PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN SÁNG TẠO VÀ TÌM GIỚI HẠN HÀM SỐ

TANGENTIAL METHOD FOR CREATING AND FINDING LIMITS OF FUNCTIONS

Vũ Thị Tường Minh, Phạm Quý Mười

Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng; tuongminh10@gmail.com, pqmuoi@ued.edu.vn

Tóm tắt - Trong chương trình toán bậc phổ thông, các bài toán về tìm giới hạn của hàm số là các dạng toán tương đối khó nhưng khá phổ biến và có thể gặp trong các kì thi trung học phổ thông, tuyển sinh đại học. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải các bài toán này, trong đó phương pháp sử dụng tiếp tuyến tỏ ra hiệu quả và thường được sử dụng trong nhiều trường hợp. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra hướng sáng tạo các bài tập tìm giới hạn của hàm số ứng dụng phương trình tiếp tuyến và có phương pháp giải cũng như một số nhận xét giúp định hướng cách giải cho học sinh, đưa ra một số ví dụ để học sinh luyện tập. Từ đó học sinh nắm rõ được bản chất của một số bài toán tìm giới hạn của hàm số bằng phương pháp dùng tiếp tuyến.

Từ khóa - phương trình tiếp tuyến; giới hạn hàm số; phương pháp tiếp tuyến; sáng tạo bài toán tìm giới hạn; giới hạn dạng vô định

Abstract - In the math program at high school, finding the limits of functions are difficult problems but rather common and are often seen in high school exams, university exams. There are many different methods to solve such problems, in which the tangential method is effective and often used in many cases. In this paper, we give some ways to create new problems about limits of functions by using the tangent equations and give a few comments to help students on finding solutions as well as give some examples to practice. Based on the comments, students understand the nature of some problems of finding limits of functions using tangential methods.

Key words - tangent equations; limits of functions; tangential methods; creating problems of finding limmit; limmits of unditermined form

1. Đặt vấn đề

Tìm giới hạn của hàm số là một chuyên đề tương đối khó và đa dạng trong chương trình toán học phổ thông. Trong đó, tìm giới hạn hàm số có dạng vô định là phần mà nhiều học sinh lúng túng. Trong thực tế, nhiều bài toán tìm giới hạn dạng vô định chỉ cần áp dụng một số phương pháp đơn giản là có thể giải được.

Có nhiều phương pháp khác nhau được nghiên cứu và giảng dạy cho học sinh như phương pháp nhân lượng liên hợp, sử dụng quy tắc L'hopital, … [1-8]. Với mong muốn góp phần cung cấp cho học sinh các kiến thức và kĩ năng tìm giới hạn hàm số và hỗ trợ cho giáo viên trong việc sáng tạo các bài toán mới về tìm giới hạn hàm số, trong bài báo này nhóm tác giả nghiên cứu cách sáng tạo ra bài toán tìm giới hạn hàm số dạng vô định và đưa ra phương pháp giải dựa trên các kiến thức cơ bản về phương trình tiếp tuyến. Phương pháp sử dụng phương trình tiếp tuyến (ta gọi ngắn gọn là *phương pháp tiếp tuyến*) là một phương pháp đơn giản và dễ sử dụng. Phương pháp này còn có thể giúp giáo viên sáng tạo ra những bài toán mới về tìm giới hạn của hàm số một cách dễ dàng. Việc sáng tạo ra các bài toán mới về tìm giới hạn của hàm số cũng là một trong các kĩ năng cần thiết và quan trọng cho các giáo viên khi tham gia ra các đề thi trong các kỳ thi trung học phổ thông quan trọng như các kỳ thi tốt nghiệp, các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, …

2. Cơ sở lý thuyết

Trong bài báo này, luôn giả sử D là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 2.1. [9, Định nghĩa 1, trang 32] (Hàm số một biến). Một quy tắc tương ứng f đi từ tập D vào tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn: với mỗi giá trị của $x \in D$ tương ứng với một và chỉ một giá trị $y \in \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số thực một biến số.

