

TÍNH TOÁN ỨNG SUẤT TRONG TẤM PHẪNG CÓ LỖ TRỐNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN MỞ RỘNG

ANALYSIS OF STRESS IN PLANE PLATES WITH HOLES WITH EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD

Nguyễn Mỹ¹, Nguyễn Quang Dự², Lê Cung³

¹Trường Đại học Phú Yên; nguyenvanmyksck@gmail.com

²Trường Cao đẳng Giao thông Vận tải II; nguyenguangdu1978@gmail.com

³Trường Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng; lcung@dut.udn.vn

Tóm tắt - Phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là một phương pháp số mạnh giúp giải quyết các bài toán phức tạp trong kỹ thuật. Tuy nhiên phương pháp này gặp khó khăn trong việc giải các bài toán với miền không liên tục, do yêu cầu phải tái tạo lưới theo các biên không liên tục hay yêu cầu mật độ lưới cao để đạt được độ chính xác mong muốn. Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng được phát triển nhằm giải quyết các nhược điểm nêu trên. Bài báo trình bày phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) nhằm phân tích ứng suất/ biến dạng trong chi tiết dạng tấm có lỗ hình tam giác, lỗ tròn (bài toán hai chiều). Kết quả tính toán được so sánh với kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (sử dụng phần mềm ANSYS) về số phần tử cũng như độ chính xác tính toán.

Từ khóa - tấm phẳng; lỗ tam giác; lỗ tròn; phần tử hữu hạn; phần tử hữu hạn mở rộng.

1. Đặt vấn đề

Phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là phương pháp số mạnh và tin cậy trong việc nghiên cứu dự đoán, mô hình hóa ứng xử của vật liệu, xác định trường ứng suất, biến dạng trong kết cấu cơ khí, cũng như nhiều bài toán khác trong kỹ thuật. Phương pháp này được ứng dụng thành công trong các ngành khoa học kỹ thuật như kỹ thuật hàng không, kỹ thuật môi trường, kỹ thuật xây dựng, kỹ thuật cơ khí, khoa học vật liệu... Hiện nay, công nghệ gia công đắp lớp (công nghệ in 3D), với những bước phát triển vượt bậc, cho phép thiết kế các chi tiết với hình dạng phức tạp, được tối ưu hóa về hình dạng. Việc giải quyết các bài toán thiết kế tối ưu dựa vào phương pháp phần tử hữu hạn còn nhiều hạn chế, vì yêu cầu phải tái tạo lại lưới, cạnh của lưới phần tử phải tương thích với lỗ trống, cũng như yêu cầu mật độ lưới cao để đạt độ chính xác mong muốn.

Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) được phát triển nhằm giải quyết các nhược điểm nêu trên. C. H. Villanueva, K. Maute sử dụng XFEM kết hợp với phương pháp tập mức (LSM) nhằm tối ưu hóa hình dạng hình học của các kết cấu ba chiều, với độ chính xác phù hợp khi sử dụng lưới thô [1]. T.P. Fries, T. Belytschko trình bày tổng quan về XFEM trong tối ưu hóa hình dạng, cho phép xấp xỉ chính xác các lời giải liên quan đến chỗ chuyển tiếp, chỗ thắt, chỗ suy biến, và những không trơn cục bộ trong các phần tử. Phương pháp XFEM có nhiều tiềm năng khi giải các bài toán không trơn, gần bề mặt tiếp giáp, ví dụ mô hình hóa vết nứt, sự lệch mạng tinh thể, hóa rắn... [2]. L. Li, M. Y. Wang, P. Wei đề xuất một số sơ đồ XFEM cho việc tối ưu hóa hình dạng sử dụng LSM, cho kết cấu hai và ba chiều, độ chính xác trên biên của kết cấu vẫn được đảm bảo. Việc sử dụng XFEM bậc cao và chia lưới thô cho độ chính xác tương đương với XFEM bậc thấp nhưng chia

Abstract - The Finite Element Method (FEM) is a powerful analytical tool for solving many problems in stress/strain analysis. However, the FEM method has difficulties in solving the problems of discontinuities because of the need for remeshing and high mesh density. The Extended Finite Element Method (XFEM) was developed to overcome these limitations. In this article, the XFEM method is proposed and applied to analyse stress and strain in plates with triangle and circular holes (2D problem). Calculation results are compared with those calculated by finite element method (using ANSYS software) in number of elements and accuracy. The XFEM gives equivalent results in stress and strain as the traditional FEM but with fewer elements.

