

ỨNG DỤNG THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NHANH NHẤT TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI ĐA PHƯƠNG TIỆN TUYẾN TÍNH ĐỒNG THỜI CHI PHÍ CỰC TIỂU TRÊN MẠNG GIAO THÔNG MỞ RỘNG

APPLICATION OF THE FASTEST PATH ALGORITHM TO FINDING MAXIMUM
CONCURRENT MULTICOMMODITY LINEAR FLOW WITH MINIMAL COST
ON EXTENDED TRAFFIC NETWORK

Trần Quốc Chiến

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Email: tqchien@dce.udn.vn

TÓM TẮT

Đồ thị và mạng mở rộng là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, [7]. Kết quả chính của bài báo là nghiên cứu thuật toán tìm luồng cực đại đa phương tiện tuyến tính đồng thời chi phí cực tiểu trên mạng giao thông mở rộng, sử dụng thuật toán tìm đường đi nhanh nhất trên mạng giao thông mở rộng [6]. Trên sơ sở bài toán đối ngẫu trong [7], tác giả xây dựng thuật toán đưa tỉ lệ hàm mục tiêu hai bài toán đối ngẫu này tiến đến 1, và từ đó suy ra luồng cực đại đồng thời chi phí cực tiểu. Đây là thuật toán tính gần đúng với tỉ lệ xấp xỉ là $(1+\omega)$ với ω dương nhỏ tùy ý. Bài báo phân tích, chứng minh các kết quả và đánh giá độ phức tạp của thuật toán. Chương trình thuật toán được viết bằng ngôn ngữ Java với cơ sở dữ liệu mạng mở rộng cài đặt trong hệ quản trị cơ sở dữ liệu MySQL cho kết quả chính xác.

Từ khóa: đồ thị; mạng; luồng đa phương tiện; tối ưu; xấp xỉ

ABSTRACT

Extended graph and network is a powerful mathematical tool applied in many fields such as transportation, communication, informatics, economy, ... [7]. The main result of this paper is to design a Maximum Concurrent Multicommodity Flow with Minimal Cost algorithm on extended traffic networks using the algorithm to find shortest paths on extended networks [6]. On the basis of the dual linear programming problem studied in [7], the author designs the algorithm to reduce the ratio of objective values of the dual and the primal problems down to 1. Then, it follows the concurrent maximal flow with minimal cost of the origin problem. This algorithm is an approximate algorithm with a $(1+\omega)$ -approximation ratio, where ω is an arbitrary positive. The paper analyses, proves obtained results, as well as evaluates the running time. The algorithm is coded in the programming language Java with extended network database in the database management system MySQL and gives exact result.

Key words: Graph; Network; Multicommodity Flow; Optimization; Approximation

1. Đặt vấn đề

Bài toán tìm luồng cực đại đa phương tiện tuyến tính đồng thời chi phí cực tiểu trên mạng giao thông mở rộng là dạng bài toán quy hoạch tuyến tính được xây dựng ở công trình [7]. Tuy nhiên, sử dụng các phương pháp truyền thống trong quy hoạch tuyến tính sẽ gặp nhiều khó khăn nếu bài toán có nhiều loại phương tiện, nhiều ràng buộc về chi phí, về khả năng thông hành, ... Lý thuyết đồ thị mô hình hóa bài toán này thành bài toán tìm luồng trên mạng. Ứng dụng này làm cho việc giải bài toán trở nên đơn giản và hiệu quả hơn. Vấn đề đặt ra là cần xây dựng một thuật toán tổng quát tìm luồng cực đại

đa phương tiện đồng thời chi phí cực tiểu trên mạng giao thông mở rộng, để có thể áp dụng bài toán này cho các bài toán thực tế phức tạp. Bài viết này sử dụng các khái niệm, ký hiệu, mô hình và kết quả trong công trình [7].

2. Thuật toán

Ký hiệu $f_{ej}(a)$ là luồng phương tiện j đi qua cạnh a , $j = 1, \dots, k$, $a \in E$, $f_{vj}(u, a, a')$ là luồng phương tiện j đi trên cạnh a vào nút u ra cạnh a' , $j = 1, \dots, k$, $u \in V$, $a, a' \in E_u$.

Thuật toán tìm luồng

$F = \{f_{ej}(a), f_{vj}(u, e, e') \mid \forall a \in E, \forall (e, u, e') \in \text{Bảng } b_v, j=1, \dots, k\}$

Luồng F có thể vi phạm ràng buộc về khả năng thông qua cũng như ràng buộc về chi phí. Tuy nhiên, theo mục 3, từ luồng F ta nhận được luồng tối ưu sau khi chia nó cho một hằng số.