Khi đó, ta gọi x là biến số và $y = f(x)$ là giá trị của hàm số f tại x. Tập hợp D được gọi là tập xác định của hàm số f.

Định nghĩa 2.2. [9, Định nghĩa 1, trang 151] (Tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C). Giả sử (C) là đồ thị của hàm số khả vi $y = f(x)$ và $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C).

a) Vị trí giới hạn của đường thẳng M_0M khi M di chuyển trên đường cong (C) dần về điểm M_0 được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0. Khi đó, M_0 được gọi là tiếp điểm.

b) Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$.

Định nghĩa 2.3. (Lượng liên hợp). Với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ta có

$$A^n - B^n = (A - B)\left(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + ... + AB^{n-2} + B^{n-1}\right).$$

Khi đó, ta gọi lượng liên hợp của $A - B$ là $A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + ... + AB^{n-2} + B^{n-1}$.

3. Phương pháp tiếp tuyến để sáng tạo và tìm giới hạn của hàm số

Cơ sở của phương pháp sáng tạo và tìm giới hạn của hàm số dùng phương trình tiếp tuyến dựa trên kết quả sau:

Định lí 3.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \alpha(x - x_0)^m + (ax + b)^n \quad với \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ m \geq 2, m \in \mathbb{N} \\ n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ ax_0 + b > 0. \end{cases}$$

Khi đó, đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

$$y = g(x) = \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\alpha(x - x_0)^m + (ax + b)^n} \quad tại\ x_0.$$

Chứng minh:

Vì $ax_0 + b > 0$ nên ta có

$$g(x_0) = \sqrt[n]{f(x_0)} = \sqrt[n]{\alpha(x_0 - x_0)^m + (ax_0 + b)^n} = ax_0 + b$$

và

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{f(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - (ax+b)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{ax + b - \sqrt[n]{f(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{\alpha(x - x_0)^m + (ax+b)^n} - (ax+b)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x - x_0)^{m-1}}{\left(\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-2}(ax+b) + ... + (ax+b)^{n-1}\right)}$$

$$+ \lim_{x\to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0}$$

$= a.$

Do đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = g(x)$ tại x_0 là:

$$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = a(x - x_0) + ax_0 + b = ax + b.$$

3.1. Phương pháp tiếp tuyến sáng tạo ra bài toán tìm giới hạn hàm số dạng $\frac{0}{0}$

Để sáng tạo ra các bài toán tìm giới hạn của hàm số dùng phương trình tiếp tuyến ta có thể thực hiện theo các bước sau:

* *Bước 1:* Ta chọn phương trình bất kỳ $y = ax + b$, điểm x_0 thỏa mãn điều kiện $ax_0 + b > 0$ và số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$. Sau đó, ta khai triển:

$$(ax+b)^n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0.$$

Tiếp theo, ta chọn hàm số

$$f(x) = \alpha(x - x_0)^m + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0,$$

với $\alpha \neq 0, m \geq 2 (m \in \mathbb{N})$.

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\frac{0}{0}$ sau:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - (ax+b)}{(x - x_0)^m} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x - x_0)^m}{(x - x_0)^m g(x)} = \frac{\alpha}{n(ax_0 + b)^{n-1}} \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

với $g(x)$ là lượng liên hợp của $\sqrt[n]{f(x)} - (ax + b)$.

* *Bước 2:* Lặp lại Bước 1 với số tự nhiên n được thay bởi số tự nhiên $p \in \mathbb{N}$ $(p \geq 2, p \neq n)$. Thực hiện khai triển:

$$(ax+b)^p = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + ... + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$$

và chọn hàm số

$$h(x) = \beta(x - x_0)^m + a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0,$$

với $\beta \neq 0$.

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[p]{h(x)} - (ax+b)}{(x - x_0)^m} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x - x_0)^m}{(x - x_0)^m k(x)} = \frac{\beta}{p(ax_0 + b)^{p-1}} \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Với $k(x)$ là lượng liên hợp của $\sqrt[p]{h(x)} - (ax + b)$.

