

ĐIỀU KIỆN BỊ CHẶN CỦA NGHIỆM ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN VOLTERRA PHI TUYẾN

SOME CONDITIONS FOR BOUNDEDNESS OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEMS

Đặng Lệ Thúy¹, Lê Trung Hiếu², Lê Huỳnh Mỹ Vân¹, Nguyễn Thị Thanh Trúc¹

¹Trường Đại học Công nghệ Thông tin, Đại học Quốc gia Hồ Chí Minh

²Trường Đại học Đồng Tháp; lthieu@dthu.edu.vn

Tóm tắt - Những năm gần đây, bài toán về tính bị chặn của nghiệm đối với các hệ phương trình vi tích phân còn nhiều hạn chế, đặc biệt là các lớp hệ phương trình phi tuyến tổng quát. Trong bài báo này, nhóm tác giả phát triển một số kĩ thuật tiếp cận đã có trong một số tài liệu tham khảo để áp dụng nghiên cứu bài toán về tính bị chặn và tính ổn định mũ của nghiệm đối với hệ phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến phụ thuộc thời gian. Từ đó, thu được một số điều kiện đủ mới và tường minh cho tính bị chặn mũ tới hạn toàn cục của nghiệm đối với một số lớp hệ phương trình vi tích phân Volterra phụ thuộc thời gian. Kết quả đạt được là mở rộng tổng quát của một số kết quả đã có như là các trường hợp đặc biệt của chúng tôi. Cuối cùng, nhóm tác giả đưa ra một ví dụ nhằm minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa - Hệ phương trình vi tích phân Volterra; tính bị chặn của nghiệm; ổn định mũ

Abstract - Recently, problem of boundedness of integro-differential systems has many limitations, especially the classes of general nonlinear systems. In this paper, by improving some existing techniques presented in the references, we study problem of ultimate boundedness and exponential stability of solutions to nonlinear time-varying Volterra integro-differential systems. Then, we obtain some new explicit sufficient conditions for global ultimate boundedness of solutions to some classes of such time-varying Volterra integro-differential systems. The obtained results generalize some existing results in the literature as our particular cases. Ultimately, we present an example to illustrate the obtained results.

Key words - Volterra integro-differential system; ultimately bounded; globally exponentially stable

1. Đặt vấn đề

Phương trình vi tích phân nói chung và phương trình vi tích phân Volterra nói riêng dành được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu, bởi vì chúng có nhiều ứng dụng trong các mô hình toán học, sinh học, kinh tế và các ngành khoa học ứng dụng khác ([1], [2], [9]). Các bài toán về tính bị chặn và tính ổn định của nghiệm đối với các hệ động lực nói chung và hệ phương trình vi tích phân Volterra nói riêng là một trong những bài toán định tính được sự quan tâm nghiên cứu của các tác giả trong và ngoài nước trong những năm gần đây (xem [1], [2], [4]-[10], ...).

Năm 2015, các tác giả trong [10] đã nghiên cứu đưa ra một số điều kiện đủ cho tính bị chặn mũ tới hạn, một định nghĩa mở rộng của ổn định mũ, của hệ phương trình sai phân ngẫu nhiên phi tuyến có chậm. Năm 2017, với một cách tiếp cận khác, các tác giả trong [1] đã đưa ra một số điều kiện đủ tường minh cho tính ổn định tiệm cận, ổn định mũ của nghiệm đối với hệ phương trình vi tích phân Volterra tuyến tính phụ thuộc thời gian. Gần đây, kết quả về ổn định tiệm cận, ổn định mũ cho hệ phương trình vi tích phân phi tuyến đã được nghiên cứu trong [6]. Tuy nhiên, bài toán về tính bị chặn (tới hạn) của nghiệm theo dạng định nghĩa trong [5] chưa được nghiên cứu khai thác đối với lớp hệ phương trình vi tích phân Volterra. Ngoài ra, các kết quả về tính ổn định thường đòi hỏi phương trình vi tích phân cần có điểm cân bằng. Do đó, đối với lớp hệ không thỏa mãn điều kiện này, việc nghiên cứu bài toán ổn định là không khả thi, vì vậy cần nghiên cứu tính chất tổng quát hơn là bị chặn của nghiệm.

