

# TỔNG QUAN ỨNG DỤNG CÁC SIÊU PHẦN TỬ (SPT) TRONG PHÂN TÍCH CÔNG TRÌNH CẦU PHỨC TẠP CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CÙNG LÀM VIỆC VỚI NỀN CỌC

GENERAL APPLICATION OF SPT IN ANALYZING COMPLEX BRIDGE WORKS  
IN CONSIDERATION OF THE INFLUENCES ON THE PILE BOTTOM

**Trần Quốc Ca**

*Trường Trung cấp Xây dựng Miền Trung*

Email: tqc0985800277@gmail.com

## TÓM TẮT

Trong thực tế xây dựng hiện đại các công trình phức tạp hầu hết đều là hệ kết cấu siêu tĩnh, gồm nhiều bộ phận cùng làm việc trong một hệ thống nhất. Xu hướng xuất hiện nhiều công trình giao thông như vậy đòi hỏi phải tìm ra sơ đồ tính và các phương pháp phân tích phù hợp. Bài toán hệ thống không gian phức tạp theo sơ đồ rời rạc hóa thường dẫn tới vấn đề phải giải phương trình cỡ lớn nhưng nếu chỉ dùng một vài phần tử hữu hạn, gọi là siêu phần tử (SPT) thì có thể giảm cấp của hệ phương trình giải được thành lập cho toàn bộ kết cấu. Để thực hiện ý đồ thực tế về các SPT cần xây dựng mô hình toán học của chúng, tức là xây dựng ứng lực và chuyển vị tại các nút biên hoặc thành lập các ma trận khác nhau, đặc trưng cho tính chất SPT đó.

Trong nghiên cứu này, tác giả tổng quan ứng dụng các SPT trong phân tích công trình phức tạp có xét đến ảnh hưởng cùng làm việc với nền cọc, trong đó SPT là cọc

**Từ khóa:** Siêu phần tử; SPT; hệ kết cấu siêu tĩnh; cọc; hệ thống không gian phức tạp.

## ABSTRACT

In reality, building modern chamber constructions always requires the application of the hyperstatic structure systems which include many parts. All of them operate and coordinate in a unified system. The main trends of these traffic works require the finding of a computational scheme and suitable analytical methods. The complex spatial system of incoherent outline often leads to the solution of big sets of equations. However, if we only use some points of finite elements which are called super element (SPT), we can reduce the level of solvable sets of equations in order to set for all of the frames. To conduct these practical aims of SPT, we need to build a mathematical model for them. In other words, we should build the stress and the displacement or establish different matrices which represent the features for the nature of that SPT.

In this research, the authors conduct a general application of SPT in analyzing complex structures and examine the influences in consideration of the pile bottom in case SPT is the pile.

**Key words:** Super element; SPT; hyperstatic structure systems; pile; the complex spatial system

## 1. Mở đầu

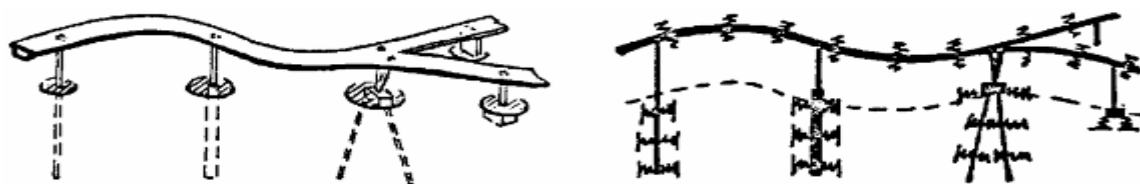
Như đã nói ở trên, kết cấu cầu hiện đại hệ không gian phức tạp gồm nhiều bộ phận liên kết chắc chẽ với nhau và chịu ảnh hưởng tổng hợp của tất cả các yếu tố trong đó xét đến sự làm việc đồng thời của nền cọc là vấn đề phức tạp. Muốn mô tả tính chất của công trình thực hợp lý nhất là biểu diễn mô hình tổng quát của kết cấu nói trên dưới dạng một hệ thanh bất kỳ, liên kết đàn hồi với nhau và tựa trên các liên kết đàn hồi tổng quát, mô hình hóa cho môi trường đất nền (Hình 1). Dưới thuật ngữ “liên kết tổng quát” phải hiểu

là trường hợp chung nhất của véc tơ phản lực gối tựa với 6 thành phần [4], [5].