* *Bước 3:* Và kết hợp (1) và (2): thực hiện phép trừ hai giới hạn ta đưa ra bài toán tìm giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ như sau:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[p]{h(x)}}{(x - x_0)^m}.$$

Chúng ta minh họa các bước trên thông qua ví dụ sau:

* *Bước 1:*

Giả sử chọn phương trình $y = 3x + 2$, điểm 0 (thỏa mãn $3.0 + 2 = 2 > 0$) và n = 2. Khi đó, ta có:

$$(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

Ta chọn $f(x) = -9(x - 0)^2 + 9x^2 + 12x + 4 = 12x + 4.$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{12x+4} - (3x+2)}{(x-0)^2} = -\frac{9}{4}. \quad (3)$$

* *Bước 2:* Thực hiện tương tự như Bước 1 với n = 3. Ta có: $(3x+2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.$ Khi đó, với

$$h(x) = -2073(x-0)^2 + 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = 27x^3 - 2019x^2 + 36x + 8.$$

Ta có giới hạn hàm số dạng $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27x^3 - 2019x^2 + 36x + 8} - (3x+2)}{(x-0)^2} = -\frac{691}{4}. \quad (4)$$

* *Bước 3:* Kết hợp (3) và (4): thực hiện phép trừ hai giới hạn, ta đưa ra bài toán tìm giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ như sau:

Tính giới hạn $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{12x+4} - \sqrt[3]{27x^3 - 2019x^2 + 36x + 8}}{x^2}$.

Chú ý: Để tạo ra được nhiều bài toán đa dạng và phức tạp, chúng ta cũng có thể:

a) Nghịch đảo giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[p]{h(x)}}{(x-x_0)^m}$ thành dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)^m}{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[p]{h(x)}}$.

b) Kết hợp một số vô cùng bé, công thức lượng giác, lượng liên hợp, cộng trừ nhân chia các biểu thức (không làm thay đổi dạng vô định của bài toán) vào biểu thức dưới dấu lim.

Ví dụ 3.1.1. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 4x+2x}-\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}}{x^2}.$$

Phương pháp sáng tạo:

* *Bước 1:* Chọn một phương trình là $y=x+1$, điểm 0 (thỏa mãn $0+1=1>0$) và $n=2$. Ta có:

$$(x+1)^2=x^2+2x+1.$$

Do đó, ta chọn:

$$f(x)=-9(x-0)^2+x^2+2x+1=-8x^2+2x+1.$$

Và sử dụng tính chất vô cùng bé tương đương: $-8x^2\sim -2\sin^2 2x\sim \cos 4x-1$, ta có thể chọn lại:

$$f(x)=\cos 4x-1+2x+1=\cos 4x+2x.$$

Khi đó, ta có giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 4x+2x}-(x+1)}{(x-0)^2}=-\frac{9}{2}. \qquad (5)$$

* *Bước 2:* Thực hiện tương tự như Bước 1 với $p=3$, ta có:

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1.$$

Khi đó, ta chọn

$$h(x)=-3(x-0)^2+x^3+3x^2+3x+1=x^3+3x+1.$$

Để tăng độ khó cho bài toán, ta thêm vào $h(x)$ biểu thức $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+3x^2}+1}=\sqrt{1+3x^2}-1$ và $-x^3$. Từ đó, ta chọn lại:

$$h(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1+3x^2}+1}-x^3+x^3+3x+1$$
$$=\sqrt{1+3x^2}-1+3x+1$$
$$=\sqrt{1+2x^2}+3x.$$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}-(x+1)}{(x-0)^2}=-\frac{3}{2}. \qquad (6)$$

* *Bước 3:* Và kết hợp (5) và (6), thực hiện phép trừ hai giới hạn có bài toán đã cho.

c) Thêm nhiều bước tương tự như Bước 1, Bước 2 trong phương pháp với các tiếp tuyến khác nhau, miễn sao khi cộng trừ các giới hạn ở các bước thì biểu thức của các phương trình tiếp tuyến tương ứng triệt tiêu.