Khởi tạo: $fe_j(a)=0 \quad \forall a \in E, \quad fv_j(u,e,e')=0 \quad \forall (e,u,e') \in \text{Bảng } b_v, j=1, \dots, k$

Chọn $\varepsilon > 0$ và $\delta > 0$ (giá trị ε và δ xác định ở phần phân tích sau).

Thuật toán được thực hiện bởi một số giai đoạn, mỗi giai đoạn gồm k vòng lặp (k là số phương tiện). Ở vòng lặp thứ $j, j = 1, \dots, k$, của giai đoạn thứ i ta chuyển $d(j)$ đơn vị phương tiện thứ j qua luồng. Việc này được thực hiện trong một số bước.

Xét bước thứ s . Ký hiệu $length_{i,j}^{s-1}$ là hàm độ dài ở đầu bước thứ s (định nghĩa theo biểu thức (2)) và $p_{i,j}^s$ là đường đi ngắn nhất từ s_j đến t_j theo hàm này. Nghĩa là $p_{i,j}^s$ có độ dài là $length_{i,j}^{s-1}(p_{i,j}^s)$. Đặt $f_{i,j}^s = \min\{c, d_{i,j}^{s-1}\}$, $B_{i,j}^s = b(p_{i,j}^s) \cdot f_{i,j}^s$, trong đó c là khả năng thông qua nhỏ nhất của các cạnh và nút trên $p_{i,j}^s$, $d_{i,j}^{s-1}$ là lượng phương tiện thứ j còn lại cần chuyển qua (trong số $d(j)$ đơn vị cần chuyển qua trong vòng lặp này). Nếu $B_{i,j}^s > B$, thì ta gán lại $f_{i,j}^s = f_{i,j}^s \cdot B / B_{i,j}^s$ và $B_{i,j}^s = B$. Chuyển $f_{i,j}^s$ đơn vị phương tiện thứ j dọc theo $p_{i,j}^s$.

Luồng của phương tiện j sẽ được thay đổi như sau:

$$fe_j(a) = fe_j(a) + f_{i,j}^s \quad \forall a \in p_{i,j}^s \quad \&$$

$$fv_j(u,e,e') = fv_j(u,e,e') + f_{i,j}^s \quad \forall (e,u,e') \in p_{i,j}^s$$

Sau đó ta hiệu chỉnh lại các đại lượng khác như sau:

$$d_{i,j}^s = d_{i,j}^{s-1} - f_{i,j}^s, \quad \varphi_{i,j}^s = \varphi_{i,j}^{s-1} \cdot (1 + \varepsilon \cdot B_{i,j}^s / B),$$

$$le_{i,j}^s(e) = le_{i,j}^{s-1}(e) (1 + \varepsilon \cdot f_{i,j}^s / c_E(e)), \quad \forall e \in p_{i,j}^s,$$

$$lv_{i,j}^s(v) = lv_{i,j}^{s-1}(v) (1 + \varepsilon \cdot f_{i,j}^s / c_V(v)), \quad \forall v \in p_{i,j}^s,$$

$$\begin{aligned} D(le_{i,j}^s, lv_{i,j}^s, \varphi_{i,j}^s) &= \sum_{e \in E} le_{i,j}^s(e) \cdot c_E(e) + \\ &+ \sum_{v \in V} lv_{i,j}^s(v) \cdot c_V(v) + B \cdot \varphi_{i,j}^s = \sum_{e \in E} le_{i,j}^{s-1}(e) \cdot c_E(e) + \varepsilon \cdot \\ &+ \sum_{e \in p_{i,j}^s} le_{i,j}^{s-1}(e) \cdot f_{i,j}^s + \sum_{v \in V} lv_{i,j}^{s-1}(v) \cdot c_V(v) + \varepsilon \cdot \\ &+ \sum_{v \in p_{i,j}^s} lv_{i,j}^{s-1}(v) \cdot f_{i,j}^s \\ &+ B \cdot \varphi_{i,j}^{s-1} + \varepsilon \cdot \varphi_{i,j}^{s-1} \cdot b(p_{i,j}^s) \cdot f_{i,j}^s = \\ D(le_{i,j}^{s-1}, lv_{i,j}^{s-1}, \varphi_{i,j}^{s-1}) + \varepsilon \cdot f_{i,j}^s \sum_{e \in p_{i,j}^s} le_{i,j}^{s-1}(e) + \varepsilon \cdot f_{i,j}^s \\ &+ \sum_{v \in p_{i,j}^s} lv_{i,j}^{s-1}(v) + \varepsilon \cdot f_{i,j}^s \cdot b(p_{i,j}^s) \cdot \varphi_{i,j}^{s-1} \\ &= D(le_{i,j}^{s-1}, lv_{i,j}^{s-1}, \varphi_{i,j}^{s-1}) + \varepsilon \cdot f_{i,j}^s \cdot \\ &dist_j(le_{i,j}^{s-1}, lv_{i,j}^{s-1}, \varphi_{i,j}^{s-1}) \quad (1) \end{aligned}$$