$$\{R\} = [R_{ux} R_{uy} R_{uz} R_{wx} R_{wy} R_{wz}]^T.$$

## 2. Tổng quan

Nhiều nghiên cứu trước đây đã loại bỏ ảnh hưởng khả năng làm việc đồng thời kết cấu nhịp - trụ mố - móng - nền cọc dẫn đến không phản ánh đúng kết quả làm việc thực tế của công trình.



**Hình 1.** Các mô hình tính toán tổng quát cho một số dạng cầu và công trình giao thông

Ngày nay với sự phát triển công nghệ thông tin thì máy tính với sự trợ giúp của các phần mềm được viết căn cứ vào ngôn ngữ ma trận, do đó việc tính toán khả năng làm việc đồng thời kết cấu nhịp - trụ mố - móng - nền cọc phản ánh đúng thực tế làm việc của công trình hơn.

Trước đây, một số nghiên cứu dùng phương pháp ma trận chuyển tiếp để tính toán công trình nhưng vẫn còn một số hạn chế:

Chưa xét ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái chịu uốn của các bộ phận kết cấu Công trình biển, đặc biệt là nền cọc [2];

Vận dụng phức tạp khi tính hệ có các liên kết không đàn hồi [3];

Khi tính hệ có nhiều đoạn có thể mắc sai số tích lũy do hậu quả làm tròn các số liệu trong quá trình nhân các ma trận [3];

Dùng phương pháp ma trận chuyển tiếp để phân tích kết cấu xét đến sự làm việc chung với đất nền kể đến mức độ ảnh hưởng của lực dọc đến trạng thái chuyển vị nội lực trên nền cọc nhưng chỉ đơn thuần chuyển tiếp để ghép những phần tử đơn giản như dầm mà chưa ghép được với những phần tử phức tạp hơn như tấm, vỏ, khối, solíc... vì rất phức tạp và tính ổn định của bài toán chưa cao. Ở những nghiên cứu đó chỉ dừng lại với việc nối những phần tử một chiều trong mặt phẳng chứ chưa đề cập đến phạm vi nối các phần tử khác nhau trong không gian. Mặc khác, nếu dùng để nối các phần tử như tấm, vỏ, khối... trong không gian là rất phức tạp vì chưa tìm được liên hệ ma trận độ cứng [K] để nối với các phần tử khác nhau theo phương pháp phần tử hữu hạn. Nếu dùng ma trận chuyển tiếp để ghép phần tử dầm với phần tử tấm bằng cách mô hình phần tử tấm thành hai thanh chéo (mô hình giàn ảo) chịu lực trung tâm thì vẫn được nhưng có sai số nên đó là chỉ là phương pháp gần đúng.

Bên cạnh đó một số chương trình máy tính khi mô hình khả năng làm việc đồng thời kết cấu nhịp - trụ mố - móng - nền cọc, trong đó nền cọc được mô hình bằng quan hệ lò xo nhưng phần mềm chỉ hiểu đó là quan hệ độ lún tức thời nhưng thực tế phải cần một khoảng thời gian đủ lâu để cọc có thể lún, như vậy không thể hiện đúng khả năng làm việc thực tế của công trình.

Trong thực tế có rất nhiều phương pháp để tính toán như: phương pháp lực, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp thông số ban đầu,..., mỗi phương pháp đều có những nhược điểm khác nhau, trong đó:

- Phương pháp lực nguyên nhân gây ra kém ổn định thường là lựa chọn hệ cơ bản không hợp lý;

- Trong phương pháp phần tử hữu hạn trên cơ sở phương pháp chuyển vị, sự suy biến của ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu cũng dẫn tới hệ không ổn định;

- Còn về phương pháp thông số ban đầu thì độ kém ổn định có thể xảy ra nếu sự thay đổi các thông số hoặc ngoại lực tác dụng tại đầu này sẽ rất ít ảnh hưởng tới các tham số ở đầu kia.