Ví dụ 3.1.2. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+8x+1}-6\sqrt{x+9}+17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}+\sin^2 x}{x^2}.$$

Phương pháp sáng tạo:

* *Bước 1:* Chọn một phương trình là $y=4x+1$ điểm điểm 0 (thỏa mãn $4.0+1=1>0$) và $n=2$. Khi đó, ta có:

$$(4x+1)^2=16x^2+8x+1.$$

Ta chọn

$$f(x)=-15(x-0)^2+16x^2+8x+1=x^2+8x+1.$$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+8x+1}-(4x+1)}{(x-0)^2}=-\frac{15}{2}. \qquad (7)$$

* *Bước 2:* Thực hiện tương tự như trên với phương trình được chọn là $y=x+18$, điểm 0 (thỏa mãn $0+18=18>0$) và $n=2$. Khi đó, ta có:

$$(x+18)^2=x^2+36x+324.$$

Do đó:

$$h(x)=-(x-0)^2+x^2+36x+324=36x+324.$$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{36x+324}-(x+18)}{(x-0)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sqrt{x+9}-(x+18)}{(x-0)^2}=\frac{1}{36}. \qquad (8)$$

* *Bước 3:* Thực hiện tương tự như bước 2 với phương trình được chọn là $y=-3x+17$, điểm 0 (thỏa mãn $-3.0+17=17>0$) và $n=2$. Khi đó, ta có:

$$(-3x+17)^2=9x^2-102x+289.$$

Do đó:

$$l(x)=-298(x-0)^2+9x^2-102x+289$$
$$=-289x^2-102x+289.$$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{-289x^2-102x+289}-(-3x+17)}{(x-0)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}-(-3x+17)}{(x-0)^2}=-\frac{298}{34}. \qquad (9)$$

Ở các bước trên, ta đã chọn các phương trình tiếp tuyến tương ứng sao cho giới hạn ở (7) trừ giới hạn ở (8) và cộng giới hạn ở (9) triệt tiêu.

**Bước 4:* Kết hợp (7), (8), (9) thực hiện các phép trừ ở

(7) và (8) và cộng (9) các giới hạn và để phức tạp ta thêm vào biểu thức vô cùng bé tương đương với x^2 là $\sin^2 x$ và ta có bài toán đã cho.

3.2. Phương pháp tiếp tuyến tìm giới hạn của hàm số

Trong phần này, ta xem xét bài toán tìm giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$ sau: $P=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[p]{h(x)}}{(x-x_0)^m}$, trong đó $m\in\mathbb{N}$ $(m\geq 2)$.

Để giải các dạng này, trong nhiều trường hợp, ta có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến. Để ứng dụng phương pháp tiếp tuyến, chúng ta thực hiện theo hướng sau:

Bước 1: Viết các phương trình tiếp tuyến của các hàm số chứa căn $y=\sqrt[n]{f(x)}; y=\sqrt[p]{h(x)}$ tại $x=x_0$. Giả sử chúng có chung phương trình tiếp tuyến là $y=ax+b$.

Bước 2: Thêm và bớt các biểu thức tiếp tuyến $ax+b$ vào biểu thức tính giới hạn như sau: $P=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{f(x)}-(ax+b)+(ax+b)-\sqrt[p]{h(x)}}{(x-x_0)^m}$.

Bước 3: Nhân lượng liên hợp tương ứng rồi khử nhân tử $(x-x_0)^m$ trong phân thức để khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ và đưa ra kết quả.

Tương tự như trên, ta cũng có thể dùng phương pháp tiếp tuyến cho giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^m}{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[p]{h(x)}}$.

Ví dụ 3.2.1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}$.

Nhận xét: Trong bài này, giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và tử là đa thức bậc ba. Hơn nữa, phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số $y=\sqrt[3]{1+3x}; y=\sqrt{1+2x}$ tại $x_0=0$ là $y=x+1$. Do đó, ta có thể dùng phương pháp tiếp tuyến để tìm giới hạn.

