bù đắp cho nhược điểm này. Nghiên cứu này sẽ trình bày ứng dụng của xích Markov Monte Carlo (MCMC) dựa trên thuật toán Metropolis-Hastings, được phát triển bởi Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller, và Teller (1953) [4] và tổng quát hóa bởi Hastings (1970) [5], để phân tích độ tin cậy của kết cấu với các thông số không chắc chắn.

Mô hình Boore [6] được sử dụng để tạo ra các gia tốc nền, trong đó quá trình dùng Gauss (second order stationary Gaussian process) là cơ sở để tạo ra các kích ứng động ngẫu nhiên, nó được đặc trưng bởi một hàm mật độ phổ công suất (Power Spectral Density - PSD) của một chuyển động nền. Sự phá hủy của kết cấu là trạng thái mà nó được coi là không còn có thể hoạt động bình thường. Có nghĩa là, khi kết cấu vượt quá một ngưỡng giới hạn nào đó thì xảy ra phá hủy, ngưỡng này có thể là một giá trị tất định hoặc cũng có thể là một biến ngẫu nhiên. Căn cứ vào mô hình tạo ra kích thích ngẫu nhiên, mô hình số phân tích ứng xử của kết cấu và một tiêu chí đánh giá phá hủy kết cấu, mục tiêu của chúng tôi là nghiên cứu đánh giá độ tin cậy (xác suất phá hủy) của kết cấu dựa vào mô phỏng xích Markov Monte Carlo.

2. Tổng quan bài toán độ tin cậy

2.1. Biến ngẫu nhiên và hàm trạng thái phá hủy

Sự không chắc chắn luôn luôn tồn tại trong điều kiện bình thường của quá trình hoạt động của kết cấu (gia công, thời tiết, sóng, tiếng ồn xung quanh, sóng...) và tính chất của kết cấu trong quá trình chế tạo (mô đun Young, kích thước ...). Nếu ta gọi Z là véc tơ các biến ngẫu nhiên (BNN)

thì mỗi thành phần trong vectơ này sẽ biểu thị một tham số không chắc chắn tương ứng, như vậy $\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$.

Các tiêu chuẩn phá hủy của kết cấu được trình bày bởi một hàm đặc tính hoặc hàm trạng thái giới hạn:

$$G(\mathbf{Z}) = x_0 - x_{\max}(\mathbf{Z}) \quad (1)$$

Trong đó: $x_{\max}$ là đáp ứng lớn nhất phụ thuộc $\mathbf{Z}$ và x_0 là ngưỡng phá hủy của kết cấu.

Miền phá hủy được định nghĩa bởi $D_f = G(\mathbf{Z}) \leq 0$, khi đó xác suất phá hủy sẽ là:

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] = \int_{D_f} p_z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2)$$

2.2. Phương pháp phân tích độ tin cậy

Trong trường hợp miền tích phân $D_f = G(\mathbf{Z}) \leq 0$ không tường minh thì việc tính xác suất theo công thức (2) sẽ rất khó khăn. Vì vậy, phương pháp mô phỏng thường được áp dụng trong trường hợp này. Thông thường, phương pháp mô phỏng Monte Carlo là phương pháp sử dụng phổ biến nhất và mang lại kết quả tốt nhất cho việc đánh giá xác suất phá hủy.

Tích phân (2) có thể được biểu diễn thông qua chỉ số phá hủy $\mathbf{I}_{D_f}$ như sau:

$$p_f = \int_{R^n} \mathbf{I}_{D_f} p_z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = E[\mathbf{I}_{D_f}] \quad (3)$$

với $E[\bullet]$ là kỳ vọng toán và chỉ số phá hủy được định nghĩa bởi:

$$\mathbf{I}_{D_f} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } G(\mathbf{Z}) \leq 0 \\ 0 & \text{nếu } G(\mathbf{Z}) > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Khi đó xác suất phá hủy sẽ bằng kỳ vọng của hàm chỉ số phá hủy hay chính là trung bình mẫu của $\mathbf{I}_{D_f}$:

$$p_f = E[\mathbf{I}_{D_f}] \approx \bar{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{I}_{D_f} = \frac{N_f}{N} \quad (5)$$

Trong đó N và N_f lần lượt là tổng số lần mô phỏng và tổng số lần gây phá hủy kết cấu.

