

NGHIÊN CỨU VÀ XÂY DỰNG HÀM CƠ SỞ ĐỐI VỚI TOÁN TỬ VI PHÂN BẬC 4 TRONG PHƯƠNG ÁN GIẢI NGHIỆM SỐ CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MÔ-MEN

RESEARCHING AND BUILDING UP BASIS FUNCTIONS FOR FOURTH-ORDER
DIFFERENTIAL OPERATOR IN THE ALGORITHM TO APPROXIMATE SOLUTION
DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE METHOD OF MOMENTS

Lê Minh Hiếu

Trường Đại học Kinh tế, Đại học Đà Nẵng

Email: leminhhieu170386@yahoo.com

TÓM TẮT

Như chúng ta được biết, phương pháp Mô-men [1] [2] là một trong những phương pháp được sử dụng để giải xấp xỉ các phương trình vi phân thường phi tuyến cấp 2. Mấu chốt của phương pháp này là việc lựa chọn các hàm cơ sở sao cho việc tính toán phải dễ dàng và nhận được sơ đồ sai phân có tính ổn định. Với ý tưởng đó, các kết quả ở [4] đã cho thấy việc lựa chọn các hàm cơ sở một cách hiệu quả đã hỗ trợ giải bài toán biên đối với phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 2 tốt hơn. Phát triển vấn đề: bài báo này giới thiệu các hàm cơ sở được chọn đặc biệt đối với các toán tử vi phân bậc 4, nhằm hỗ trợ giải nghiệm số phương trình vi phân bậc 4 bằng phương pháp Mô-men, đồng thời, bài báo còn đưa ra các tính chất đặc biệt của hàm cơ sở cũng như dự đoán các kết quả về hàm cơ sở đối với toán tử vi phân bậc cao.

Từ khóa: giải xấp xỉ; phương pháp Mô-men; hàm cơ sở; toán tử vi phân; bài toán biên

ABSTRACT

As far as we are concerned, the method of moments [1] [2] is one of the methods used to find approximate solutions of second-order nonlinear ordinary differential equations. A key point of this method is the choice of the basic functions so that it is easy to calculate and get the difference scheme which has stability. With that idea, the results in [4] show that the effective choice of basic functions helped solve the boundary value problem for second-order linear ordinary differential equations better. In the development of the issue, this paper introduces the basic functions which are specifically chosen for the fourth-order differential operator so as to support the solving of the fourth-order differential equations by the method of moments. In addition, this article presents the special property of the basic functions as well as predict the results of basic functions for the higher-order differential operator.

Key words: approximate solution; the method of moments; basis function; differential operator; boundary value problem

1. Đặt vấn đề

Phương pháp Mô-men rất hiệu quả khi giải các phương trình vi phân thường phi tuyến cấp 2 và cho kết quả tốt hơn so với các phương pháp cổ điển khác. Chúng ta cùng tìm hiểu sơ qua nội dung chính của phương pháp này. Giả sử cần giải bài toán biên sau:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (1)$$

với điều kiện biên:

$$l_a(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (2)$$

$$l_b(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \quad (3)$$

Giả sử bài toán biên (1) – (3) có nghiệm duy nhất trên $[a, b]$ và khả vi liên tục đến cấp 2. Xét 2 hệ hàm cơ sở:

Hệ 1: Hệ các hàm $\{\psi_k(x)\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$1, \psi_k(x) \in C[a, b], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2, Các hàm $\psi_k(x)$ tạo thành một hệ đóng trên $[a, b]$.

Hệ 2: Hệ các hàm $\{\varphi_k(x)\}$ thỏa mãn

điều kiện:

$$1, \varphi_k(x) \in C[a, b], k = 0, 1, 2, \dots$$

2, Với n hữu hạn bất kì, các hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ độc lập tuyến tính trên $[a, b]$.

3, $\varphi_0(x)$ thỏa mãn điều kiện (2) (3);
 $\varphi_k(x)$ thỏa
 $l_a(\varphi_k) = 0, l_b(\varphi_k) = 0, k = 1, 2, \dots$

4, Các hàm $\varphi_k(x)$ tạo thành một hệ đầy đủ trong các lớp hàm thỏa mãn điều kiện (2) (3) thuộc $C_2[a, b]$.