Nhằm đóng góp một phần vào giải quyết hạn chế nêu trên, trong bài báo này, nhóm tác giả phát triển các kĩ thuật tiếp cận trong [1] và [10] để nghiên cứu tính bị chặn của lớp hệ phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến phụ thuộc thời gian. Từ đó, đưa ra một số điều kiện mới cho

tính bị chặn mũ tới hạn của lớp hệ này. Kết quả đạt được là mở rộng tổng quát của một số kết quả gần đây.

Sau đây là một số kí hiệu và quy ước được sử dụng trong suốt nội dung bài báo. Gọi $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên, trường số thực và trường số phức. Cho các số nguyên dương l và q , kí hiệu $\mathbb{R}^l$ là không gian vector thực và $\mathbb{R}^{l \times q}$ là tập hợp tất cả các ma trận cỡ $l \times q$ với các số hạng trong $\mathbb{R}$. Cho hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ thuộc $\mathbb{R}^{l \times q}$, khi đó $A \leq B$ tương đương với $a_{ij} \leq b_{ij}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. Đặc biệt, nếu $a_{ij} < b_{ij}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ thì ta viết $A \ll B$. Ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times q}$ được gọi là *ma trận không âm* nếu $a_{ij} \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. Cách hiểu tương tự đối với vector không âm. Kí hiệu $\mathbb{R}_+^{l \times q}$ là tập hợp tất cả các ma trận thực không âm cỡ $l \times q$. Cho m là số nguyên dương, ta kí hiệu θ_m , $\theta_{m \times m}$ và I_m lần lượt là vector không trong $\mathbb{R}^m$, ma trận không và ma trận đơn vị trong $\mathbb{R}^{m \times m}$. Với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ và $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times q}$ ta định nghĩa *giá trị môđun* của vector và ma trận như sau:

$$|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^T \in \mathbb{R}^n \text{ và } |P| = (|p_{ij}|) \in \mathbb{R}^{l \times q}.$$

Trên $\mathbb{R}^n$, ta xét các chuẩn vector sau $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$

với $1 \leq p < \infty$ và $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$. Ta có, mọi chuẩn $\|\cdot\|$ trên $\mathbb{R}^n$ đều là chuẩn đơn điệu ([1]), tức là nếu có

$x, y \in \mathbb{R}^n, |x| \leq |y|$ kéo theo $\|x\| \leq \|y\|$. Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{l \times q}$, chuẩn của toán tử tuyến tính $A: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^l$, $x \mapsto Ax$ xác định bởi $\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, được gọi là *chuẩn ma trận* (operator norm) của ma trận A (gọi tắt là *chuẩn ma trận* của A).

Trong bài báo này, nếu không giải thích gì thêm, chuẩn vectơ trên $\mathbb{R}^n$ là đơn điệu và chuẩn ma trận của $A \in \mathbb{R}^{l \times q}$ được hiểu là chuẩn toán tử liên kết với các chuẩn vectơ đơn điệu trên $\mathbb{R}^l$ và $\mathbb{R}^q$.

Với bất kì $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, hoành độ phổ (spectral abscissa) của M được kí hiệu bởi $\mu(M) = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$, trong đó $\sigma(M) := \{z \in \mathbb{C} : \det(zI_n - M) = 0\}$ là phổ của ma trận M . Ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được gọi là *ma trận Metzler* nếu các phần tử ngoài đường chéo chính của A đều không âm.