Key words - plane plate; triangular hole; circular hole; finite element method; extended finite element method.

lưới mịn hơn [3]. C. Daux et al. ứng dụng XFEM giải các bài toán vết nứt có nhiều nhánh, nhiều vết nứt, và vết nứt xuất phát từ các lỗ [4]. N. Sukumar và cộng sự sử dụng XFEM và LSM để mô hình hóa các lỗ có hình dạng bất kỳ và các bề mặt vật liệu, không chia lưới các biên bên trong, mô phỏng số được thực hiện cho bài toán đàn hồi tĩnh hai chiều, chứng tỏ độ chính xác và tiềm năng của kỹ thuật đề xuất [5]. Ajay Singh et al. tiến hành so sánh FEM và XFEM thông qua bài toán hai chiều trên đĩa có lỗ, với kích thước khác nhau, nhằm đánh giá mức độ tập trung ứng suất trên lỗ [6]. Peng Wei, Michael Yu Wang sử dụng XFEM và LSM nhằm giải bài toán tối ưu hóa hình dạng cho kết cấu hai chiều, cải thiện tính hội tụ và độ chính xác tính toán, không cần chia lại lưới trong quá trình tối ưu hóa, có thể sử dụng lưới thô nhằm giảm thời gian tính toán [7]. Tuy nhiên, các nghiên cứu trong nước hiện nay về việc sử dụng phương pháp XFEM trong thiết kế, tối ưu hóa các chi tiết cơ khí vẫn còn hạn chế.

Bài báo này trình bày phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng trong tính toán ứng suất, biến dạng trong chi tiết dạng tấm có lỗ trống hình tam giác, hình tròn (bài toán hai chiều). Kết quả tính toán được so sánh với kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (sử dụng phần mềm ANSYS) về số phần tử cũng như độ chính xác tính toán.

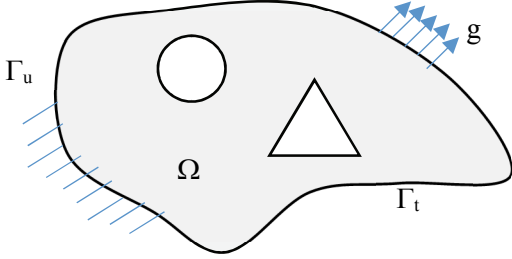
2. Cơ sở của phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng

Xét một miền $\Omega \in R^d$ ($d=2$ hoặc 3) được giới hạn bởi biên $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$, với Γ_u là biên của ngoại lực, Γ_f là biên của chuyển vị (Hình 1) [3].

Phương trình cân bằng và điều kiện biên của bài toán đàn hồi tuyến tính:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma + f = 0 \text{ trong miền } \Omega \\ \sigma \cdot n = g \text{ trên biên } \Gamma_t \\ u = u_0 \text{ trên biên } \Gamma_u \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó: σ : tenxơ ứng suất; f : lực khối; g : ngoại lực; n : vectơ pháp tuyến đơn vị.



Hình 1. Miền bài toán phần tử hữu hạn

Bài toán được xét ở đây có biên dạng và chuyển vị nhỏ, vật liệu đàn hồi tuyến tính. Liên hệ ứng suất và biến dạng trong miền Ω :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon(u) \quad (2)$$

Với u : chuyển vị; ε : biến dạng; C : tenxơ của mô đun đàn hồi.

Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\varepsilon = L u \quad (3)$$

L là phần đối xứng của toán tử gradient.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn cổ điển, trường chuyển vị được xấp xỉ bởi phương trình:

$$u(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i \quad (4)$$

Với: I : tập hợp các nút; u_i : chuyển vị nút; $N_i(x)$: các hàm dạng.

Chuyển vị tại các nút được xác định qua hệ phương trình tuyến tính:

$$K U = F \quad (5)$$

Trong đó: K là ma trận độ cứng tổng thể; F là vectơ tải; U là vectơ chuyển vị nút chưa biết.