Vòng lặp thứ j của giai đoạn i kết thúc sau $q(i,j)$ bước, khi mà $d_{i,j}^{q(i,j)} = 0$. Tổng luồng gửi qua mạng ở mỗi vòng lặp không vượt quá $d(j)$ và chi phí ở mỗi bước không vượt quá B . Giai đoạn i kết thúc, khi vòng lặp thứ k của giai đoạn i kết thúc.

Hàm đối ngẫu le và lv được tính như sau:

- Hàm đối ngẫu ban đầu:

$$le_{1,0}^0 = \delta / c_E(e), \quad \forall e \in E, \quad lv_{1,0}^0 = \delta / c_V(v), \quad \forall v \in V.$$

- Hàm đối ngẫu ở đầu vòng lặp đầu tiên của mỗi giai đoạn i bằng hàm đối ngẫu ở cuối giai đoạn trước ($i-1$):

$$le_{i,0}^0 = le_{i-1,k}^{q(i-1,k)}, \quad lv_{i,0}^0 = lv_{i-1,k}^{q(i-1,k)}.$$

- Hàm đối ngẫu ở đầu mỗi vòng lặp tiếp theo j của giai đoạn i có giá trị bằng hàm đối ngẫu ở cuối vòng lặp trước ($j-1$) của giai đoạn i :

$$le_{i,j}^0 = le_{i,j-1}^{q(i,j-1)}, \quad lv_{i,j}^0 = lv_{i,j-1}^{q(i,j-1)}.$$

Tương tự,

$$\varphi_{1,0}^0 = \delta / B, \quad \varphi_{i,0}^0 = \varphi_{i-1,k}^{q(i-1,k)}, \quad \varphi_{i,j}^0 = \varphi_{i,j-1}^{q(i,j-1)}.$$

Suy ra

$$D(le_{1,0}^0, lv_{1,0}^0, \varphi_{1,0}^0) = \sum_{e \in E} le_{1,0}^0(e).c_E(e) + \Rightarrow D(i) \leq D(i-1) + \varepsilon.\alpha(i) \quad (2)$$

Tiếp theo, ta có

$$\sum_{v \in V} lv_{1,0}^0(v).c_V(v) + B.\varphi_{1,0}^0$$

$$\frac{D(i)}{\alpha(i)} \geq \beta \Rightarrow \alpha(i) \leq \frac{D(i)}{\beta}$$

Thế vào (2) ta nhận được

$$= \sum_{e \in E} \frac{\delta}{c_E(e)} c_E(e) + \sum_{v \in V} \frac{\delta}{c_V(v)} c_V(v) + B.\delta/B$$

$$= m.\delta + n.\delta + \delta = (m+n+1)\delta$$

với m là số cạnh, n là số nút của mạng.

Ký hiệu $le_i, lv_i, \varphi_i, D(i), \alpha(i)$ là hàm giá trị các đại lượng ở cuối mỗi giai đoạn i . Thuật toán dừng sau giai đoạn t , khi mà $D(t) \geq 1$.

3. Phân tích thuật toán

Đơn giản, ký hiệu $le_{i,j}$ thay cho $le_{i,j}^{q(i,j)}$

, $lv_{i,j}$ thay cho $lv_{i,j}^{q(i,j)}$, $\varphi_{i,j}$ thay cho $\varphi_{i,j}^{q(i,j)}$. Do các biến le, lv và φ luôn tăng sau mỗi bước của mỗi vòng lặp nên tại bước thứ s ($s > 0$) của vòng lặp ta có (sử dụng (1))

$$D(le_{i,j}^s, lv_{i,j}^s, \varphi_{i,j}^s) = D(le_{i,j}^{s-1}, lv_{i,j}^{s-1}, \varphi_{i,j}^{s-1}) +$$

$$\varepsilon.f_{i,j}^s \cdot dist_j(le_{i,j}^{s-1}, lv_{i,j}^{s-1}, \varphi_{i,j}^{s-1}) \leq$$

$$D(le_{i,j}^{s-1}, lv_{i,j}^{s-1}, \varphi_{i,j}^{s-1}) + \varepsilon.f_{i,j}^s \cdot dist_j(le_{i,j}, lv_{i,j}, \varphi_{i,j}).$$