Phương pháp Mô-men tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (1) – (3) dưới dạng:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (4)$$

Trong đó, các hằng số $a_k, k = \overline{1, n}$ được chọn từ hệ:

$$\int_a^b F_n(x) \psi_k(x) dx = 0, k = \overline{0, n-1}, \quad (5)$$

$$F_n(x) \equiv F(x, y_n, y_n', y_n'').$$

Với ý tưởng đó, ở bài báo [4], tác giả sử dụng các hàm cơ sở đặc biệt để giải phương trình:

$$u''(x) + q(x)u'(x) + p(x)u(x) = f(x), \quad (6)$$

$$x \in [0, 1], u(0) = A, u(1) = B.$$

Trên đoạn $[0, 1]$, ta xây dựng các nút có khoảng cách bằng nhau và bằng h :

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i \mid x_i = ih, h = \frac{1}{2N}, i = \overline{0, 2N} \right\}. \quad (7)$$

Các hàm cơ sở đặc biệt được chọn là:

$$g_i(x) = \begin{cases} x - x_{i-1}; & x \in [x_{i-1}; x_i], \\ -(x - x_{i+1}); & x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0; & x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}], \end{cases} \quad (8)$$

$$i = \overline{1, N-1}.$$

Phương trình (6) được giải dựa vào điều kiện (5), tức là:

$$\int_0^1 g_i(x) L_u dx = 0; i = \overline{1, N-1}, \quad (9)$$

$$L_u = u'' + qu' + pu - f.$$

và tính chất của các hàm cơ sở:

$$\int_0^1 g_i(x) u''(x) dx =$$

$$= u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}), \quad (10)$$

$$i = \overline{1, N-1}, x_i \in \bar{\omega}_h.$$

Vậy thì theo lý thuyết phương pháp Mô-men, các hàm $\varphi_k(x)$ ở đâu và được sử dụng như thế nào? Bản chất của vấn đề ở chỗ, các tích phân $\int_0^1 g_i(x) q(x) u'(x) dx$ và tích phân

$\int_0^1 g_i(x) p(x) u(x) dx$ không thể tính một cách chính xác như ở (10) mà phải sử dụng một công cụ khác là nội suy hàm $u(x)$, và công thức nội suy $u(x)$ được xem là tương tự như với công thức (4), hay nói một cách khác, hàm $u(x)$ được biểu diễn tuyến tính bởi các hàm cơ sở.

Phát triển và mở rộng vấn đề: chúng ta muốn giải các phương trình vi phân bậc 4 bằng phương pháp Mô-men với cách chọn đặc biệt các hàm cơ sở thì tất yếu phải xây dựng các hàm cơ sở đặc biệt, các hàm này phải có tính chất tương tự (10), tức là phải đưa ra được biểu thức chính xác để biểu diễn toán tử vi phân bậc 4 dưới phép toán tích phân trên đoạn $[0, 1]$. Các kết quả trong bài báo này sẽ đề cập đến vấn đề đó.

2. Ý tưởng xây dựng hàm cơ sở đối với toán tử vi phân bậc 4

Để xấp xỉ toán tử vi phân bậc 2 thì cần sử dụng tối thiểu 3 nút x_{i-1}, x_i, x_{i+1} như ở (10). Câu hỏi đặt ra là có thể sử dụng 3 nút này để xấp xỉ toán tử vi phân bậc cao hơn được không? Trả lời câu hỏi này, để đơn giản, ta xét toán tử vi phân bậc ba $u'''(x)$. Ta thử xây dựng hàm cơ sở có dạng tương tự (8), tức là:

$$g_i(x) = \begin{cases} g_{i,-1}(x); & x \in [x_{i-1}; x_i], \\ g_{i,+1}(x); & x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0; & x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}], \end{cases} \quad (11)$$

$$i = \overline{1, N-1},$$

sao cho thỏa mãn:

$$\int_0^1 g_i(x) u'''(x) dx = \quad (12)$$

$$= u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}).$$

Tích phân từng phần về trái và so sánh với các số hạng ở vế phải (12), ta rút ra được các điều kiện để tìm hàm $g_i(x)$ ở (11):