Phương pháp XFEM dựa trên việc mở rộng các hàm dạng của phương pháp phần tử hữu hạn để thể hiện miền không liên tục. Biên hình học của miền không liên tục được xấp xỉ bởi hàm dạng mở rộng, do đó lưới phần tử và biên hình học của miền không liên tục độc lập với nhau.

Công thức xấp xỉ trường chuyển vị trong XFEM cho một số trường hợp khác nhau có dạng [3], [5], [7]:

$$u(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_{j \in J} a_j N_j(x) \psi(x) \quad (6)$$

Trong đó: u_i là chuyển vị tại nút không làm giàu (bậc tự do theo FEM), a_j là chuyển vị tại nút làm giàu (bậc tự do tăng thêm), $N_i(x)$, $N_j(x)$ là hàm dạng tương ứng, $\psi(x)$ là hàm làm giàu, I là tập hợp các nút của phần tử, J là tập hợp các nút được làm giàu.

Hàm làm giàu để thể hiện lỗ trống của vật liệu bên trong chi tiết được mô tả trong [5], [7].

Trường chuyển vị xấp xỉ theo phương pháp phần tử mở rộng được biểu diễn bởi biểu thức:

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) V(x) u_i \\ \text{với } V(x) = \begin{cases} 1 & \text{neu } x \in \Omega \\ 0 & \text{neu } x \notin \Omega \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

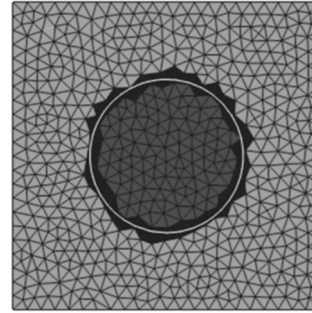
Với Ω là miền chứa vật rắn.

Trên thực tế hàm chuyển vị này không được thực hiện. Thay vào đó là hàm chuyển vị được xấp xỉ theo (4) và loại bỏ đơn thuần tích phân trên phần lỗ trống khi tính toán ma trận độ cứng [3], [7].

Biên không liên tục hay lỗ trống được xác định dựa vào phương pháp tập mức (level set) (Hình 2). Hàm tập mức cho lỗ trống hình tròn dựa vào biểu thức:

$$\phi(x, y) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r_c \quad (8)$$

Trong đó: (x_c, y_c) là tọa độ tâm lỗ tròn; (x, y) là tọa độ của điểm đang xét, r_c là bán kính lỗ tròn. $\phi(x, y) > 0$: điểm nằm ngoài lỗ tròn, $\phi(x, y) < 0$: điểm nằm trong lỗ tròn, $\phi(x, y) = 0$: điểm nằm trên biên lỗ tròn.



- ▲ Phần tử vật rắn
- ▲ Phần tử biên
- ▲ Phần tử biên

Hình 2. Các kiểu phần tử của bài toán lỗ trống

Hàm tập mức cho bài toán lỗ tam giác ABC dựa vào định thức của các cặp vectơ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})$, cùng dấu nếu điểm M thuộc lỗ trống.

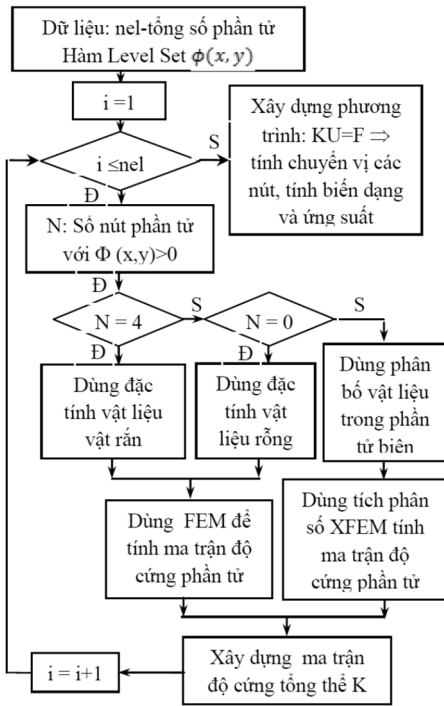
3. Tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng

Sơ đồ thuật toán tính toán theo phương pháp XFEM như trên Hình 3.