Mặt khác, do tổng luồng trong $q(i,j)$ bước thực hiện ở vòng lặp j là $d(j)$, bằng truy hồi suy ra

$$D(le_{i,j}, lv_{i,j}, \varphi_{i,j}) \leq D(le_{i,j}^0, lv_{i,j}^0, \varphi_{i,j}^0) +$$

$$\varepsilon.d(j).dist_j(le_{i,j}, lv_{i,j}, \varphi_{i,j}) =$$

$$D(le_{i,j-1}, lv_{i,j-1}, \varphi_{i,j-1}) + \varepsilon.d(j).dist_j(le_{i,j}, lv_{i,j}, \varphi_{i,j})$$

$$\leq D(le_{i,j-1}, lv_{i,j-1}, \varphi_{i,j-1}) + \varepsilon.d(j).dist_j(le_{i,k}, lv_{i,k}, \varphi_{i,k})$$

Xét tổng truy hồi k vòng lặp trong giai đoạn thứ i , ta có

$$D(le_{i,k}, lv_{i,k}, \varphi_{i,k}) \leq D(le_{i,0}, lv_{i,0}, \varphi_{i,0}) + \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^k d(j).dist_j(le_{i,k}, lv_{i,k}, \varphi_{i,k})$$

$$= D(le_{i-1,k}, lv_{i-1,k}, \varphi_{i-1,k}) + \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^k d(j).dist_j(le_{i,k}, lv_{i,k}, \varphi_{i,k})$$

$$D(i) \leq D(i-1) + \varepsilon D(i)/\beta \Rightarrow D(i) \leq \frac{D(i-1)}{1-\varepsilon/\beta} \leq$$

$$\frac{D(i-2)}{(1-\varepsilon/\beta)^2} \leq \dots \leq \frac{D(0)}{(1-\varepsilon/\beta)^i}$$

Thế $D(0) = (m+n+1).\delta$ và giả thiết $\beta \geq 1$, với mọi $i \geq 1$ ta có

$$D(i) \leq \frac{(m+n+1).\delta}{(1-\varepsilon/\beta)^i} = \frac{(m+n+1).\delta}{(1-\varepsilon/\beta)} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\right)^{i-1}$$

$$\leq \frac{(m+n+1).\delta}{(1-\varepsilon/\beta)} e^{\frac{\varepsilon(i-1)}{\beta-\varepsilon}} \leq \frac{(m+n+1).\delta}{(1-\varepsilon)} e^{\frac{\varepsilon(i-1)}{\beta-\varepsilon}}$$

Kết hợp điều kiện dừng của thuật toán là $D(t) \geq 1$, ta có

$$1 \leq D(t) \leq \frac{(m+n+1).\delta}{(1-\varepsilon)} e^{\frac{\varepsilon(t-1)}{\beta-\varepsilon}}$$

Suy ra

$$\frac{\beta}{t-1} \leq \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon) \ln \frac{1-\varepsilon}{(m+n+1).\delta}} \quad (3)$$

◊ *Nhận xét:* Trong $(t-1)$ giai đoạn thực hiện thuật toán trên, $\forall j = 1, \dots, k$, ta đã chuyển $(t-1).d(j)$ đơn vị phương tiện qua luồng. Tuy nhiên, luồng đã chuyển có thể vượt quá khả năng thông qua của các cạnh và nút. Bổ đề sau đây giải quyết vấn đề trên.

• **Bổ đề 1.** $\lambda > \frac{t-1}{\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)}$.

Chứng minh. Ban đầu, $le_0 = \delta/c_E(e), \forall e \in E, lv_0 = \delta/c_V(v), \forall v \in V$. Sau $(t-1)$ giai đoạn được thực hiện, ta có $D(t-1) < 1$, tức là $\sum_{e \in E} le_{t-1}(e).c_E(e) + \sum_{v \in V} lv_{t-1}(v).c_V(v) + B.\varphi_{t-1} < 1$.

Suy ra $le_{t-1}(e) < 1/c_E(e) \forall e \in E$ và $lv_{t-1}(v) < 1/c_V(v) \forall v \in V$.

Gọi $fe(e)$ là tổng phương tiện qua cạnh $e \in E$ và $fv(v)$ là tổng phương tiện qua nút $v \in V$ trong $(t-1)$ giai đoạn thực hiện.