$$g_{i,-1}'''(x) = g_{i,+1}'''(x) = 0, \quad (13)$$

$$g_{i,-1}''(x_{i-1}) = -1, \quad g_{i,+1}''(x_{i+1}) = 1, \quad (14)$$

$$g_{i,-1}''(x_i) - g_{i,+1}''(x_i) = -2, \quad (15)$$

$$g_{i,-1}'(x_{i-1}) = g_{i,+1}'(x_{i+1}) = 0, \quad (16)$$

$$g_{i,-1}(x_{i-1}) = g_{i,+1}(x_{i+1}) = 0, \quad (17)$$

$$g_{i,-1}'(x_i) = g_{i,+1}'(x_i), \quad (18)$$

$$g_{i,-1}(x_i) = g_{i,+1}(x_i). \quad (19)$$

Từ các điều kiện (13) – (17), ta tìm được kết quả:

$$g_{i,-1}(x) = -\frac{1}{2}(x - x_{i-1})^2, \quad (20)$$

$$g_{i,+1}(x) = \frac{1}{2}(x - x_{i+1})^2.$$

Tuy nhiên khi thử lại các điều kiện (18) (19) thì chỉ có điều kiện (18) thỏa mãn và trong kết quả tích phân (12) sẽ có thêm thừa số $-h^2 u''(x_i)$. Như vậy, rõ ràng để xấp xỉ các toán tử vi phân bậc cao (lớn hơn 2) cần phải sử dụng nhiều hơn 3 nút. Quay trở lại vấn đề chính, cần tối thiểu bao nhiêu nút để xấp xỉ toán tử vi phân

bậc 4 như tính chất (10). Câu trả lời sẽ rõ ràng hơn nếu ta làm phép suy logic sau đây. Xét bài toán biên đơn giản sau:

$$u''(x) + pu(x) = f(x), \quad (21)$$

$$p - \text{const}, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = A, \quad u(1) = B.$$

Nhân hàm cơ sở (8) với hai vế của phương trình (21) và tích phân trên đoạn $[0, 1]$, ta được hệ phương trình tuyến tính:

$$QU + p\Lambda U = F, \quad (22)$$

Trong đó, $U = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})'$, $u_n \approx u(x_n)$ ($n = \overline{1, N-1}$), ma trận Q có dạng $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1}$,

, $q_{ii} = -2$, $q_{ij} = 1$ với $|i - j| = 1$, $q_{ij} = 0$ với $|i - j| > 1$, Λ là ma trận nhận được từ việc tính xấp xỉ tích phân $\int_0^1 g_i(x) u(x) dx$, dạng của Λ

tùy vào công thức nội suy hàm $u(x)$, sẽ là ma trận 1 đường chéo nếu $u(x)$ được xấp xỉ bằng công thức Taylor, sẽ là ma trận 3 đường chéo hay 5 đường chéo nếu nội suy $u(x)$ theo công thức Lagrange qua 3 nút hay 5 nút.

Bây giờ xét phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 4 có dạng đơn giản sau:

$$u^{(4)}(x) + \bar{p}u(x) = \bar{f}(x), \quad (23)$$

$$\bar{p} - \text{const}, \quad x \in [0, 1].$$

Nhân hai vế của phương trình (23) với hàm cơ sở cần tìm $g_i^{(4)}(x)$ và tích phân hai vế trên đoạn $[0, 1]$ sẽ nhận được:

$$\bar{Q}U + \bar{p}\bar{\Lambda}U = \bar{F}. \quad (24)$$

Ở đây chúng ta chỉ quan tâm đến ma trận $\bar{Q}$. Nhận thấy rằng $u^{(4)} = (u'')''$, từ đó ta có thể dự đoán $\bar{Q} = Q^2$, tức là cần dùng đến 5 nút. Nói một cách khác, cần phải tìm hàm $g_i^{(4)}(x)$ thỏa mãn:

$$\int_0^1 g_i^{(4)}(x) u^{(4)}(x) dx = u(x_{i-2}) - 4u(x_{i-1}) + 6u(x_i) - 4u(x_{i+1}) + u(x_{i+2}). \quad (25)$$

trong đó, các hệ số $1, -4, 6, -4, 1$ được suy ra từ $\bar{Q} = Q^2$ và tất nhiên hàm $g_i^{(4)}(x)$ phải có dạng:

$$g_i^{(4)}(x) = \begin{cases} g_{i,-2}(x), & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ g_{i,-1}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ g_{i,+1}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ g_{i,+2}(x), & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}], \end{cases} \quad (26)$$