Vì vậy, nảy sinh vấn đề cần phải cải thiện cách điệu hóa các phương pháp truyền thống nói trên. Thời gian gần đây đã thấy nghiên cứu một số phương pháp đặc biệt, chẳng hạn các loại như: phương pháp hỗn hợp, phương pháp chạy đuổi, phương pháp trực giao hoá..., có hiệu quả khi dùng với các trường hợp riêng khác nhau.

Thực chất của đường lối tính toán kết cấu phức tạp có xét đến ảnh hưởng cùng làm việc với nền cọc (hình 1) trình bày ở đây là như sau:

- Chia mô hình tổng thể của kết cấu ra thành từng phần tử càng lớn càng tốt;

- Nhóm chúng lại thành những siêu phần tử có đặc trưng riêng biệt, bảo đảm ổn định tốt.

Đối với mỗi siêu phần tử (SPT) trước hết lập phương trình phản ánh tính chất bằng phương pháp thông số ban đầu dưới dạng ngôn ngữ ma trận;

- Sau đó, trên cơ sở của điều kiện chập hoặc điều kiện cân bằng tại các phần tử đặc biệt ( $Y-\varepsilon$ ), nối các SPT, sẽ giải quyết bài toán bằng phương pháp Phần tử hữu hạn tương ứng (theo phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị). Đặc biệt nếu có điều kiện thuận lợi cũng có thể dùng phương pháp thông số ban đầu phối hợp với phương pháp chạy đuổi, phương pháp trực giao hoá..., đã cách điệu hóa;

- Khi cứu xét điều kiện ổn định của hệ phương trình giải thì mỗi SPT cần được thiết lập từ một tập hợp Phần tử hữu hạn điển hình có tính chất đàn hồi khác nhau không nhiều lắm. Nếu tại vị trí có khả năng sinh ra nguyên nhân mất ổn định thì thay bằng các nút của SPT.

Trong phương pháp tính toán kiến nghị có thể nói SPT nói trên là “Cơ sở vật chất” trong quá trình phân tích và tổng hợp kết cấu phức tạp. Đối với toàn bộ kết cấu chúng có thể được coi là những cấu trúc con. Thực vậy, về bản chất các SPT chính là những hệ thống riêng bao gồm các phần tử đơn giản hơn nữa. Ở đây các SPT đều có dạng thanh trục bất kỳ trong không gian, còn ( $Y-\varepsilon$ ) là những chỗ giao cắt của 2, 3 hoặc hơn nữa các SPT này. Ngược lại bản thân các SPT có thể có 2 nút biên hoặc nhiều hơn nữa.

Mặc dầu có sử dụng các SPT khác nhau (hình 2), nhưng theo đặc điểm của thủ tục tính toán, phương pháp nghiên cứu các SPT này đầu tiên giống với phương pháp thông số ban đầu. Trong nghiên cứu này, để tạo ra một khả năng sử dụng rộng rãi được các SPT đó trong nhiều phương pháp khác nhau, đã chú ý xây dựng các loại ma trận đặc trưng với mô hình toán học phù hợp cho một số SPT thường dùng trong khi tính toán công trình cầu hệ không gian phức tạp có xét đến ảnh hưởng cùng làm việc với nền cọc.