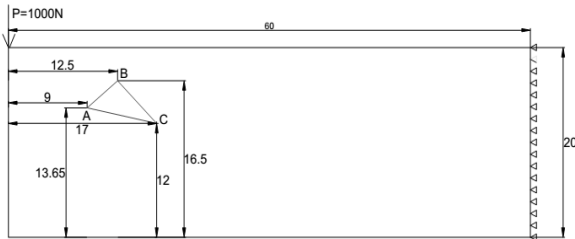
Một số ví dụ về phân tích ứng suất chuyển vị trong bài toán tấm phẳng có lỗ trống là hình tròn và hình tam giác được đưa ra để minh họa khả năng của phương pháp phần tử mở rộng trong việc giải quyết các bài toán có biên không liên tục.

3.1. Bài toán tấm phẳng có lỗ trống hình tam giác

Mô hình bài toán tấm phẳng có lỗ tam giác với các thông số hình học và vật liệu như sau (Hình 4): mô đun đàn hồi của vật liệu $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$, một đầu ngàm, một đầu tự do chịu tải tập trung $P = 1000 \text{ N}$, hệ số Poisson của vật liệu $\nu = 0,3$, bề dày của tấm $t = 5 \text{ mm}$, kích thước tấm $20 \times 60 \text{ mm}^2$.

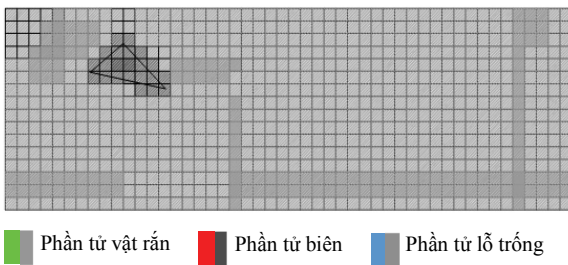


Hình 3. Thuật toán tính toán bằng XFEM



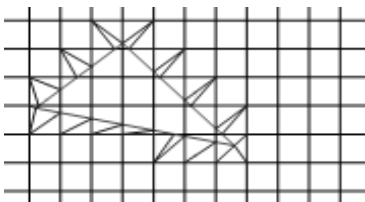
Hình 4. Mô hình bài toán tấm phẳng lỗ tam giác

Mô hình lưới phần tử phân bố đều của bài toán theo phương pháp XFEM sẽ độc lập với biên không liên tục của lỗ trống (Hình 5).



Hình 5. Các loại phần tử của bài toán

Các phần tử biên được chia nhỏ thành các phần tử tam giác, các phần tử này được sử dụng để tính toán ma trận độ cứng của phần tử biên (Hình 6).



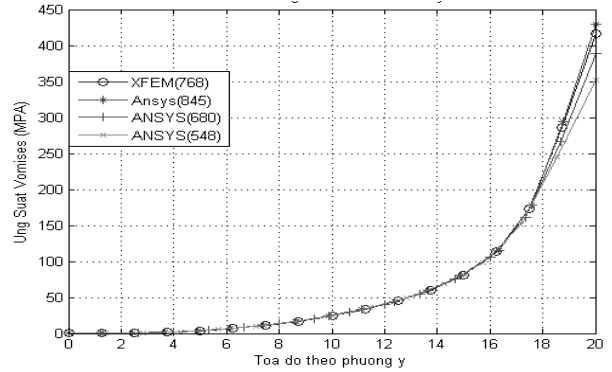
Hình 6. Chia lại phần tử biên bằng các phần tử tam giác

Kết quả tính toán XFEM với 768 phần tử: Ứng suất Von Mises lớn nhất xuất hiện trên tấm là 416.99 MPa. Ứng suất Von Mises xác định tại các đỉnh của lỗ trống ABC: đỉnh A: 66.436 MPa, đỉnh B: 61.679 MPa, đỉnh C: 38.006 MPa (Bảng 1).