Với mỗi $\alpha \geq 0$, đặt $l^\alpha(\mathbb{R}_+^{n \times n})$ là họ các hàm ma trận thỏa mãn điều kiện như sau

$$l^\alpha(\mathbb{R}_+^{n \times n}) := \left\{ B(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^{n \times n}) : \int_0^{+\infty} \|B(t)\| e^{\alpha t} dt < +\infty \right\}.$$

2. Điều kiện cho tính bị chặn của nghiệm đối với hệ phương trình vi tích phân Volterra

Xét hệ phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến phụ thuộc thời gian có dạng như sau

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) + \int_0^t G(t, s)x(s)ds + h(t), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.1)$$

trong đó, $F: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ và $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ là các hàm liên tục cho trước.

Gọi $\mathbb{S}$ là tập hợp các hàm điều kiện đầu $\phi: [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Với mỗi $\phi \in \mathbb{S}$, xét cho hệ (2.1) một điều kiện đầu như sau

$$x(s) = \phi(s), \quad s \in [0, t_0]. \quad (2.2)$$

Nghiệm của hệ (2.1) với điều kiện đầu (2.2), kí hiệu bởi $x(\cdot, t_0, \phi)$, là hàm vectơ khả vi liên tục trên $[t_0, \gamma)$ với $\gamma > t_0$ nào đó và thỏa mãn các đẳng thức (2.1), (2.2) với mọi $t \in [t_0, \gamma)$. Ngoài ra, nếu $[t_0, \gamma)$ là khoảng lớn nhất để tồn tại $x(\cdot, t_0, \phi)$ thì nghiệm $x(\cdot, t_0, \phi)$ được gọi là *không thể kéo dài* (noncontinuable). Áp dụng Bổ đề Zorn ta có tồn tại nghiệm không thể kéo dài và khoảng lớn nhất để tồn tại $x(\cdot, t_0, \phi)$ là khoảng mở ([6]).

Trong suốt bài báo này, ta giả sử rằng điều kiện sau được thỏa mãn:

(H) $F(t, x)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai (biến x) trên bất kỳ tập con compact của $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Khi đó, từ giả thiết (H) của hàm F ta có, với $t_0 \geq 0$ và $\phi \in \mathbb{S}$ cho trước, hệ phương trình vi tích phân (2.1) tồn tại duy nhất nghiệm, thỏa mãn điều kiện đầu (2.2) ([6]).

Định nghĩa 2.1. Hệ phương trình vi tích phân Volterra (2.1) được gọi là *ổn định mũ toàn cục* (globally exponentially stable, viết tắt là GES) nếu tồn tại các hằng số $K, \beta > 0$, sao cho với mỗi $\phi \in \mathbb{S}$, nghiệm $x(t, t_0, \phi)$ của (2.1)-(2.2) thỏa mãn

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq Ke^{-\beta(t-t_0)} \|\phi\|, \quad \forall t \in [t_0, \gamma)$$

Định nghĩa 2.2. Hệ phương trình vi tích phân Volterra (2.1) được gọi là *bị chặn mũ tới hạn toàn cục* (globally exponentially ultimately bounded, viết tắt là GEUB) nếu tồn tại các hằng số $K, \beta > 0, \Upsilon > 0$ sao cho với mỗi $\phi \in \mathbb{S}$, nghiệm $x(t, t_0, \phi)$ của (2.1)-(2.2) thỏa mãn

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq Ke^{-\beta(t-t_0)} \|\phi\| + \Upsilon, \quad \forall t \in [t_0, \gamma)$$

Số Υ được gọi là *biên trên tới hạn* (ultimate upper bound) của hệ phương trình (2.1).

Từ hai định nghĩa nêu trên ta thấy, GES chỉ là trường hợp đặc biệt của GEUB khi $\Upsilon = 0$.

Chú ý rằng, khi $\gamma = \infty$ (tức là miền xác định của nghiệm là $t \geq t_0$) thì Định nghĩa 2.1 và Định nghĩa 2.2 lần lượt trùng với định nghĩa về GES trong [6, Definition 3.7] và định nghĩa về GEUB trong [10, Definition 4.1] tương ứng.