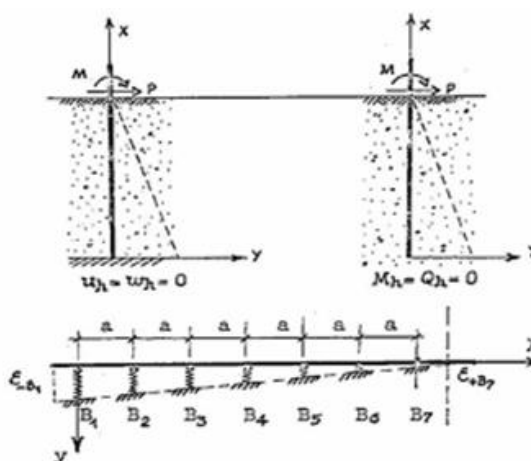
Về phương diện “phương pháp tính” trong nghiên cứu đã sử dụng và phát triển các phương pháp có bản để phân tích và tổng hợp các dạng mới, phức tạp của kết cấu cầu theo hai quá trình:

- Quá trình thứ nhất: quá trình hợp nhất SPT sẽ được xây dựng chủ yếu bằng phương pháp thông số ban đầu hoặc các phương pháp cách điệu;

- Quá trình thứ hai: Quá trình phân tích các cấu trúc con sẽ mang tính chất của phương pháp siêu phần tử hữu hạn (SPTHH) với nghĩa thông thường.

### 3. Bài toán lắp ghép các phần tử và siêu phần tử

Trên cơ sở các ma trận đặc trưng đã xây dựng, cuối cùng là “lắp ráp” các SPT hữu hạn (hoặc PTHH), tức là nối chúng lại với nhau trong sơ đồ nguyên thể theo một thủ tục nhất định tương ứng với mô hình toán được sử dụng.



Hình 2. Siêu phần tử có điều kiện biên

Thủ tục dùng để lắp ráp SPT thực chất là quá trình hợp nhất từng phần các phương trình

ma trận của những SPT riêng biệt. Bởi vậy, tùy thuộc dạng loại ma trận đặc trưng mà sử dụng,

12

Khai triển (7), nhóm các số hạng có chứa cùng một chuyển vị và cùng một nội lực tác dụng tại “biên giới” của SPT ta có:

$$\begin{bmatrix} \pi'_{uu} & -I \\ \pi'_{pu} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \pi'_{up} & 0 \\ \pi'_{pp} & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U' \\ P' \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Từ đó có thể nhận được biểu thức xác định ứng lực biên giới:

$$\begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \pi'_{up} & 0 \\ \pi'_{pp} & -I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \pi'_{uu} & -I \\ \pi'_{pu} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi'_{up} & 0 \\ \pi'_{pp} & -I \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U' \\ P' \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Sau những biến đổi sơ đẳng (9) ta có:

$$\begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi'_{up}\pi'_{uu} & \pi'_{up} \\ \pi'_{pu} - \pi'_{pp}\pi'_{up}\pi'_{uu} & \pi'_{pp}\pi'_{up} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \pi'_{up}\pi'_{uu} \\ \pi'_{pp}\pi'_{up} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U' \\ P' \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Đặt:

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\pi'_{up}\pi'_{uu}; \quad K_{12} = \pi'_{up}; \\ K_{21} &= \pi'_{pu} - \pi'_{pp}\pi'_{up}\pi'_{uu}; \quad K_{22} = \pi'_{pp}\pi'_{up}; \\ f_I &= \pi'_{up}\pi'_{uu}\{U'\}; \quad f_{II} = \pi'_{pp}\pi'_{up}\{U'\} - \{P'\}. \end{aligned}$$

Phương trình (10) viết lại:

$$\begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_I \\ f_{II} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Cách khác ở dạng gọn hơn ta viết được:

$$\{p\} = [K]\{u\} + \{f\}. \quad (11')$$

Mặt khác, xuất phát từ phương trình (8), ta có thể nhận được chuyển vị ở hai đầu SPT dưới dạng khác:

$$\begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \pi'_{uu} & -I \\ \pi'_{pu} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \pi'_{up} & 0 \\ \pi'_{pp} & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi'_{uu} & -I \\ \pi'_{pu} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U' \\ P' \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Thực hiện phép biến đổi sơ đẳng ta có:

$$\begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi'_{pu}\pi'_{pp} & \pi'_{pu} \\ \pi'_{up} - \pi'_{uu}\pi'_{pu}\pi'_{pp} & \pi'_{uu}\pi'_{pu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi'_{pu}\pi'_{pp} \\ -\{U'\} + \pi'_{uu}\pi'_{pu}\pi'_{pp}\{P'\} \end{bmatrix}. \quad (12')$$