Phương sai (variance) $\bar{p}_f$ của được xác định như sau:

$$\text{var}[\bar{p}_f] = \frac{1}{N} p_f (1 - p_f) \quad (6)$$

và hệ số biến thiên của ước lượng này sẽ là:

$$c_v = \frac{\sqrt{\text{Var}[\bar{p}_f]}}{E[\bar{p}_f]} = \sqrt{\frac{1 - p_f}{N p_f}} \approx \sqrt{\frac{1}{N p_f}} \Big|_{p_f \rightarrow 0} \quad (7)$$

Từ biểu thức (7), chúng ta nhận thấy rằng khi ước tính những xác suất bé ($p_f \rightarrow 0$), ta cần phải có một số lượng mô phỏng tối thiểu ($\geq N_{\min}$) để đạt được hệ số biến thiên c_v :

$$N_{\min} \approx \frac{1}{p_f c_v^2} \quad (8)$$

Ví dụ, nếu để đạt hệ số biến thiên $c_v = 10\%$ của một ước lượng $p_f = 10^{-n}$ thì chúng ta cần phải có ít nhất $N_{\min} \approx 10^{n+2}$. Như vậy, phương pháp này sẽ không phù hợp khi cần ước

lượng những xác suất bé ($\leq 10^{-3}$).

Để cải thiện sự hội tụ (giảm số lần mô phỏng), trong nghiên cứu này, chúng tôi áp dụng phương pháp mô phỏng xích Markov dựa vào thuật toán Metropolis – Hastings [4], [7] được trình bày cụ thể dưới đây.

3. Phương pháp xích Markov Monte Carlo dựa vào thuật toán Metropolis – Hastings

3.1. Cơ sở lý thuyết

Nội dung chính của phương pháp này là thay vì đánh giá một miền phá hủy D_f nhỏ (tương ứng xác suất phá hủy bé) bằng cách xem xét một chuỗi các miền phá hủy trung gian, khi đó kích thước các miền phá hủy trung gian là tương đối lớn, có thể xác định bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo với số lần mô phỏng chấp nhận được, và kích thước các tập con này ngày càng nhỏ (tập con) như sau:

$$D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_m = D_f \quad (9)$$

Ở đây, miền phá hủy D_f được định nghĩa thành m miền phá hủy trung gian D_i với $i = 1, \dots, m$, miền D_{i+1} là tập con của miền D_i được định nghĩa như sau:

$$D_i = G(\mathbf{Z}) \leq y_i \quad (10)$$

với $y_i, (i = 1, \dots, m)$ là các giá trị dương giảm dần tương ứng với hiệu của hàm trạng thái giới hạn $G(\mathbf{Z})$ và $y_m = 0$. Xác suất phá hủy của miền D_f được xác định như sau:

$$\begin{aligned} p_f = P(D_f) &= P(D_m | D_{m-1}) P(D_{m-1}) \\ &= \dots \\ &= P(D_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(D_{i+1} | D_i) \end{aligned} \quad (11)$$

Công thức (11) cho chúng ta thấy rằng, việc tính toán một xác suất phá hủy sẽ được thay thế bằng việc xác định chuỗi các xác suất điều kiện $\{P(D_{i+1} | D_i) : i = 1, \dots, m-1\}$ và $P(D_1)$.

3.2. Quá trình thực hiện

Quá trình thực hiện việc ước lượng xác suất phá hủy cần phải thực hiện 02 công việc chính như sau:

- Thiết lập các miền phá hủy trung gian D_i bằng cách chọn các ngưỡng phá hủy trung gian y_i . Theo kinh nghiệm của Au và Beck [7], [8], kích thước miền phá hủy trung gian được chọn sao cho $P(D_{i+1} | D_i) \approx 0,1 \rightarrow 0,2$

- Ước lượng các xác suất điều kiện $P(D_{i+1} | D_i)$ bằng cách sử dụng phương pháp mô phỏng xích Markov Monte Carlo dựa vào thuật toán Metropolis - Hastings.