Xét cạnh $e \in E$. Giả sử trong quá trình xây dựng luồng $fe(e)$ có $c_E(e)$ đơn vị của luồng được chuyển qua e qua r bước, mỗi bước chuyển g_s phương tiện, $\sum_s g_s = c_E(e)$. Qua mỗi bước $le(e)$ tăng lên thừa số $(1+\varepsilon.g_s/c_E(e))$. Vậy qua r bước $le(e)$ tăng lên thừa số $\prod_s (1+\varepsilon.g_s/c_E(e)) > (1+\varepsilon.$

$$\sum_s g_s / c_E(e) = (1+\varepsilon).$$

Ta thấy, với mọi cạnh $e \in E$, cứ mỗi $c_E(e)$ đơn vị của luồng được chuyển qua e , thì $le(e)$ tăng lên ít nhất một thừa số $(1+\varepsilon)$.

Tương tự, với mọi nút $v \in V$, cứ mỗi $c_V(v)$ đơn vị của luồng được chuyển qua v , thì $lv(v)$ tăng lên ít nhất một thừa số $(1+\varepsilon)$.

Mặt khác, số lần để gửi $c_E(e)$ đơn vị của luồng qua mỗi cạnh $e \in E$ ít nhất là $fe(e)/c_E(e)$ và số lần để gửi $c_V(v)$ đơn vị của luồng qua mỗi nút $v \in V$ ít nhất là $fv(v)/c_V(v)$.

Lúc này, hàm cạnh le và hàm nút lv sẽ thỏa bất đẳng thức sau:

$$le_{t-1}(e) \geq le_0(e). (1+\varepsilon)^{fe(e)/c_E(e)} \quad \forall e \in E \text{ và } lv_{t-1}(v) \geq lv_0(v). (1+\varepsilon)^{fv(v)/c_V(v)} \quad \forall v \in V.$$

Suy ra

$$fe(e) \leq c_E(e). \log_{1+\varepsilon} \frac{le_{t-1}(e)}{le_0(e)} <$$

$$c_E(e). \log_{1+\varepsilon} \frac{1/c_E(e)}{\delta/c_E(e)} = c_E(e). \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \quad \forall e \in E$$

và

$$fv(v) \leq c_V(v). \log_{1+\varepsilon} \frac{lv_{t-1}(v)}{lv_0(v)} <$$

$$c_V(v). \log_{1+\varepsilon} \frac{1/c_V(v)}{\delta/c_V(v)} = c_V(v). \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \quad \forall v \in V.$$

Chia $fe(e)$ cho lượng $\log_{1+\varepsilon}(1/\delta) \quad \forall e \in E$, và chia $fv(v)$ cho lượng $\log_{1+\varepsilon}(1/\delta) \quad \forall v \in V$ ta nhận được luồng chấp nhận.

Ở trên ta phân tích thấy sau $(t-1)$ giai đoạn thực hiện, $\forall j = 1, \dots, k$, ta đã chuyển $(t-1).d(j)$ đơn vị phương tiện qua luồng. Tuy nhiên để luồng chấp nhận, ta phải chia luồng chuyển qua mạng cho lượng $\log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta}$. Vậy, $\forall j = 1, \dots, k$, ta chuyển

$$\frac{t-1}{\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)} d(j), \text{ thì luồng qua mỗi cạnh } e \in E \text{ sẽ}$$

không lớn hơn $c_E(e)$ và luồng qua mỗi nút $v \in V$ sẽ không lớn hơn $c_V(v)$. Vậy, theo bài toán đặt ra ban

$$\text{đầu, ta có } \lambda > \frac{t-1}{\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)}.$$

• **Bổ đề 2.** Cho $\omega > 0$. Khi đó tồn tại ε và δ sao cho luồng tìm được của thuật toán, sau khi chia cho $\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$, là luồng cực đại đồng thời chi phí cực tiểu với tỉ lệ xấp xỉ là $(1+\omega)$.

$$\text{Chứng minh: Đặt } \gamma = \frac{\beta}{t-1} \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta}.$$

Theo bổ đề 1 ta có $\gamma > \beta/\lambda$. Thay $\frac{\beta}{t-1}$ từ (3) vào biểu thức γ ta được

$$\gamma < \frac{\varepsilon \cdot \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta}}{(1-\varepsilon) \ln \frac{1-\varepsilon}{(m+n+1)\delta}} =$$

$$\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon) \ln(1+\varepsilon)} \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1-\varepsilon}{(m+n+1)\delta}}$$

$$\text{Chọn } \delta = \left(\frac{m+n+1}{1-\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \text{ thì tỉ số}$$

$$\frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1-\varepsilon}{(m+n+1)\delta}} = (1-\varepsilon)^{-1}, \text{ và suy ra}$$

$$\gamma < \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2 \ln(1+\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2 (\varepsilon - \varepsilon^2/2)} \leq (1-\varepsilon)^{-3}$$

Mặt khác theo định lý đối ngẫu yếu, ta có $\gamma \geq 1$. Để $\beta/\lambda < (1+\omega)$ ta chọn ε phù hợp sao cho $\gamma < (1+\omega)$. Như vậy, chỉ cần chọn ε thỏa

$(1-\varepsilon)^{-3} \leq 1+\omega \Leftrightarrow \varepsilon \leq 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{1+\omega}}$. Khi đó, giá

trị $\lambda = \frac{t-1}{\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)}$ là trị xấp xỉ cực đại với tỉ lệ

$(1+\omega)$.