Đặt:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\pi'_{pu}\pi'_{pp}; \quad M_{12} = \pi'_{pu}; \quad M_{21} = \pi'_{up} - \pi'_{uu}\pi'_{pu}\pi'_{pp}; \\ M_{22} &= \pi'_{uu}\pi'_{pu}; \quad G_I = \pi'_{pu}\pi'_{pp}\{P'\}; \quad G_{II} = \pi'_{uu}\pi'_{pu}\pi'_{pp}\{P'\} - \{U'\}. \end{aligned}$$

Phương trình (12') viết lại:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_I \\ P_{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_I \\ G_{II} \end{Bmatrix} = [M]\{p\} + \{g\} \quad (12'')$$

Do đó SPT nói trên có thể biểu thị bởi 3 đặc trưng biến dạng khác nhau giới thiệu trong các phương trình (5), (10) và (12'), trong đó quan trọng nhất là các ma trận dạng  $\pi$ , K và M.

Ta nhận thấy có thể thành lập ma trận M bằng cách nghịch đảo ma trận K. Thực vậy, áp dụng công thức nghịch đảo các ma trận 4 khối, trong đó 2 ma trận trên đường chéo chính là các ma trận vuông, ta sẽ có ma trận M.

## 5. Tính toán MTĐC của trụ cọc dẽo

Xây dựng MTĐC của trụ cọc dẽo, ngâm đàn hồi trong môi trường đất (hình 2) với hệ số nền biến thiên theo 1 quy luật bất kỳ, chẳng hạn:

$K_x = K_h(h-x)/h$  và  $K_h = C_h d$ . Biết  $d = 0,24m$ ;  $h = 3,5m$ ;  $C_h = 8330 \text{ T/m}^3$ ;  $EI = 162,8 \text{ T/m}^2$ .

Ta chia trụ cọc dẽo thành 7 phần đều nhau dài 0,5m. Trụ được coi như một dầm liên tục trên các liên kết đàn hồi, để dễ tính toán, ở đây các ma trận đặc trưng được xây dựng với các hệ số không thứ nguyên có các hệ số độ cứng trụ dẽo như sau:

Khi có chuyển vị ngang:

$$\begin{aligned} k_{u1} &= 2,2459; \quad k_{u2} = 1,9000; \quad k_{u3} = 1,5548; \\ k_{u4} &= 1,2093; \quad k_{u5} = 0,8638; \quad k_{u6} = 0,5183; \\ k_{u7} &= 0,1728; \end{aligned}$$

Khi có chuyển vị góc:

$$\begin{aligned} k_{\omega1} &= 2,9945; \quad k_{\omega2} = 2,5338; \quad k_{\omega3} = 2,0731; \\ k_{\omega4} &= 1,6124; \quad k_{\omega5} = 1,1517; \quad k_{\omega6} = 0,691; \\ k_{\omega7} &= 0,2303; \end{aligned}$$

Ma trận T có thể biểu thị dưới dạng không thứ nguyên [3]:

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,5 & -0,166 \\ 0 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy tính toán ta có ma trận  $\pi'$  có dạng:

$$\pi' = \begin{bmatrix} -465,22 & -287,57 & 101,90 & 142,30 \\ 239,93 & -28,89 & -10,97 & -60,35 \\ -3,37 & -287,30 & 67,67 & 22,10 \\ -307,89 & -338,70 & 102,26 & 105,31 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 1 (ngâm cứng tại đầu dưới), tính toán ta có kết quả MTĐC của trụ cọc dẽo:

$$K = \begin{bmatrix} 0,83716 & 1,60923 \\ 1,09353 & 0,83716 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 2 (ngàm đàn hồi tại đầu dưới):

$$K = \begin{bmatrix} 0,83742 & 1,60981 \\ 1,09370 & 0,83742 \end{bmatrix}.$$

Từ ma trận độ cứng(MTĐC) và có xét điều kiện biên tại đầu kia của SPT, ta sẽ nhận được lời giải cho mọi tham số chưa biết.