Bổ đề sau đây có vai trò quan trọng, được sử dụng trong phép chứng minh định lý chính của bài báo này.

Bổ đề 2.3 ([1, Theorem 2.2]). Cho $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận Metzler. Khi đó, những mệnh đề sau đây là tương đương:

- (i) $\mu(E) < 0$;
- (ii) Tồn tại $v \in \mathbb{R}^n, v \gg \theta_n$ sao cho $Ev \ll \theta_n$;
- (iii) E khả nghịch và $E^{-1} \leq \theta_{n \times n}$;
- (iv) Cho $v \in \mathbb{R}^n, v \gg \theta_n$. Khi đó, tồn tại $x \in \mathbb{R}_+^n$ sao cho $Ex + v = \theta_n$;
- (v) Cho bất kì $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\theta_n\}$, vector hàng $x^T E$ có ít nhất một phần tử âm.

Định lý sau đây là kết quả chính của bài báo này, cho ta một số điều kiện mới cho tính GEUB của hệ phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến (2.1).

Định lý 2.4. Cho (H) được thỏa mãn và với mỗi $t \in \mathbb{R}_+, F(t, \cdot)$ là hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^n, F(t, \theta_n)$ và $h(t)$ là các hàm bị chặn trên $\mathbb{R}_+$. Giả sử tồn tại $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $B(\cdot) \in l^\alpha(\mathbb{R}_+^{n \times n})$ ($\alpha > 0$) sao cho với bất kì $t \geq 0$ và bất kì $x \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x) \leq a_{ij}, i \in \underline{n}, \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq a_{ij}, i \neq j, i, j \in \underline{n}; \quad (2.3)$$

$$|G(t, s)| \leq B(t-s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+, t \geq s \quad (2.4)$$

Khi đó, nếu $A + \int_0^{+\infty} B(s)ds$ là ma trận thỏa mãn một trong các điều kiện (i)-(v) của Bổ đề 2.3 thì hệ phương trình vi tích phân (2.1) là GEUB.

Trường hợp đặc biệt, khi $F(t, \theta_n) = \theta_n$, $h(t) = \theta_n$, với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ thì hệ phương trình vi tích phân (2.1) là GES.

Chứng minh. Từ cách xác định của A trong (2.4), ta có A là ma trận Metzler. Vì $B(s) \geq \theta_n$, với mọi $s \in \mathbb{R}_+$ nên

$$M := A + \int_0^{+\infty} B(s)ds \text{ là ma trận Metzler. Vì các điều kiện}$$

(i)-(v) trong Bổ đề 2.3 là tương đương, nên từ giả thiết đã cho không làm mất tính tổng quát, ta giả sử ma trận Metzler M có $\mu(M) < 0$.

Giả sử $\phi \in \mathbb{S}$ và $x(t) := x(t; t_0, \phi)$, $t \in [t_0, \gamma)$, là một nghiệm không thể kéo dài của (2.1) và (2.2). Ta cần chứng minh, rằng tồn tại $K, \beta > 0, \Upsilon \geq 0$ sao cho với bất kì $t_0 \geq 0$, ta có

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq Ke^{-\beta(t-t_0)} \|\phi\| + \Upsilon, \quad t \in [t_0, \gamma) \quad (2.5)$$

trong đó K không phụ thuộc vào t, t_0 và ϕ . Vì ma trận Metzler M có $\mu(M) < 0$ nên theo Bổ đề 2.3 (ii), tồn tại $v := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$, với $\alpha_i > 0, i \in \underline{n}$, sao cho

$$Mv \ll \theta_n. \quad (2.6)$$

Hơn nữa, từ (2.6) và $B(\cdot) \in l^\alpha(\mathbb{R}_+^{n \times n})$, suy ra tồn tại $\beta > 0$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức sau xảy ra

$$(A + \int_0^{+\infty} B(s)e^{\beta s} ds)v \ll -\beta v = -\beta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \ll \theta_n. \quad (2.7)$$