• **Bổ đề 3.** Tổng chi phí luồng trong $(t-1)$ vòng lặp không vượt quá $B \cdot \log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$. Nghĩa là, tổng chi phí của luồng sau khi chia cho $\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$ không vượt quá B .

Chứng minh. Ta có $\varphi_{1,0} = \delta B$. Sau $(t-1)$ giai đoạn được thực hiện, ta có $D(t-1) < 1$, tức là

$$\sum_{e \in E} l_{t-1}(e) \cdot c_E(e) + \sum_{v \in V} l_{t-1}(v) \cdot c_V(v) + B \cdot \varphi_{t-1} < 1.$$

Suy ra $\varphi_{t-1} < 1/B$. Hơn nữa, mỗi khi chuyển luồng qua mạng mà tổng chi phí tăng lên B , thì φ tăng lên một thừa số không nhỏ hơn $(1+\varepsilon)$. Vì vậy, gọi x là số lần thuật toán làm tăng chi phí lên B đơn vị, ta có $\varphi_{1,0} \cdot (1+\varepsilon)^x \leq \varphi_{t-1} \leq 1/B \Rightarrow x \leq \log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$.

Vậy tổng chi phí của quá trình thực hiện là $B \cdot \log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$. Khi chia luồng đạt được cho $\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$, ta đồng thời có tổng chi phí giảm đi thừa số $\log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$, thỏa mãn yêu cầu đặt ra của bài toán.

Độ phức tạp thuật toán được trình bày và chứng minh trong mệnh đề sau.

• **Định lý.** Thuật toán tính được luồng xấp xỉ cực đại với tỉ lệ $(1+\omega)$ có độ phức tạp là

$$O(\omega^{-2} \cdot (2k \cdot \log_2 k + m) \cdot \log_2 m \cdot n^3).$$

Trong đó k là số phương tiện, m là số cạnh, n là số nút của mạng.

Chứng minh. Trước tiên, chúng ta tìm số giai đoạn mà thuật toán đã thực hiện. Theo bổ đề

$$1 \text{ và do } \beta = \lambda, \text{ ta có } 1 \leq \gamma = \frac{\beta}{t-1} \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \Rightarrow t \leq$$

$$1 + \beta \cdot \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \Rightarrow t = \left\lceil \beta \cdot \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \right\rceil,$$

trong đó, ε và δ phụ thuộc vào ω . Ngoài ra, t còn phụ thuộc vào β .

$$\text{Nhìn lại, } \beta = \min_i \frac{D(i)}{\alpha(i)} = \frac{\sum_{e \in E} c(e) \cdot l(e)}{\sum_{j=1}^k d(j) \cdot \text{dist}_j(l)}$$

. Ta có thể tăng hoặc giảm β bởi một thừa số r bằng cách nhân các $c(e)$ hoặc các $d(j)$ lên một thừa số r tương ứng (mà việc nhân này sẽ không ảnh hưởng đến kết quả của bài toán, vì sau đó ta có thể giảm hoặc tăng λ bởi thừa số r).

Gọi z_i là luồng cực đại của phương tiện i , $i = 1, \dots, k$. Đặt $z = \min_i z_i/d(i)$. Khi đó z chính là phân số của các yêu cầu cần vận chuyển các phương tiện một cách độc lập. Từ $\beta = \lambda$, suy ra $z/k \leq \beta \leq z$. Ta có thể chia các $c(e)$ hoặc các $d(j)$ cho một số sao cho $z/k = 1$, để thỏa mãn giả thuyết đưa ra ban đầu là $\beta \geq 1$. Lúc này ta cũng có $\beta \leq k$.

$$\text{Đặt } T = 2 \cdot \left\lceil \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \right\rceil \text{ tương ứng với}$$

$\beta \geq 2$. Nếu thuật toán không dừng lại ở T giai đoạn thực hiện, thì chúng ta nhân đôi tất cả các $d(j)$, (tương đương với chia đôi β , nhưng vẫn thỏa $\beta \geq 1$), rồi thực hiện thuật toán tiếp T giai đoạn nữa. Nếu thuật toán vẫn chưa dừng, ta tiếp tục giải pháp trên đến khi thuật toán dừng và lưu ý lúc này vẫn thỏa $\beta \geq 1$.