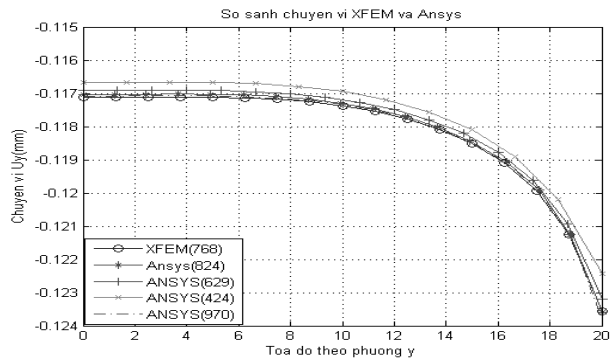
Bảng 1. Kết ứng suất cho bởi XFEM (768 phần tử)

Vị trí	XFEM (MPa)
A	66.436
B	61.679
C	38.006
Von_Mises_{max}	416.99

Hình 7 và Hình 8 trình bày đồ thị biểu diễn ứng suất Von Mises và chuyển vị u_y tại các điểm nằm trên cạnh đứng EF của tấm phẳng, tính toán bằng phương pháp XFEM và phương pháp FEM (ANSYS). Kết quả tính toán bằng XFEM với 768 phần tử và bằng FEM với 845 phần tử xấp xỉ nhau.



Hình 7. So sánh phân bố ứng suất theo cạnh đứng EF của tấm tính toán bằng XFEM và FEM (ANSYS)

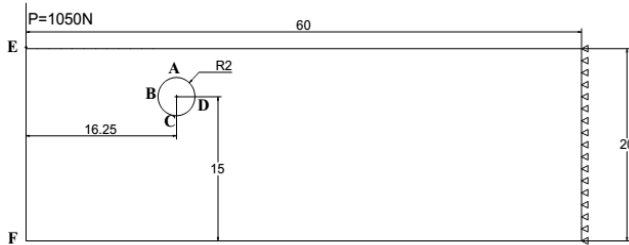


Hình 8. So sánh chuyển vị u_y giữa phương pháp XFEM và FEM(ANSYS) trên cạnh đứng EF của tấm

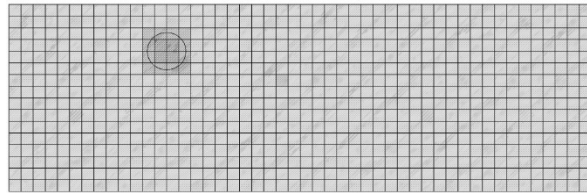
3.2. Bài toán tấm phẳng có lỗ trống hình tròn

Mô hình bài toán tấm phẳng có lỗ hình tròn với các thông số hình học và vật liệu như sau (Hình 9): mô đun đàn hồi của vật liệu $E=2,1.10^6\text{N/mm}^2$, một đầu ngàm, một đầu tự do chịu tải tập trung $P=1000\text{N}$, hệ số Poisson của vật liệu $\nu=0.3$, bề dày của tấm $t=5\text{mm}$, kích thước tấm $20 \times 60\text{ mm}^2$.

Mô hình lưới phần tử phân bố đều của bài toán theo phương pháp XFEM sẽ độc lập với biên không liên tục của lỗ trống (Hình 10).



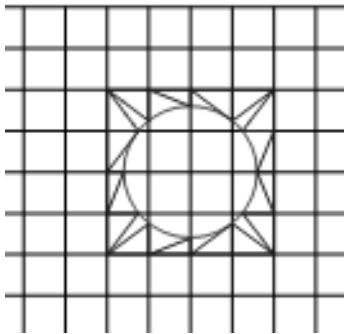
Hình 9. Mô hình bài toán tấm phẳng lỗ tròn



■ Phần tử vật rắn ■ Phần tử biên ■ Phần tử lỗ trống

Hình 10. Các loại phần tử của bài toán

Các phần tử biên được chia nhỏ thành các phần tử tam giác, các phần tử này được sử dụng để tính toán mật độ cứng của phần tử biên (Hình 11).