3.3. Lựa chọn miền phá hủy trung gian

Ví dụ, giả sử chúng ta xét 3 miền trung gian và các xác suất $P(D_1), P(D_{i+1} | D_i) \approx 0,1$ thì xác suất phá hủy sẽ là $p_f = P(D_f) = 10^{-4}$. Nếu dự kiến hệ số biến thiên là $c_v = 10\%$, thì số lần mô phỏng cần thiết để đạt xác suất bằng 0,1 (trong mỗi tập con) là $\frac{1}{10^{-1} \times 0,1^2} = 1 \times 10^3$, vì vậy để đạt xác suất 10^{-4} , thì phương pháp MCMC chỉ cần tối thiểu $N_{\min}^{\text{MCMC}} \approx 4 \times 10^3$ mô phỏng. Trong khi đó, đối với phương pháp Monte Carlo, thì xác suất phá hủy này là quá bé và

cần phải có ít nhất là $N_{\min}^{\text{MCS}} \approx \frac{1}{10^{-4} \times 0,1^2} = 10^6$.

Tóm lại, để ước lượng xác suất là bé, thì đồng nghĩa với việc cần phải xác định các ngưỡng phá hủy trung gian tương ứng với các miền trung gian. Khi đó, giá trị xác suất của các miền trung gian này phải được xác định với một chi phí hợp lý theo số lần mô phỏng.

3.4. Thuật toán Metropolis – Hastings

Thuật toán mô phỏng Metropolis – Hastings được sử dụng để lấy mẫu đáp ứng phân phối $f(x)$ bất kỳ. Mục tiêu của thuật toán này là xây dựng một xích Markov gồm dãy các mẫu ngẫu nhiên sao cho hàm phân phối của nó hội tụ đến hàm phân phối đã cho. Các bước của thuật toán Metropolis – Hastings được tóm lược như sau:

Bước 1: Tạo ra một trạng thái ban đầu từ mật độ xác suất ban đầu nào đó $x^{(0)} \sim q(x) \in D_0$

Bước 2: Với: $i=1, \dots, n$:

- Sinh một trạng thái tiếp theo $x^{(cand)}$ và giả thuyết $x^{(cand)} \sim q(x^{(i)} | x^{(i-1)}) \in D_i$

- Tính xác suất chấp nhận:

$$\alpha(x^{(cand)}, x^{(i-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{f(x^{(cand)})q(x^{(i-1)} | x^{(cand)})}{f(x^{(i-1)})q(x^{(cand)} | x^{(i-1)})} \right\}$$

- Sinh ngẫu nhiên giá trị u theo quy luật phân bố đều trong khoảng $[0,1]$: $u \sim \text{Uniform}(u; 0,1)$

- So sánh:

- Nếu $u < \alpha$ thì chấp nhận trạng thái sinh ngẫu nhiên $x^{(i)} \leftarrow x^{(cand)}$
- Ngược lại thì phủ nhận trạng thái vừa sinh ra và lấy $x^{(i)} \leftarrow x^{(i-1)}$

Chi tiết thuật toán này có thể xem ở tài liệu [9] hoặc [10].

4. Ví dụ minh họa

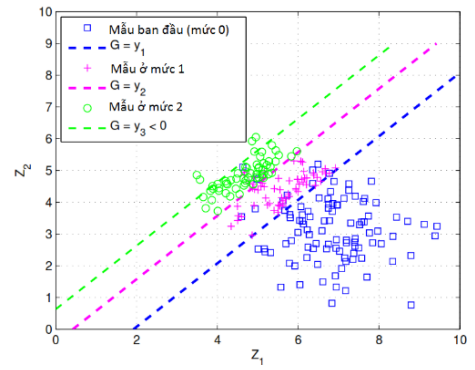
Chúng ta sẽ thực hiện 03 ví dụ, trong đó xem xét lại 02 ví dụ đã được nêu ra trong nghiên cứu của Phoon [11] để kiểm chứng thuật toán và chương trình Matlab và 01 ví dụ kết cấu chịu tải trọng động ngẫu nhiên để minh chứng tính hiệu quả của phương pháp MCMC so với MCS.