Đặt $e_1 := (1 \ 1 \dots 1)^T \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$|\phi(s)| \leq \|\phi\| e_1 \leq \|\phi\| \frac{v}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}.$$

$$\text{Đặt } u(t) = \|\phi\| e^{-\beta(t-t_0)} \frac{v}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + L \frac{v}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}, \quad \text{với}$$

$$t \geq t_0 \text{ và } L = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{\beta} \sup_{t \geq t_0} (|f_i(t, \theta_n)| + h_i(t)) \right\}. \quad (2.8)$$

Kí hiệu $x(t) := x(t, t_0, \phi)$, khi đó từ trên ta có

$$|x(s)| = |\phi(s)| \leq \|\phi\| \frac{v}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} \leq u(s),$$

với mọi $s \in [0, t_0]$.

Tiếp theo ta cần chứng minh $|x(t)| \leq u(t)$, $\forall t \in [t_0, \gamma)$.

Dùng phương pháp chứng minh phản chứng, giả sử ngược lại rằng tồn tại $t_* > t_0$ sao cho $|x(t_*)| \not\leq u(t_*)$. Khi đó, ta có thể đặt $t_1 := \inf \{t_* \in (t_0, \gamma) : |x(t_*)| \not\leq u(t_*)\}$. Bởi vì tính liên tục của hàm $u(t)$ và $x(t)$ nên $t_1 > t_0$ và tồn tại chỉ số $i_0 \in \underline{n}$ sao cho:

$$\begin{cases} |x(t)| \leq u(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \\ |x_{i_0}(t_1)| = u_{i_0}(t_1); \\ |x_{i_0}(t)| > u_{i_0}(t), \quad \forall t \in (t_1, t_1 + \omega_k), \end{cases} \quad (2.9)$$

với $\omega_k > 0$ đủ nhỏ nào đó, $k = 1, 2, \dots$

Đặt $G(t, s) := (g_{ij}(t, s))$ và $B(s) := (b_{ij}(s)) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $t, s \in \mathbb{R}_+$. Áp dụng định lý giá trị trung bình của hàm véc-tơ, ta có với mỗi $t \in \mathbb{R}$ và mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta có

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F_i(t, x(t)) = (F_i(t, x(t)) - F_i(t, \theta_n)) + F_i(t, \theta_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, sx(t)) ds \right) x_j(t) + F_i(t, \theta_n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t g_{ij}(t, s) x_j(s) ds + h_i(t). \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |x_i(t)| &= \text{sgn}(x_i(t)) \dot{x}(t) \\ &= \text{sgn}(x_i(t)) \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, sx(t)) ds \right) x_j(t) \right] \\ &\quad + \text{sgn}(x_i(t)) \left(\sum_{j=1}^n \int_0^t g_{ij}(t, s) x_j(s) ds \right) \\ &\quad + \text{sgn}(x_i(t)) (f_i(t, \theta_n) + h_i(t)) \\ &\leq \left(\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(t, sx(t)) ds \right) |x_i(t)| \\ &\quad + \text{sgn}(x_i(t)) \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, sx(t)) ds \right) x_j(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t |g_{ij}(t, s)| |x_j(s)| ds + |f_i(t, \theta_n)| + h_i(t), \end{aligned}$$

hầu khắp nơi theo t trên $[t_0, \gamma)$. Từ (2.4) và (2.5) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |x_i(t)| &\leq a_{ii} |x_i(t)| + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} |x_j(t)| \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t b_{ij}(t-s) |x_j(s)| ds + |f_i(t, \theta_n)| + h_i(t), \end{aligned}$$

hầu khắp nơi theo t trên $[t_0, \gamma)$.