$i = \overline{2, N-2}, x_i \in \bar{\omega}_h.$

3. Xây dựng hàm cơ sở đối với toán tử vi phân bậc 4

Tích phân từng phần về trái và so sánh với các số hạng ở vế phải (25) ta nhận được các điều kiện:

$$g_{i,k}^{(4)}(x) = 0, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad k = -2, -1, 1, 2, \quad (27)$$

$$g_{i,k}^{(j)}(x_{i+k}) = 0, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad k \in \{-2, 2\}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (28)$$

$$g_{i,-2}^{(j)}(x_{i-1}) = g_{i,-1}^{(j)}(x_{i-1}), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (29)$$

$$g_{i,-1}^{(j)}(x_i) = g_{i,+1}^{(j)}(x_i), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (30)$$

$$g_{i,+1}^{(j)}(x_{i+1}) = g_{i,+2}^{(j)}(x_{i+1}), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (31)$$

$$\begin{cases} g_{i,-2}'''(x_{i-2}) = 1, \\ g_{i,+2}'''(x_{i+2}) = 1, \\ g_{i,+1}'''(x_i) - g_{i,-1}'''(x_i) = 6, \\ g_{i,-1}'''(x_{i-1}) - g_{i,-2}'''(x_{i-1}) = -4, \\ g_{i,+2}'''(x_{i+1}) - g_{i,+1}'''(x_{i+1}) = -4. \end{cases} \quad (32)$$

Từ điều kiện (27) ta suy ra hàm $g_i^{(4)}(x)$ có dạng:

$$g_{i,k}(x) = a_{i,k}x^3 + b_{i,k}x^2 + c_{i,k}x + d_{i,k}, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad k \in \{-2, -1, 1, 2\}. \quad (33)$$

Từ điều kiện (32) ta suy ra:

$$a_{i,-2} = \frac{1}{6}; a_{i,+2} = -\frac{1}{6}; a_{i,-1} = -\frac{1}{2}; a_{i,+1} = \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Từ điều kiện (28) ta nhận được hệ phương trình tuyến tính để tìm các hệ số còn lại của hàm $g_{i,-2}(x), g_{i,+2}(x)$:

$$\begin{cases} a_{i,-2} = \frac{1}{6}, \\ 6a_{i,-2}x_{i-2} + 2b_{i,-2} = 0, \\ 3a_{i,-2}x_{i-2}^2 + 2b_{i,-2}x_{i-2} + c_{i,-2} = 0, \\ a_{i,-2}x_{i-2}^3 + b_{i,-2}x_{i-2}^2 + c_{i,-2}x_{i-2} + d_{i,-2} = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} a_{i,+2} = -\frac{1}{6}, \\ 6a_{i,+2}x_{i+2} + 2b_{i,+2} = 0, \\ 3a_{i,+2}x_{i+2}^2 + 2b_{i,+2}x_{i+2} + c_{i,+2} = 0, \\ a_{i,+2}x_{i+2}^3 + b_{i,+2}x_{i+2}^2 + c_{i,+2}x_{i+2} + d_{i,+2} = 0, \end{cases} \quad (36)$$

Giải hai hệ (35) (36) ta nhận được:

$$g_{i,-2}(x) = \frac{1}{6}(x - x_{i-2})^3, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad (37)$$

$$g_{i,+2}(x) = -\frac{1}{6}(x - x_{i+2})^3, \quad i = \overline{2, N-2}. \quad (38)$$

Sử dụng điều kiện (29) ta sẽ tìm được hàm $g_{i,-1}(x)$ với các giá trị $g_{i,-2}(x_{i-1}) = \frac{h^3}{6}$,

$g'_{i,-2}(x_{i-1}) = \frac{h^2}{2}, g''_{i,-2}(x_{i-1}) = h$, tức là ta sẽ nhận được hệ phương trình tuyến tính để tìm các hệ số còn lại của hàm $g_{i,-1}(x)$:

$$\begin{cases} a_{i,-1} = -\frac{1}{2}, \\ 6a_{i,-1}x_{i-1} + 2b_{i,-1} = h, \\ 3a_{i,-1}x_{i-1}^2 + 2b_{i,-1}x_{i-1} + c_{i,-1} = \frac{h^2}{2}, \\ a_{i,-1}x_{i-1}^3 + b_{i,-1}x_{i-1}^2 + c_{i,-1}x_{i-1} + d_{i,-1} = \frac{h^3}{6}. \end{cases} \quad (39)$$