Ta thấy mỗi khi thực hiện T giai đoạn thì β giảm đi một nửa. Nếu x là số lần thực hiện T giai đoạn, thì β giảm đi một thừa số 2^x . Ta có

$$1 \leq \beta/2^x \Rightarrow 2^x \leq \beta \leq k \Rightarrow x \leq \log_2 k$$

$$\text{Vậy } t = T \cdot x = 2 \cdot \log_2 k \cdot \left\lceil \log_{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta} \right\rceil.$$

$$\text{Thay } \delta = \left(\frac{m}{1-\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \text{ vào ta được}$$

$$t = 2 \cdot \log k \cdot \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \log_{1+\varepsilon} \frac{m}{1-\varepsilon} \right\rceil$$

Mặt khác, mỗi giai đoạn ta thực hiện k vòng lặp, nên số vòng lặp là $k \cdot t$. Hơn thế, ở mỗi vòng lặp, ta thực hiện một số bước. Tiếp theo, ta đi tìm tổng số bước thực hiện của thuật toán. Ở mỗi bước, trừ bước sau cùng của mỗi vòng lặp, ta tăng độ dài của ít nhất một cạnh lên $(1+\varepsilon)$ lần. Xét cạnh e bất kì, ta có $l_0(e) = \delta c(e)$ và $l_i(e) < 1/c(e)$ (do

$D(t-1) < 1$). Gọi $t1$ là số bước thực hiện mà trong đó e là cạnh có khả năng thông qua cực tiểu trên đường được chọn tương ứng, suy ra

$$l_0(e) \cdot (1 + \varepsilon)^{t1} \leq l_t(e) < 1/c(e) \Rightarrow t1 < \log_{1+\varepsilon}(1/\delta)$$

Thay $\delta = \left(\frac{m}{1-\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ vào ta được

$$t1 \leq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \log_{1+\varepsilon} \frac{m}{1-\varepsilon} \right\rceil.$$

Hơn nữa, vì mạng có m cạnh, ta có tổng số bước thực hiện, (trừ số bước sau cùng của mỗi vòng lặp, con số này bằng số vòng lặp), là $m \cdot t1$. Vậy, tổng số bước thực hiện là

$$\begin{aligned} & m \cdot \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \log_{1+\varepsilon} \frac{m}{1-\varepsilon} \right\rceil + 2k \cdot \log_2 k \cdot \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \log_{1+\varepsilon} \frac{m}{1-\varepsilon} \right\rceil \\ &= (2k \cdot \log_2 k + m) \cdot \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \log_{1+\varepsilon} \frac{m}{1-\varepsilon} \right\rceil = \\ & (2k \cdot \log_2 k + m) \cdot \left\lceil \frac{\log_2 m}{\varepsilon \cdot \log_2(1-\varepsilon)} \right\rceil \end{aligned}$$

$$\text{với } \varepsilon \leq 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{1+\omega}} = O(\omega), \text{ trong đó mỗi}$$

bước thực hiện chính là tìm đường ngắn nhất giữa các cặp nút tương ứng. Việc tìm đường ngắn nhất được thực hiện qua k lần thực hiện thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên mạng mở rộng có độ phức tạp là $O(n^3)$ [6], suy ra độ phức tạp của thuật toán là $O(\omega^{-2} \cdot (2k \cdot \log_2 k + m) \cdot \log_2 m \cdot n^3)$.

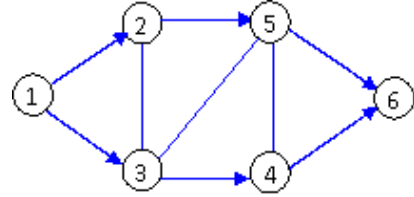
4. Ví dụ

Cho sơ đồ mạng mở rộng ở Hình 1.

Mạng có 6 nút, 6 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng. Chi phí cạnh w_E cho ở Bảng 1 và chi phí nút w_V cho ở Bảng 2.

Khả năng thông hành của mỗi cạnh là 10, khả năng thông hành của mỗi nút là 20. Có 3 cặp nút nguồn đích (1,5), (2,4) và (3,6) với lượng phương tiện tương ứng

$$d(1) = 10, d(2) = 10 \text{ và } d(3) = 10.$$



Hình 1.

Cạnh	w_E
(1,2)	10
(1,3)	9
(2,3)	10
(2,5)	10
(3,4)	15
(3,5)	11
(4,6)	10
(4,5)	10
(5,6)	10

Bảng 1.