Ký hiệu $D^+ |x_i(t)|$ là đạo hàm Dini trên - phải của $|x_i(t)|$ tại $t \in [t_0, \gamma)$, ta có

$$\begin{aligned} D^+ |x_i(t)| &:= \limsup_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{|x_i(t+\Delta)| - |x_i(t)|}{\Delta} \\ &= \limsup_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \frac{d}{ds} |x_i(s)| ds. \end{aligned}$$

Theo hệ quả của định lý về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $c \in [t, t+\Delta]$ sao cho

$$\int_t^{t+\Delta} \frac{d}{ds} |x_i(s)| ds = \frac{d}{ds} |x_i(c)| \Delta.$$

Khi đó,

$$D^+ |x_i(t)| = \limsup_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{d}{ds} |x_i(c)| = \frac{d}{dt} |x_i(t)|$$

$$\leq a_{ii} |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_j(t)| + \sum_{j=1}^n \int_0^t b_{ij}(t-s) |x_j(s)| ds$$

$$+ |F_i(t, \theta_n)| + h_i(t).$$

Xét bất đẳng thức vừa chứng minh trên tại $i = i_0$ và $t = t_1$, kết hợp với (2.9), ta có

$$D^+ |x_{i_0}(t_1)| \leq a_{i_0 i_0} u_{i_0}(t_1) + \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} u_j(t_1) + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t-s) u_j(s) ds$$

$$+ |F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1)$$

$$= a_{i_0 i_0} \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + a_{i_0 i_0} L \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$+ \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} L \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t_1-s) \|\phi\| e^{-\beta(s-t_0)} \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} ds$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t_1-s) L \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} ds$$

$$+ |F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1)$$

$$= \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} L \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$+ \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t_1-s) e^{-\beta(s-t_1)} \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} ds$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t_1-s) L \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} ds$$

$$+ |F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1).$$

Mặt khác, ta có

$$L \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t_1-s) ds \right) \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$+ |F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1).$$

$$= L \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(z) dz \right) \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$+ |F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1).$$

$$\leq L \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} b_{i_0 j}(z) dz \right) \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + |F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1).$$

$$\stackrel{(2.7), (2.8)}{<} L(-\beta) \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + (|F_{i_0}(t_1, \theta_n)| + h_{i_0}(t_1)) \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$\leq L(-\beta) \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + \beta L \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} = 0.$$

Do đó,

$$D^+ |x_{i_0}(t_1)|$$

$$< \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(t_1-s) e^{-\beta(s-t_1)} ds \right) \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$= \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_1} b_{i_0 j}(z) e^{\beta z} dz \right) \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$\leq \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} b_{i_0 j}(z) e^{\beta z} dz \right) \frac{\alpha_j}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}$$

$$\stackrel{(2.7)}{<} \|\phi\| e^{-\beta(t_1-t_0)} (-\beta) \frac{\alpha_{i_0}}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} = D^+ u_{i_0}(t_1).$$

Điều này mâu thuẫn với (2.9). Do đó,

$$|x(t, t_0, \phi)| \leq u(t) = \|\phi\| e^{-\beta(t-t_0)} \frac{\nu}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + L \frac{\nu}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}.$$

Vì tính đơn điệu của chuẩn vector nên ta có

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq \|u(t)\| \leq \|\phi\| e^{-\beta(t-t_0)} \frac{\|v\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} + L \frac{\|v\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}},$$

$$\forall t \in [t_0, \gamma).$$

Đặt

$$K = \frac{\|v\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}, \quad Y = L \frac{\|v\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}}.$$

Vậy ta được

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq \|u(t)\| \leq K \|\phi\| e^{-\beta(t-t_0)} + Y, \quad \forall t \in [t_0, \gamma).$$