Giải. Đặt $u(x)=\sqrt[3]{1+3x}; v(x)=\sqrt{1+2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+3x}-(x+1)+(x+1)-\sqrt{1+2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{-x^3-3x^2}{\left((x+1)^2+(u(x))(x+1)+(u(x))^2\right)}+\frac{x^2}{(x+1)+v(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{-x-3}{\left((x+1)^2+(u(x))(x+1)+(u(x))^2\right)}+\frac{1}{(x+1)+v(x)}}$$

$=0.$

Ngoài ra, ta có thể kết hợp một số vô cùng bé, công thức lượng giác, lượng liên hợp, cộng trừ nhân chia các biểu thức để giải các bài toán một cách đơn giản và hiệu quả hơn. Xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.2.2. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 4x+2x}-\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}}{x^2}.$$

Nhận xét: Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và mẫu là đa thức bậc hai. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y=\sqrt{\cos 4x+2x}; y=\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}$$

tại $x_0=0$ là $y=x+1$. Ta dùng phương pháp tiếp tuyến để giải bài này.

Giải. Đặt $u(x)=\sqrt{\cos 4x+2x}; v(x)=\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}$. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 4x+2x}-\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 4x+2x}-(x+1)+(x+1)-\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos 4x+2x}-(x+1)}{x^2}+\frac{(x+1)-\sqrt[3]{\sqrt{1+3x^2}+3x}}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{-x^2-2\sin^2 2x}{x^2\left(u(x)+(x+1)\right)}+\\ +\frac{x^3+3x^2+1-\sqrt{1+3x^2}}{x^2\left((x+1)^2+(v(x))(x+1)+(v(x))^2\right)}\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1-2\frac{\sin^2 2x}{x^2}}{(u(x)+(x+1))}+\frac{x+3+\frac{3}{1+\sqrt{1+3x^2}}}{\left((x+1)^2+(v(x))(x+1)+(v(x))^2\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1-2.4\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}}{(u(x)+(x+1))}+\frac{x+3+\frac{3}{1+\sqrt{1+3x^2}}}{\left((x+1)^2+(v(x))(x+1)+(v(x))^2\right)}\right)$$

$$=-\frac{9}{2}+\frac{3+\frac{3}{2}}{3}=-3.$$

Chú ý rằng, để áp dụng được phương pháp tiếp tuyến như đã được trình bày thì hai hàm số $y=\sqrt[n]{f(x)}$ và $y=\sqrt[p]{h(x)}$ phải có cùng một phương trình tiếp tuyến tại $x=x_0$. Tuy nhiên, phương pháp tiếp tuyến cũng có thể được sử dụng để tính giới hạn của biểu thức mà tử (hoặc mẫu) gồm tổng nhiều hàm căn có các phương trình tiếp tuyến khác nhau. Trong trường hợp này, chúng ta cũng thêm bớt các biểu thức của phương trình tiếp tuyến một cách thích hợp. Ví dụ sau đây

minh họa cho trường hợp này.

Ví dụ 3.2.3. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+8x+1}-6\sqrt{x+9}+17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}+\sin^2 x}{x^2}.$$

Nhận xét: Trong bài này, giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và mẫu là đa thức bậc hai. Phương trình tiếp tuyến tại $x_0=0$ của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+8x+1}$ là $y=4x+1$; của đồ thị hàm số $y=6\sqrt{x+9}$ là $y=x+18$; và của đồ thị hàm số $y=17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}$ là $y=-3x+17$. Vì thế, ta cần thêm bớt các biểu thức của phương trình tiếp tuyến và tách giới hạn thành tổng một cách thích hợp thì có thể tính được.

Giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+8x+1}-6\sqrt{x+9}+17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}+\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\begin{array}{l}\sqrt{x^2+8x+1}-(4x+1)+(x+18)-6\sqrt{x+9}\\+17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}+(3x-17)+\sin^2 x\end{array}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{\sqrt{x^2+8x+1}-(4x+1)}{x^2}+\frac{(x+18)-6\sqrt{x+9}}{x^2}\\+\frac{17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}+(3x-17)}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{-15x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+8x+1}+(4x+1)\right)}+\frac{-x^2}{x^2\left((x+18)+6\sqrt{x+9}\right)}\\+\frac{-298x^2}{x^2\left(17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}-(3x-17)\right)}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{-15}{\left(\sqrt{x^2+8x+1}+(4x+1)\right)}+\frac{-1}{\left((x+18)+6\sqrt{x+9}\right)}\\+\frac{-298}{\left(17\sqrt{-x^2-\frac{6}{17}x+1}-(3x-17)\right)}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\end{array}\right)$$