Giải hệ (39) ta nhận được:

$$g_{i,-1}(x) = -\frac{1}{2}(x-x_{i-1})^3 + \frac{h}{2}(x-x_{i-1})^2 + \frac{h^2}{2}(x-x_{i-1}) + \frac{h^3}{6}, \quad i = \overline{2, N-2}. \quad (40)$$

Tương tự, sử dụng điều kiện (31) ta tìm được hàm $g_{i,+1}(x)$:

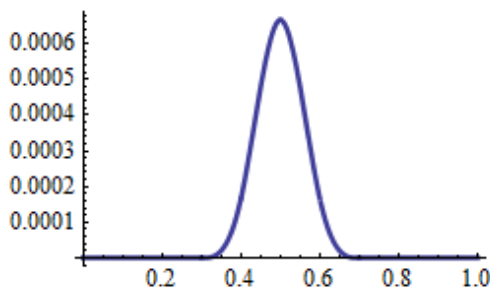
$$g_{i,+1}(x) = \frac{1}{2}(x-x_{i+1})^3 + \frac{h}{2}(x-x_{i+1})^2 - \frac{h^2}{2}(x-x_{i+1}) + \frac{h^3}{6}, \quad i = \overline{2, N-2}. \quad (41)$$

Chúng ta dễ dàng kiểm tra lại tính đúng đắn của việc xây dựng các hàm $g_{i,-2}(x)$, $g_{i,-1}(x)$, $g_{i,+1}(x)$, $g_{i,+2}(x)$ bằng điều kiện (30).

Như vậy, ta đã xây dựng thành công hàm cơ sở $g_i^{(4)}(x)$ đối với toán tử vi phân bậc 4 có dạng (26) với tính chất (25) được biểu diễn dưới dạng giải tích nhờ vào (37) (38) (40) (41).

4. Tính chất đặc biệt và phát triển vấn đề

Chúng ta sẽ vẽ đồ thị hàm cơ sở để thấy được hình dạng của nó như thế nào. Sau đây là kết quả:



Hình 1. Đồ thị hàm cơ sở $g_5^{(4)}(x)$ (26) trên đoạn $[0, 1]$ với bước nhảy $h = 0,1$

Rõ ràng các hàm cơ sở này có dạng tương tự với B-spline tuyến tính [5].

Các hàm cơ sở $g_i^{(2)}(x)$ (8) đối với toán tử vi phân bậc 2 có tính chất (10), các hàm cơ sở $g_i^{(4)}(x)$ (26) đối với toán tử vi phân bậc 4 có tính chất (25). Đây là các tính chất sẽ được ứng dụng cụ thể trong thuật toán Mô-men. Bây giờ ta sẽ tìm hiểu một tính chất đặc biệt khác của các hàm cơ sở này.

Ta đưa vào các kí hiệu đặc biệt:

$$(x-x_i)_+^n = \begin{cases} (x-x_i)^n, & x \geq x_i, \\ 0, & x < x_i, \end{cases} \quad (42)$$

$n \in \mathbb{N}.$

Hàm cơ sở $g_i^{(2)}(x)$ ở (8) có thể viết lại nhờ vào (42):

$$g_i^{(2)}(x) = (x-x_{i-1})_+ - 2(x-x_i)_+ + (x-x_{i+1})_+, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_i \in \bar{\omega}_h. \quad (43)$$

Hàm cơ sở $g_i^{(4)}(x)$ ở (26) có thể viết lại nhờ vào (42):

$$g_i^{(4)}(x) = \frac{1}{3!} \left[(x-x_{i-2})_+^3 - 4(x-x_{i-1})_+^3 + 6(x-x_i)_+^3 - 4(x-x_{i+1})_+^3 + (x-x_{i+2})_+^3 \right] \quad (44)$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh công thức (44) đồng nhất với (37) (38) (40) (41) bằng khai triển giải tích.