Sau cùng, ta cần chứng tỏ rằng nghiệm $x(t, t_0, \phi)$ xác định trên $[t_0, \infty)$, tức là cần chứng minh $\gamma = \infty$. Khi đó, (2.1) là GEUB. Giả sử ngược lại rằng $\gamma < \infty$. Khi đó, vì (2.5) nên nghiệm $x(t, t_0, \phi)$ là bị chặn trên $[t_0, \gamma)$. Ngoài ra, điều đó cùng với (2.1) suy ra $\dot{x}(\cdot)$ là bị chặn trên $[t_0, \gamma)$. Do đó, $x(\cdot)$ là liên tục đều trên $[t_0, \gamma)$. Vậy $\lim_{t \rightarrow \gamma^-} x(t)$ tồn tại và $x(\cdot)$ có thể mở rộng tới hàm liên tục trên $[t_0, \gamma]$. Khi đó, có thể tìm một nghiệm của (2.1) qua $(\gamma, x(\gamma))$ về bên phải của γ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết không thể kéo dài của nghiệm $x(\cdot)$. Vậy $\gamma = \infty$.

Trường hợp đặc biệt, khi $F(t, \theta_n) = \theta_n$ và $h(t) = \theta_n$ với mọi $t \geq t_0$, ta có

$$Y = L \frac{\|v\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{\beta} \sup_{t \geq t_0} (|F_i(t, 0)| + h_i(t)) \right\} \frac{\|v\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}} = 0.$$

Khi đó, hệ phương trình vi phân (2.1) là GES. Định lý được chứng minh.

Nhận xét 2.5. Trong trường hợp các bất đẳng thức (2.4) và (2.5) xảy ra dấu "=", $F(t, \theta_n) = h(t) = \theta_n$ với mọi $t \geq t_0$, khi đó, (2.1) trở thành hệ phương trình vi tích phân Volterra tuyến tính thuần nhất. Khi đó, Định lý 2.3 đặc biệt hóa trở về Định lý 4.3 trong [1].

Tiếp theo, xét hệ phương trình vi tích phân Volterra

tuyến tính phụ thuộc thời gian, dạng tích chập

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + \int_0^t G(t,s)x(s)ds + h(t), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.10)$$

trong đó, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ và $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ là các hàm liên tục cho trước. Ta có hệ quả sau đây về tính GEUB của (2.10), tính chất này được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.3.

Hệ quả 2.6. Giả sử $h(\cdot)$ là hàm bị chặn và tồn tại ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\cdot) \in l^\alpha(\mathbb{R}_+^{n \times n})$ với $\alpha > 0$, sao cho

$$F_{ii}(t) \leq a_{ii}, \quad |F_{ij}(t)| \leq a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \underline{n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+; \quad (2.11)$$

$$|G(t,s)| \leq B(t-s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+, t \geq s. \quad (2.12)$$

Khi đó, nếu $\mu \left(A + \int_0^{+\infty} B(s)ds \right) < 0$ thì hệ phương trình

vi tích phân Volterra (2.10) là GEUB. Trường hợp đặc biệt, khi $h(t) = \theta_n$, với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ thì hệ phương trình vi tích phân Volterra (2.10) là GES.

Nhận xét 2.7. Khi các bất đẳng thức (2.11) và (2.12) xảy ra dấu “=” và $h(t) = \theta_n$ với mọi $t \geq t_0$, khi đó, Hệ quả 2.6 đặc biệt hóa trở về Định lý 4.3 trong [1].

Ví dụ 2.8. Xét phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến phụ thuộc thời gian xác định trong $\mathbb{R}$ như sau:

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + \frac{a}{1+t^2} \cos(x(t)) + \int_0^t \frac{te^{-t-s}}{t+1} x(s)ds + b \sin(5t), \quad (2.13)$$

trong đó $t \geq t_0 \geq 0$ và a là tham số thực không âm.