$$=-\frac{15}{2}-\frac{1}{36}-\frac{298}{34}+1=-\frac{9359}{612}.$$

4. Một số ví dụ

Trong phần này, nhóm tác giả trình bày một số ví dụ để áp dụng phương pháp tiếp tuyến. Ở đây, một số ví dụ do nhóm tác giả tự tạo ra theo phương pháp được trình bày trong Mục 3.1. Một số ví dụ khác được lấy từ các đề thi tuyển sinh đại học.

a) Bài toán mới

Ví dụ 4.1. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{12x+4}-\sqrt[3]{27x^3-2019x^2+36x+8}}{x^2}.$$

Nhận xét: Giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và mẫu là đa thức bậc hai. Phương trình tiếp tuyến tại $x_0=0$ của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{12x+4}$ và $y=\sqrt[3]{27x^3-2019x^2+36x+8}$ là $y=3x+2$.

Giải. Đặt

$$u(x)=\sqrt{12x+4};v(x)=\sqrt[3]{27x^3-2019x^2+36x+8}.$$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{12x+4}-\sqrt[3]{27x^3-2019x^2+36x+8}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\begin{array}{l}\sqrt{12x+4}-(3x+2)+(3x+2)\\-\sqrt[3]{27x^3-2019x^2+36x+8}\end{array}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{\sqrt{12x+4}-(3x+2)}{x^2}\\+\frac{(3x+2)-\sqrt[3]{27x^3-2019x^2+36x+8}}{x^2}\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{-9x^2}{x^2\left(u(x)+(3x+2)\right)}\\+\frac{-2073x^2}{x^2\left(\left(v(x)\right)^2+\left(v(x)\right)(3x+2)+(3x+2)^2\right)}\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\begin{array}{l}\frac{-9}{\left(u(x)+(3x+2)\right)}\\+\frac{-2073}{\left(\left(v(x)\right)^2+\left(v(x)\right)(3x+2)+(3x+2)^2\right)}\end{array}\right)$$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{691}{4}=\frac{341}{2}.$$

Ví dụ 4.2. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{8x^4+x^2+4x+4}-\sqrt[4]{8x^3+24x^2+32x+16}}{x^4}.$$

Phương pháp sáng tạo:

* *Bước 1:* Ta chọn một phương trình là $y=x+2$, điểm 0 (thỏa mãn $0+2=2>0$) và $n=2$. Ta có:

$$(x+2)^2=x^2+4x+4.$$

Do đó, ta chọn

$$f(x)=8(x-0)^4+x^2+4x+4=8x^4+x^2+4x+4.$$

Khi đó, ta có giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{8x^4+x^2+4x+4}-(x+2)}{(x-0)^4}. \qquad (10)$$

**Bước 2:* Thực hiện tương tự như trên với $p=4$. Ta có khai triển: $(x+2)^4 = x^4+8x^3+24x^2+32x+16$. Chọn:

$$h(x) = -(x-0)^4 + x^4+8x^3+24x^2+32x+16$$
$$= 8x^3+24x^2+32x+16.$$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{8x^3+24x^2+32x+16}-(x+2)}{(x-0)^4}. \quad (11)$$

* *Bước 3:* Và kết hợp (10) và (11), thực hiện phép trừ hai giới hạn ta đưa ra bài toán đã cho.

Giải.