4.1. Ví dụ 1: Hàm trạng thái giới hạn tuyến tính

Xét hàm trạng thái phá hủy tuyến tính $G(Z_1, Z_2) = Z_1 - Z_2$, với Z_1 và Z_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập và tuân theo quy luật phân bố chuẩn $Z_1 \sim N(7, 0; 1, 0)$ và $Z_2 \sim N(3, 0; 1, 0)$. Khi đó xác suất phá hủy $p_f = P(G(Z_1, Z_2) \leq 0)$ sẽ được xác định bởi tích phân:

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_{Z_2}(x)) p_{Z_1}(x) dx = 2,339 \times 10^{-3}$$

Mặt khác, áp dụng phương pháp MCMC với thuật toán Metropolis – Hastings đã mô tả ở trên, chúng ta cũng tính được các xác suất phá hủy tương ứng với số lần mô phỏng trong mỗi tập con (miền D_i). Hình 1 mô tả các miền và các ngưỡng phá hủy trung gian.



Hình 1. Miền phá hủy trung gian – Ví dụ 1

Kết quả ước lượng xác suất phá hủy được trình bày ở Bảng 1. Chúng ta nhận thấy khi số lần mô phỏng khoảng hơn 500 lần thì sai số rất bé (nhỏ hơn 5%) của phương pháp MCMC với giá trị ước lượng chính xác bằng phương pháp giải tích.

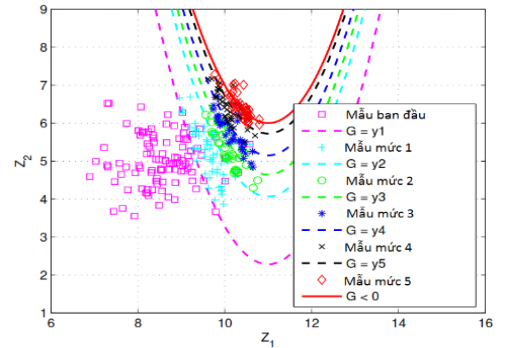
Bảng 1. Xác suất phá hủy - Ví dụ 1

Nsim	100	200	500	1000	2000
$p_f^{\text{MCMC}} \times 10^{-4}$	2,72	2,53	2,43	2,35	2,34
ERR (%)	16,67	8,20	3,97	0,64	0,42

$$\text{ERR} = \frac{|p_f^{\text{MCMC}} - p_f|}{p_f} \times 100\%: \text{sai số tuyệt đối so với phương pháp giải tích}$$

4.2. Ví dụ 2: Hàm trạng thái giới hạn phi tuyến

Tương tự như ví dụ trên, xét hàm trạng thái phá hủy phi tuyến $G(Z_1, Z_2) = (Z_1 - 11)^2 - (Z_2 - 6)$, với Z_1 và Z_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập và tuân theo quy luật phân bố chuẩn $Z_1 \sim N(8, 5; 0, 707)$ và $Z_2 \sim N(5, 0; 0, 707)$.



Hình 2. Miền phá hủy trung gian – Ví dụ 2

Hình 2 và Bảng 2 lần lượt giới thiệu các miền phá hủy trung gian khi sử dụng phương pháp MCMC và các giá trị xác suất phá hủy được ước lượng theo phương pháp MCS và MCMC.