Phương trình (2.13) có dạng (2.1) với

$$f(t, x) := -3x + \frac{a}{1+t^2} \cos(x);$$

$$G(t, s) := \frac{te^{-t-s}}{t+1}; \quad h(t) := b \sin(5t),$$

với $t \geq t_0 \geq 0, x \in \mathbb{R}$. Ta thấy (H) được thỏa mãn vì $f(t, x)$ liên tục trên $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến x . Ngoài ra, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -3 - \frac{a}{1+t^2} \sin(x) \leq -3 + a, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R};$$

$$G(t, s) \leq B(t-s) := e^{-t-s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+; \quad \text{Với } \gamma \in [0, 1),$$

ta có

$$\int_0^{+\infty} |B(t)| e^{\gamma t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{\gamma t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\gamma-1)t} dt = (1-\gamma)^{-1} < +\infty;$$

$$|h(t)| \leq b; \quad F(t, 0) = \frac{a}{1+t^2} \leq a, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Áp dụng Định lý 2.4, nếu $-3 + a + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt < 0$ hay

$0 \leq a < 2$ thì phương trình (2.13) là GEUB.

Ngoài ra, khi $a = b = 0$ thì phương trình (2.13) là GES.

Chú ý rằng các kết quả trong [1] là hoàn toàn không áp dụng được cho phương trình vi tích phân Volterra (2.13).

3. Kết luận

Nhóm tác giả đã phát triển kỹ thuật tiếp cận dựa trên các tính chất của ma trận Metzler, từ đó nghiên cứu và đưa ra một số điều kiện tường minh cho tính bị chặn của nghiệm đối với hệ phương trình vi tích phân Volterra tuyến tính và phi tuyến phụ thuộc thời gian. Hướng phát triển của vấn đề nghiên cứu trong bài báo này là phát triển kỹ thuật tiếp cận để nghiên cứu điều kiện bị chặn của nghiệm đối với một số lớp hệ phương trình vi tích phân Volterra phức tạp hơn, chẳng hạn như các hệ phương trình với chậm vô hạn, hệ phương trình có yếu tố ngẫu nhiên. Xa hơn là nghiên cứu áp dụng các kết quả đạt được về tính bị chặn của nghiệm đối với hệ phương trình vi tích phân Volterra vào một số mô hình thực tế.

Ghi chú. Nghiên cứu được tài trợ bởi Trường Đại học Công nghệ Thông tin, Đại học Quốc gia Hồ Chí Minh trong khuôn khổ đề tài nghiên cứu khoa học cấp cơ sở mã số D1-2019-06.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Anh, T. T and Ngoc, P. H. A., “New stability criteria for linear Volterra time-varying integro-differential equations”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 21, no. 4 (2017): 841-863.
- [2] Burton, T. A., *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York, 1983.
- [3] Dieudonne, J. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press: New York, 1988.
- [4] Hale, J. K. and Lunel, S. M. V., *Introduction to functional differential equations*, Vol. 99, Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Ngoc, P. H. A., Naito, T., Shin, J. S. and Murakami, S., “On stability and robust stability of positivelinear Volterra equations”, *SIAM J. Control Optim.*, 47, (2008), 975-996.
- [6] Ngoc, P. H. A and Anh, T. T., “Stability of nonlinear Volterra equations and applications”, *Applied Mathematics and Computation*, 2019, Vol. 341, 1-14.
- [7] Peuteman, J., Aeyels, D., and Sepulchre, R., “Boundedness properties for time-varying nonlinear systems”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(5), 2000, 1408-1422.
- [8] Shen, T. and Ian, R. P., “An ultimate state bound for a class of linear systems with delay”, *Automatica*, 87 (2018), 447-449.
- [9] Volterra, V., *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Courier Corporation, 2005.
- [10] Xu, L. and Ge, S. S. (2015), “Exponential ultimate boundedness of nonlinear stochastic difference systems with time-varying delays”, *International Journal of Control*, 88(5), 983-989.