## 6. Kết luận

Ở bài báo này, giới thiệu tổng quan về thực chất đường lồi và bài toán lắp ghép các SPT là tiền đề để xây dựng ứng dụng các SPT để sử dụng làm cơ sở phân tích kết cấu không gian phức tạp có xét đến ảnh hưởng cùng làm việc với đất nền. Các ma trận đặc trưng đã nhận được của các SPT khác nhau có thể dùng thuận lợi trong quá trình “lắp ráp” theo các phương pháp tương ứng, dựa trên cơ sở sơ đồ hóa thành các siêu phần tử hữu hạn.

Các mô hình toán học khác nhau của SPT có thể sử dụng hiệu quả khi giải hàng loạt kết cấu công trình theo các phương pháp tính tương ứng. Xây dựng mô hình toán học của các SPT đặc trưng có điều kiện biên như: ngàm cứng, ngàm đàn hồi, đầu tự do, gối khớp cầu cố định sẽ được trình bày chi tiết ở bài báo tiếp theo. Ở bài báo này tác giả xây dựng lý thuyết mô hình toán học của SPT dưới dạng tổng quát ở mục 4 và áp dụng tính toán được kết quả MTĐC của trụ dèo ở mục 5. Tất nhiên các công thức này sử dụng trong tính toán kết cấu thường gặp trong thực tế xây dựng.

Kết quả nhận được có thể phát triển để xây dựng những siêu phần tử cấp cao, bằng cách tổ hợp từ các loại siêu phần tử cùng hoặc khác loại, chẳng hạn, SPT có dạng chu tuyến khép kín, SPT phân nhánh có các điều kiện biên ở 1 hoặc nhiều đầu, SPT dạng 2 chiều,...

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Th.S. Trần Quốc Ca - GS.TSKH. Nguyễn Trâm, *Phương pháp phần tử hữu hạn và các ứng dụng trong tính toán kỹ thuật*, Nhà xuất bản Xây dựng, 2013.
- [2] TS. Phan Dũng, “Tính toán công trình bên trên nền cọc theo sơ đồ khung phẳng bằng phương pháp ma trận chuyển tiếp”, *Tạp chí Biển & Bờ, No 3+4/2010, Hội Cảng - Đường thủy - Thềm lục địa Việt Nam, VAPO, Hà Nội*, 2010, trang 35 - 56.
- [3] Ths. Lều Mộc Lan - GS.TS. Lều Thọ Trình, *Cách sử dụng ngôn ngữ ma trận trong lý thuyết tính hệ thanh*, Nhà xuất bản Xây dựng, 2007.
- [4] GS.TSKH. Nguyễn Trâm, Dao động của kết cấu dạng khung có trụ cọc làm việc đồng thời với đất nền, *Báo cáo tại Hội nghị Khoa học lần thứ VII*, Tập 1, trường Đại học Xây dựng, 1987, trang 83 - 88.
- [5] GS.TSKH. Nguyễn Trâm, “Các ma trận đặc trưng của phần tử cong phẳng trong tính toán kết cấu công trình”, *Tạp chí Khoa học Kiến trúc và Xây dựng, Số 1, trường đại học Kiến trúc Hà Nội*, 1997, trang 85 - 88.
- [6] Fleischer CC, Petyt M, “Free vibration of a curved beam”, *J Sound Vib*, No. 18(1), 1971, pp.17-34.
- [7] Jasmeet Singh - Suman Samal, *Transfer Matrix Analysis*, Dept. of Civil Engineering National Institute of Technology Rourkela, 2008.

(BBT nhận bài: 02/07/2013, phản biện xong: 03/09/2013)