Bảng 2. Xác suất phá hủy – Ví dụ 2

Nsim	100	200	500	1000	2000
$p_f^{\text{MCMC}} \times 10^{-4}$	2,67	3,47	3,34	3,05	3,202
ERR (%)	15,10	10,33	6,21	3,00	1,81

$$\text{ERR} = \frac{|p_f^{\text{MCMC}} - p_f^{\text{MCS}}|}{p_f^{\text{MCS}}} \times 100\%: \text{sai số tuyệt đối so với phương pháp Monte Carlo với } 10^7 \text{ lần mô phỏng}$$

4.3. Ví dụ 3: Kết cấu chịu tác động tải trọng ngẫu nhiên

4.3.1. Mô hình kết cấu

Xét dao động của hệ một bậc tự do phi tuyến Bouc-Wen:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2(\alpha x(t) + (1-\alpha)\omega(t)) = -a(t) \quad (14)$$

$$\text{với } \dot{\omega}(t) = C_1\dot{x}(t) - C_2|\dot{x}(t)|\omega(t)^{n_d-1} - C_3\dot{x}(t)|\omega(t)|^{n_d}$$

Trong đó, ω_0 (rad/s) là tần số góc tự nhiên; ζ là hệ số cản nhớt; $\omega(t)$ chuyển vị (hysteretic displacement) đặc trưng cho tính phi tuyến của hệ Bouc-Wen; α , C_1 , C_2 , C_3 , n_d là các hằng số; $a(t)$ là gia tốc nền và g là gia tốc trọng lực. Giá trị tham số số được sử dụng từ tài liệu [12]: $\omega_0=5,9$ (rad/s), $\zeta=2\%$; $n_d=1$; $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0.5$ cm, $\alpha=0,1$.

4.3.2. Mô hình tải trọng

Mô hình của Boore [6] được lựa chọn để mô phỏng gia tốc nền của trận động đất trong nghiên cứu này. Theo đó, chuyển động nền đất có thể được đặc trưng bởi một hàm quang phổ $Y(M_0, R, f)$ được kết hợp bởi nguồn gây động đất (E), đường dẫn (P), vị trí đặt công trình (G) và dạng chuyển động (I):

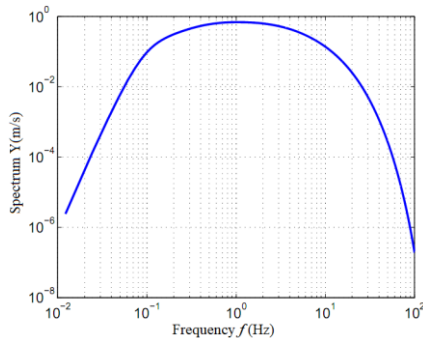
$$Y(M_0, R, f) = E(M_0, f)P(R, f)G(f)I(f) \quad (1)$$

Trong đó, M_0 là mômen địa chấn được xác định thông qua độ lớn (Magnitude) M :

$$M = \frac{2}{3} \log M_0 - 10,7 \quad (2)$$

R là khoảng cách từ tâm động đất đến công trình; f là tần số. Hình 1 biểu diễn một trường hợp phổ của chuyển động nền cho trường hợp $M = 7$ và $R = 9$ (km). Từ phổ $Y(M_0, R, f)$ này, tác giả Boore đã sử dụng phương pháp mô phỏng ngẫu nhiên để tạo ra các gia tốc nền tương ứng. Theo đó, các chuyển động của nền đất tại công trình được phân bố ngẫu nhiên phụ thuộc vào độ lớn trận động đất (M) và khoảng cách truyền sóng (R).

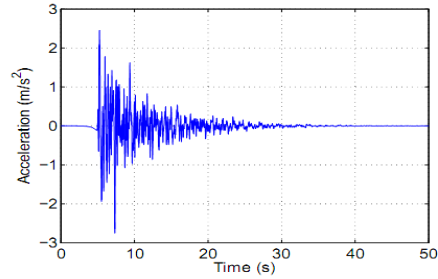
Tính chất ngẫu nhiên của mô hình được đặc trưng bởi một quá trình ngẫu nhiên dùng Gauss thể hiện qua mật độ phổ công suất (Power Spectral Density - PSD). Hàm mật độ của PSD được xem là một dữ liệu đầu vào. Nó bao gồm 2192 điểm (với trường hợp $M=7$ và $R=9$ km), mỗi điểm là một biến ngẫu nhiên tuân theo quy luật phân bố chuẩn. Tài liệu [6] và [13] trình bày chi tiết về các quá trình này.