So sánh công thức (43) với tính chất (10), công thức (44) với tính chất (25), ta nhận thấy rằng bộ hệ số 1, -2, 1 và bộ hệ số 1, -4, 6, -4, 1 được bảo toàn.

Từ tính chất đặc biệt này, ta có thể dự đoán được hàm cơ sở đối với toán tử vi phân bậc cao và chẵn. Ví dụ, hãy thử dự đoán hàm cơ sở $g_i^{(6)}(x)$ đối với toán tử vi phân bậc sáu $u^{(6)}(x)$. Thay vì có thể tìm nó bằng cách tính tích phân từng phần một cách phức tạp, ta có thể dựa vào tính chất đặc biệt ở trên để dự đoán, sau đó thử lại kết quả. Cụ thể, nhận thấy rằng

$u^{(6)} = (u^{(4)})''$, và số nút tối thiểu phải dùng là 7 nút, do đó, khi sử dụng phương pháp Mô-men, ma trận nhận được phải là Q^3 , vì Q^3 là ma trận 7 đường chéo có dạng: $Q^3 = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1}$, trong đó: $q_{ii} = -20$; $q_{ij} = 15$ với $|i-j|=1$; $q_{ij} = -6$ với $|i-j|=2$; $q_{ij} = 1$ với $|i-j|=3$; $q_{ij} = 0$ với $|i-j| > 3$. Tổng quát, nếu là toán tử vi phân bậc $2n$ ($n \in N^*$) $u^{(2n)}(x)$ thì ma trận nhận được sẽ là Q^n . Quay trở lại với ví dụ trên, từ ma trận Q^3 ta rút ra được bộ hệ số đầy đủ sẽ là 1, -6, 15, -20, 15, -6, 1. Dựa vào tính chất đặc biệt bảo toàn hệ số và cách viết hàm số dựa vào kí hiệu (42), ta dự đoán hàm cơ sở $g_i^{(6)}(x)$ là:

$$g_i^{(6)}(x) = \frac{1}{5!} \left[(x-x_{i-3})_+^5 - 6(x-x_{i-2})_+^5 + 15(x-x_{i-1})_+^5 - 20(x-x_i)_+^5 + 15(x-x_{i+1})_+^5 - 6(x-x_{i+2})_+^5 + (x-x_{i+3})_+^5 \right]. \quad (45)$$

Và tính chất của hàm $g_i^{(6)}(x)$ là:

$$\int_0^1 g_i^{(6)}(x) u^{(6)}(x) dx = u(x_{i-3}) - 6u(x_{i-2}) + 15u(x_{i-1}) - 20u(x_i) + 15u(x_{i+1}) - 6u(x_{i+2}) + u(x_{i+3}). \quad (46)$$

Ta có thể kiểm tra lại kết quả (46) bằng giải tích hoặc có thể sử dụng công cụ lập trình Mathematica.

5. Kết luận

Bài báo đã giới thiệu các kết quả đạt được khi xây dựng hàm cơ sở đối với toán tử vi phân bậc 4 trong phương án giải các phương trình vi phân bằng phương pháp Mô-men, từ đó rút ra được các tính chất đặc biệt giúp dự đoán các hàm cơ sở đối với các toán tử vi phân bậc cao và chẵn. Các hàm này sẽ được ứng dụng linh hoạt để giải các phương trình đạo hàm riêng bậc cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы (Том 2). - М.: Наука, 1977.
- [2] Вакульчик П. А., Методы численного анализа. - Минск: БГУ, 2002.
- [3] Nguyễn Minh Chương (Chủ biên), Nguyễn Văn Khải, Khuất Văn Ninh, Nguyễn Văn Tuấn, Nguyễn Tường, *Giải tích số*. Tái bản lần thứ 2, NXB Giáo dục, 2007.
- [4] Lê Minh Hiếu, Sử dụng các hàm cơ sở đặc biệt trong thuật toán giải nghiệm số phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 2 với điều kiện biên đơn giản, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, số 9(58).2012 Quyển I: 24 – 29.
- [5] Вержбицкий В. М., Основы численных методов: Учебное пособие для вузов. - М.: Высш. шк., 2002.

(BBT nhận bài: 04/08/2013, phản biện xong: 24/08/2013)