Nút	Cạnh 1	Cạnh 2	w_V
2	(1,2)	(2,3)	1
2	(1,2)	(2,5)	1
2	(3,2)	(2,5)	1
3	(1,3)	(3,4)	1
3	(1,3)	(3,5)	1
3	(1,3)	(3,2)	2
3	(5,3)	(3,2)	1
3	(5,3)	(3,4)	1
3	(2,3)	(3,4)	1
3	(2,3)	(3,5)	1
4	(3,4)	(4,6)	1
4	(3,4)	(4,5)	1
4	(5,4)	(4,6)	1
5	(2,5)	(5,3)	1
5	(2,5)	(5,4)	2
5	(2,5)	(5,6)	3
5	(3,5)	(5,4)	1
5	(3,5)	(5,6)	1
5	(4,5)	(5,3)	1
5	(4,5)	(5,6)	1

Bảng 2.

Cho chi phí giới hạn $B = 600$.

Chọn hệ số xấp xỉ $\omega = 0.1$.

Chương trình thuật toán được viết bằng

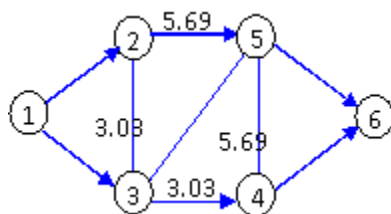
ngôn ngữ Java với cơ sở dữ liệu mạng mở rộng cài đặt trong hệ quản trị cơ sở dữ liệu MySQL. Chương trình cho kết quả phân luồng cực đại như sau:

Hệ số cực đại $\lambda = 0.8723167523$

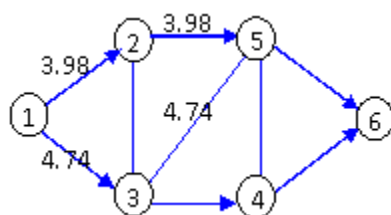
Chi phí thực tế là: 594.3263411978

Số phương tiện được phân luồng cho mỗi cặp nguồn đích là 8.72.

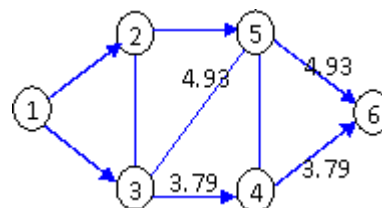
Phân luồng cho phương tiện đi từ nguồn 1 đến đích 5, nguồn 2 đến đích 4 và nguồn 3 đến đích 6 cho tương ứng ở hình 2, hình 3 và hình 4.



Hình 2.



Hình 3.



Hình 4.

5. Kết luận

Thuật toán tìm luồng cực đại đa phương tiện đồng thời chi phí cực tiểu trên mạng mở rộng trình bày ở trên có thể áp dụng giải quyết nhiều vấn đề thực tế có thể đưa về dạng bài toán tối ưu trên mạng đa phương tiện mở rộng, ví dụ như bài toán phân luồng giao thông, vận tải hàng hóa, phân luồng trên mạng internet, lưu hành phương tiện, ... Chương trình thuật toán được viết bằng ngôn ngữ Java với cơ sở dữ liệu mạng mở rộng cài đặt trong hệ quản trị cơ sở dữ liệu MySQL cho kết quả chính xác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Naveen Garg, Jochen Könemann: *Faster and Simpler Algorithms for Multicommodity Flow and Other Fractional Packing Problems*, SIAM J. Comput, Canada, 37(2), 2007, pp. 630-652.
- [2] Trần Quốc Chiến: *Bài toán mạng giao thông đa phương tiện tuyến tính*, Đề tài NCKH cấp Bộ, mã số B2010DN-03-52.
- [3] Trần Quốc Chiến, Trần Thị Mỹ Dung: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất tìm luồng cực đại đa hàng hóa*. *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(44)2011.
- [4] Trần Quốc Chiến: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất đa nguồn đích tìm luồng cực đại đa hàng hóa đồng thời*. *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 4(53)2012.
- [5] Trần Quốc Chiến: *Ứng dụng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất đa nguồn đích tìm luồng cực đại đa hàng hóa đồng thời chi phí cực tiểu*. *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 5(54)2012.
- [6] Trần Quốc Chiến: *Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát*, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 12(61)/2012, 16-21.
- [7] Trần Quốc Chiến: *Mạng giao thông mở rộng và bài toán phân luồng giao thông đa phương tiện tuyến tính*, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*. Submitted.

(BBT nhận bài: 27/07/2013, phản biện xong: 25/09/2013)