Hình 3. Minh họa phổ chuyển động nền đất của mô hình Boore với $M=7$ và $R=9$ km

Hình 4 giới thiệu minh họa một gia tốc nền của trận động đất có độ lớn (Magnitude) $M = 7$ và khoảng cách từ

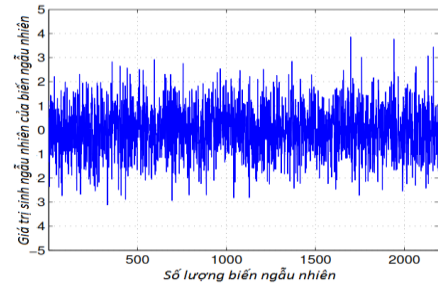
tâm chấn đến công trình đang xét là $R = 9$ km được thực hiện trên Matlab [14].



Hình 4. Gia tốc nền của trận động đất với $M=7$ và $R = 9$ km

4.3.3. Biến ngẫu nhiên và ngưỡng thiệt hại của kết cấu

Trong ví dụ này, với việc sử dụng mô hình Boore để tạo ra gia tốc nền, bài toán sẽ có tất cả 2192 biến ngẫu nhiên tuân theo quy luật phân bố chuẩn. Như vậy, ta có véc tơ BNN $Z = \{Z_1, \dots, Z_{2192}\}$ với $p_{z_i}(z_i) \equiv \text{Normal}(z_i; 0, 1)$.



Hình 5. Chuỗi sinh ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên khi mô phỏng gia tốc nền động đất

Đáp ứng lớn nhất của kết cấu được sử dụng là chuyển vị lớn nhất, do vậy $x_{\max} = \max |x(t)|$. Ngưỡng thiệt hại của hàm trạng thái phá hủy trong công thức (1) ở mục 2 được xem xét là $x_0 = 7,0$ (cm).

4.3.4. Kết quả

Đối với phương pháp Monte Carlo (MCS), chúng ta thực hiện 1×10^5 mô phỏng. Bảng 3 giới thiệu sự hội tụ của xác suất phá hủy theo hàm của số lượng mô phỏng. Bên cạnh đó, khoảng tin cậy 95% cũng được trình bày. Giá trị mục tiêu (với 2×10^5 mô phỏng) của xác suất phá hủy là $2,0 \times 10^{-3}$ và hệ số biến thiên xấp xỉ 0,1.

Đối với phương pháp xích Markov Monte Carlo (MCMC), chúng ta lần lượt thay đổi số lượng mô phỏng trong mỗi tập con từ $N_{\text{Sub}} = 100, 200, \dots, 2000$ để khảo sát. Số lượng càng lớn có nghĩa là hệ số biến thiên trong mỗi tập con sẽ càng nhỏ.

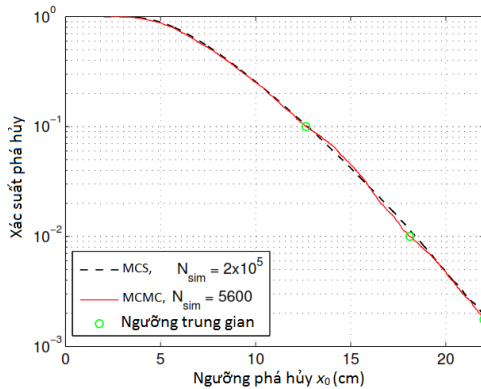
Bảng 3. Giá trị xác suất phá hủy được ước lượng

N_{Sub}	100	200	500	1000	1500	2000	-
m	3	3	3	3	3	3	-
N_{total}	280	560	1400	2800	4200	5600	2×10^5
$p_f^{\text{MCMC}} \times 10^{-3}$	4,10	3,45	2,20	1,16	1,78	1,85	-
$p_f^{\text{MCS}} \times 10^{-3}$	7,14	3,57	3,56	2,85	2,85	2,50	2,00 ^a

Ghi chú: ^aKhoảng tin cậy 95% của xác suất mục tiêu: $[1,80; 2,20] \times 10^{-3}$

Nhìn vào kết quả tính toán, chúng ta dễ dàng nhận ra rằng sự hội tụ của phương pháp tập hợp con là nhanh hơn

rất nhiều so với phương pháp Monte Carlo. Trong khoảng 1400 mô phỏng đầu tiên của phương pháp Monte Carlo, xác suất phá hủy rất không chính xác, trong khi đó kết quả ước lượng của phương pháp tập hợp con rất gần với giá trị mục tiêu. Khi số lượng mô phỏng ≥ 2800 , giá trị xác suất của phương pháp MCMC luôn luôn nằm trong khoảng tin cậy 95% của phương pháp MCS với 2×10^5 mô phỏng.