Đặt

$$u(x)=\sqrt{8x^4+x^2+4x+4}; v(x)=\sqrt[4]{8x^3+24x^2+32x+16}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{8x^4+x^2+4x+4}-\sqrt[4]{8x^3+24x^2+32x+16}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\begin{pmatrix}\sqrt{8x^4+x^2+4x+4}-(x+2)+\\ +(x+2)-\sqrt[4]{8x^3+24x^2+32x+16}\end{pmatrix}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{8x^4+x^2+4x+4}-(x+2)}{x^4}\\ +\dfrac{(x+2)-\sqrt[4]{8x^3+24x^2+32x+16}}{x^4}\end{pmatrix}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x^4}{x^4\left(u(x)+(x+2)\right)}$$
$$+\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4\begin{pmatrix}(x+2)^3+\left(v(x)\right)(x+2)^2\\ +\left(v(x)\right)^2(x+2)+\left(v(x)\right)^3\end{pmatrix}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8}{\left(u(x)+(x+2)\right)}$$
$$+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left((x+2)^3+\left(v(x)\right)(x+2)^2+\left(v(x)\right)^2(x+2)+\left(v(x)\right)^3\right)}$$

$$=2+\frac{1}{32}=\frac{65}{32}.$$

Ví dụ 4.3. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x}-\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}}{x^2}.$$

Phương pháp sáng tạo:

* *Bước 1:* Chọn một phương trình là $y=1-x$ điểm 0 (thỏa mãn $1-0=1>0$) và $n=2$. Ta có: $(1-x)^2=1-2x+x^2$.

Do đó, ta chọn:

$$f(x)=-4(x-0)^2+1-2x+x^2=-3x^2-2x+1.$$

Và ta có $-2x^2 \sim -2\sin^2 x \sim \cos 2x - 1$ và $x^2 \sim \tan^2 x$.

Sử dụng tính chất vô cùng bé tương đương, ta có thể chọn lại:

$$f(x)=\cos 2x - 1 - \tan^2 x - 2x + 1 = \cos 2x - \tan^2 x - 2x.$$

Khi đó, ta có giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x}-(1-x)}{(x-0)^2}. \quad (12)$$

* *Bước 2:* Thực hiện tương tự như trên với $p=4$, ta có:

$$(1-x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4.$$

Do đó:

$$h(x)=-3(x-0)^2+1-4x+6x^2-4x^3+x^4$$
$$=3x^2+1-4x-4x^3+x^4.$$

Để tăng độ khó cho bài toán, ta thêm vào $h(x)$ các biểu thức $\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1+2x^2}}=\sqrt{1+2x^2}-1$ và $4x^4+6x^3$. Từ đó ta chọn lại:

$$h(x)=\frac{2x^2}{1+\sqrt{1+2x^2}}+x^2+4x^4+6x^3+1-4x-4x^3+x^4$$
$$=\sqrt{1+2x^2}-1+x^2+4x^4+6x^3+1-4x-4x^3+x^4$$
$$=\sqrt{1+2x^2}-1+5x^4+2x^3+x^2-4x.$$

Khi đó, ta có giới hạn hàm số dạng $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}-(1-x)}{(x-0)^2}. \quad (13)$$

* *Bước 3:* Và kết hợp (12) và (13), thực hiện phép trừ hai giới hạn có bài toán đã cho.

Nhận xét: Giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và mẫu là đa thức bậc hai. Phương trình tiếp tuyến tại $x_0=0$ của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x}$ và $y=\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}$ là $y=1-x$.

Giải. Đặt

$$u(x)=\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x};$$
$$v(x)=\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}.$$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x}-\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\begin{pmatrix}\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x}-(1-x)\\ +(1-x)-\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}\end{pmatrix}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{\cos 2x-\tan^2 x-2x}-(1-x)}{x^2}\\ +\dfrac{(1-x)-\sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}+5x^4+2x^3+x^2-4x}}{x^2}\end{pmatrix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1 - \tan^2 x - x^2}{x^2\left(u(x) + (1-\mathrm{x})\right)}$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{-4x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 1 - \sqrt{1+2x^2}}{x^2\left((1-\mathrm{x})^3 + \left(v(x)\right)(1-\mathrm{x})^2 + \left(v(x)\right)^2(1-\mathrm{x}) + \left(v(x)\right)^3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\dfrac{\sin^2 x}{x^2} - \dfrac{\tan^2 x}{x^2} - 1}{\left(u(x) + (1-x)\right)}$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{-4x^2 - 6x + 5 - \dfrac{2}{1+\sqrt{1+2x^2}}}{\left((1-x)^3 + \left(v(x)\right)(1-x)^2 + \left(v(x)\right)^2(1-x) + \left(v(x)\right)^3\right)}$$

$$= \frac{-4}{2} + \frac{5-1}{4} = -1.$$

b) Một số bài toán trong các đề thi

Ví dụ 4.4. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}$.