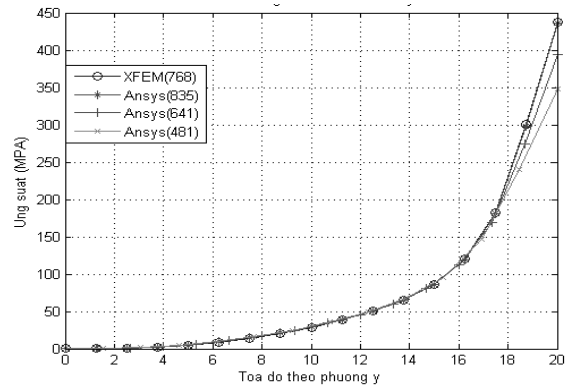
Hình 11. Chia lại phần tử biên bằng các phần tử tam giác

Kết quả tính toán XFEM với 768 phần tử: Ứng suất Von Mises lớn nhất xuất hiện trên tấm là 437.827 MPa. Ứng suất Von Mises xác định tại các đỉnh của lỗ trống ABC: đỉnh A: 92.27 MPa, đỉnh B: 21.92 MPa, đỉnh C: 55.73 MPa, đỉnh D: 28.27 (Bảng 1).

Bảng 2. Ứng suất cho bởi XFEM (768 phần tử)

Vị trí	XFEM (MPa)
A	92.27
B	21.92
C	55.73
D	28.27
VonMises_max	437.827

Kết quả ứng suất tính toán bởi XFEM được so sánh với kết quả ứng suất cho bởi phần mềm ANSYS theo phương pháp FEM truyền thống. Đồ thị biểu diễn sự phân bố ứng suất Von Mises dọc theo cạnh đứng EF của tấm như trên Hình 12. Kết quả cũng cho thấy việc tính toán theo phương pháp XFEM cho kết quả chính xác tương đương với phương pháp FEM nhưng với số phần tử ít hơn, vì vậy tốc độ và thời gian tính toán tăng lên.



Hình 12. So sánh phân bố ứng suất theo cạnh đứng EF

4. Kết luận

Bài báo trình bày phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng trong việc phân tích ứng suất và chuyển vị của bài toán trạng thái ứng suất phẳng hoặc biến dạng phẳng. Phương pháp XFEM có ưu điểm là lưới phần tử có thể tạo ra một cách độc lập với biên không liên tục của chi tiết. Điều này thực hiện được là nhờ vào hàm tập mức dùng để xác định vị trí của các biên không liên tục. Các phần tử trong phương pháp XFEM được chia làm ba loại phần tử là phần tử rắn (FEM truyền thống), phần tử biên (XFEM) và phần tử lỗ trống. Trong đó, phần tử lỗ trống sẽ được loại bỏ trong các tính toán. Phần tử biên sẽ được tiếp tục phân chia để tính toán. Các ví dụ so sánh ban đầu giữa phương pháp XFEM và FEM (ANSYS) cho thấy tiềm năng ứng dụng của phương pháp XFEM khi tính toán các chi tiết có hình dạng biên phức tạp. Kết quả cho thấy độ tin cậy và tính kinh tế của phương pháp XFEM so với FEM truyền thống. Có thể phát triển ứng dụng phương pháp XFEM cho bài toán tấm phẳng có lỗ trống hình dạng bất kỳ (được mô tả bằng đường cong B-Spline hay NURBS), nhằm giải bài toán tối ưu hóa hình dạng của chi tiết dạng tấm hai chiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. H. Villanueva and K. Maute, "Density and level set-XFEM schemes for topology optimization of 3-D structures," *Comput. Mech.*, vol. 54, no. 1, pp. 133–150, Apr. 2014.
- [2] T.-P. Fries and T. Belytschko, "The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 84, no. 3, pp. 253–304, Oct. 2010.
- [3] L. Li, M. Y. Wang, and P. Wei, "XFEM schemes for level set based structural optimization," *Front. Mech. Eng.*, vol. 7, no. 4, pp. 335–356, Dec. 2012.
- [4] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko, "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 48, no. 12, pp. 1741–1760, Aug. 2000.
- [5] N. Sukumar, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko, "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 190, no. 46–47, pp. 6183–6200, Sep. 2001.
- [6] Ajay Singh, Jagdeep Kumar, Vinod Dhull, Deepak Bhardwaj, *Comparative study of FEM and XFEM*, International Journal on Emerging Technologies 4(2): 47-55(2013).
- [7] Peng Wei, Michael Yu Wang, A structural optimization method with XFEM and level set model, Proceedings of the TMCE 2008, Izmir, Turkey, April 21–25, 2008.