Hình 5. Quan hệ giữa xác suất phá hủy và ngưỡng phá hủy

Bên cạnh đó, chúng ta dễ dàng thiết lập được mối quan hệ giữa xác suất phá hủy và ngưỡng phá hủy trong trường hợp ngưỡng phá hủy thay đổi. Hình 5 biểu diễn mối quan hệ giữa xác suất phá hủy (p_f) và ngưỡng phá hủy (x_0). Kết quả cho thấy một sự phù hợp rất lớn giữa phương pháp Monte Carlo (đường nét đứt màu đen) và phương pháp MCMC (đường màu đỏ).

5. Kết luận

Như vậy, bài báo đã giới thiệu thuật toán Metropolis – Hasting dùng trong phương pháp xích Markov Monte Carlo (MCMC) và đã ứng dụng trên 3 ví dụ với 2 trường hợp đầu là hàm trạng thái phá hủy cho trước (tuyến tính và phi tuyến) và trường hợp kết cấu chịu tải trọng động với cả hai phương pháp Monte Carlo (MCS) và MCMC. Có thể nhận thấy rằng trong tất cả các trường hợp này, phương

pháp MCMC đều cho kết quả đáng tin cậy khi so với phương pháp MCS với số lần mô phỏng đủ lớn. Đặc biệt khi xác suất bé và số lần mô phỏng hạn chế, phương pháp MCMC sẽ hội tụ nhanh hơn MCS. Điều đó chứng minh khả năng áp dụng và tính hiệu quả của phương pháp xích Markov Monte Carlo với thuật toán Metropolis - Hastings.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Lemaire, A. Chateauneuf, and J. C. Mitteau, *Fiabilité des structures: couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès Science Publications, 2005.
- [2] A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. PPUR presses polytechniques, 1990.
- [3] A. S. Nowak and K. R. Collins, *Reliability of structures*. CRC Press, 2012.
- [4] [N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines", *The journal of chemical physics*, vol. 21, no. 6, pp. 1087–1092, 1953.
- [5] W. K. Hastings, "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications", *Biometrika*, vol. 57, no. 1, pp. 97–109, 1970.
- [6] D. M. Boore, "Simulation of Ground Motion Using the Stochastic Method", *Pure and Applied Geophysics*, vol. 160, no. 3, pp. 635–676, Mar. 2003.
- [7] S.-K. Au and J. L. Beck, "Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation", *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 16, no. 4, pp. 263–277, Oct. 2001.
- [8] S. K. Au, J. Ching, and J. L. Beck, "Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems", *Structural Safety*, vol. 29, no. 3, pp. 183–193, Jul. 2007.
- [9] W. R. Gilks, *Markov chain monte carlo*. Wiley Online Library, 2005.
- [10] G. O. Roberts, "Markov chain concepts related to sampling algorithms", *Markov chain Monte Carlo in practice*, vol. 57, 1996.
- [11] K.-K. Phoon, *Reliability-based design in geotechnical engineering: computations and applications*. CRC Press, 2008.
- [12] C. Kafali and M. Grigoriu, "Seismic fragility analysis: Application to simple linear and nonlinear systems", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 36, no. 13, pp. 1885–1900, 2007.
- [13] C.-T. Dang, "Méthodes de construction des courbes de fragilité sismique par simulations numériques", Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2014.
- [14] C.-T. Dang, *Calcul des courbes de fragilité sismique*. Éditions universitaires européennes, 2015.

(BBT nhận bài: 06/10/2016, phản biện xong: 19/10/2016)