(Trích đề thi Đại học Thương mại 1999)

Nhận xét: Trong bài này, giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và mẫu là đa thức bậc hai. Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 0$ của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1+x^2}$ là $y = 1$.

Giải. Ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 + 1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ví dụ 4.5. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3\mathrm{x}}}{x^2}$.

(Trích đề thi Đại học Thủy Lợi Hà Nội 2001)

Nhận xét: Trong bài này, giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$ và phân thức có chứa căn thức và mẫu là đa thức bậc hai. Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 0$ của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1+2x}$ và $y = \sqrt[3]{1+3x}$ là $y = x + 1$.

Giải. Đặt $u(x) = \sqrt{1+2x}; v(x) = \sqrt[3]{1+3x}$. Ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (x+1) + (x+1) - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2x} - (x+1)}{x^2} + \frac{(x+1) - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x^2}{x^2\left(u(x) + (\mathrm{x}+1)\right)} + \frac{x^3 + 3x^2}{x^2\left(\left(v(x)\right)^2 + \left(v(x)\right)(\mathrm{x}+1) + (\mathrm{x}+1)^2\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\left(u(x) + (3\mathrm{x}+2)\right)} + \frac{x+3}{\left(\left(v(x)\right)^2 + \left(v(x)\right)(\mathrm{x}+1) + (\mathrm{x}+1)^2\right)}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{3} = \frac{3}{4}.$$

5. Kết luận

Kết quả chủ yếu của bài báo này là trình bày phương pháp sáng tạo và phương pháp giải bài toán tính giới hạn bằng phương pháp tiếp tuyến. Áp dụng phương pháp này, nhóm tác giả đã đưa ra một số bài toán mới cũng như giải một số bài toán xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh đại học. Thông qua các ví dụ này, chúng ta thấy rằng phương pháp tiếp tuyến rất dễ sử dụng để tạo ra các bài toán mới cũng như giải các bài toán tính giới hạn dạng vô định. Vì vậy, đây là một phương pháp rất hữu ích để giáo viên và các em học sinh tìm hiểu, nghiên cứu và áp dụng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên. *Đại số và giải tích 11 cơ bản*. Nhà xuất bản Giáo dục, Đà Nẵng, 2010.

[2] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất. *Giải tích 12 cơ bản*. Nhà xuất bản Giáo dục, Đà Nẵng, 2010.

[3] Phan Huy Khải. *Toán Đại số nâng cao cho học sinh THPT*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2002.

[4] Y.Y. Liasko, A. C. Boiatruc, IA. G. Gai, G.P. Golobac, Lê Đình Thịnh, Hoàng Đức Nguyên, Đặng Huy Ruận, Lê Trọng Vĩnh. *Giải tích toán học-Các ví dụ và các bài toán*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1987.

[5] Trần Đình Cư. *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay Casio 570VNPLUS*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2015.

[6] Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn. *Giải toán Đại số và giải tích lớp 11*. Nhà xuất bản Hà Nội, 2007.

[7] Phan Huy Khải. *Giải tích lồi và các bài toán sơ cấp*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

[8] Lê Hoành Phò. *10 trọng điểm bồi dưỡng học sinh giỏi môn toán lớp 11*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2014.

[9] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng, Nguyễn Tiến Tài. *Đại số 10 cơ bản*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2008.

[10] PGS.TS. Nguyễn Văn Lộc, TS. Nguyễn Viết Đông, ThS. Hoàng Ngọc Cảnh, Trần Quang Tài, Hàn Minh Toàn, ThS. Hồ Điện Biên. *Chuyên đề toán giải tích-Bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi đại học*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hồ Chí Minh, 2009.

(BBT nhận bài: 30/8/2019, hoàn tất thủ tục phản biện: 01/11/2019)