THUẬT TOÁN HOÁN CHUYỂN NGUỒN ĐÍCH TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRÊN MẠNG MỞ RỘNG

SOURCE-SINK ALTERNATIVE ALGORITHM FOR FINDING MAXIMAL FLOWS ON EXTENDED TRAFFIC NETWORKS

Trần Quốc Chiến[1], Trần Ngọc Việt[2], Nguyễn Đình Lầu[2]

[1]*Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Email: tqchien@dce.udn.vn*

[2]*Trường Cao đẳng Giao thông Vận tải II, Email: trviet01@yahoo.com, launhi@gmail.com*

Tóm tắt - Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin,…. Cho đến nay, trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên trong thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, bởi vì còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi tại đỉnh đó. Bài viết xây dựng mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn nhờ giảm khối lượng tính toán ở nhiều công đoạn này sẽ làm tăng đáng kể hiệu quả so với thuật toán tìm luồng cực đại trên mạng truyền thống, với ý tưởng của phương pháp là gán nhãn các đỉnh đồng thời từ đỉnh nguồn và đỉnh đích. Kết quả chính của bài báo là thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng.

Từ khóa - đồ thị; mạng; luồng; luồng cực đại; thuật toán.

Abstract - Graph is a powerful mathematical tool applied in many fields as transportation, communication, informatics, economy, … In ordinary graph the weights of edges and vertexes are considered indepently where the length of a path is the sum of weights of the edges and the vertexes on this path. However, in many practical problems, weights at a vertex are not the same for all paths passing this vertex, but depend on coming and leaving edges. The paper develops a model of extended network that can be applied to modelize many practical problems more exactly and effectively. The main contribution of this paper is a source-sink alternative algorithm for finding maximal flows on extended traffic networks.

Key words - graph; network; flow; maximal flow; algorithm.

1. Đặt vấn đề

Mạng và luồng trên mạng là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, …. Cho đến nay trong mạng cổ điển mới chỉ xét đến trọng số của các tuyến và các nút một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi chỉ đơn thuần là tổng trọng số các cạnh và các nút trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một nút không giống nhau với mọi đường đi qua nút đó, nó còn phụ thuộc vào tuyến đi đến và tuyến đi khỏi nút đó. Ví dụ thời gian đi qua ngã tư trên mạng giao thông phụ thuộc vào hướng di chuyển của phương tiện giao thông: rẽ phải, đi thẳng hay rẽ trái, thậm chí có hướng bị cấm. Vì vậy cần xây dựng một mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Trên cơ sở các nghiên cứu về bài toán luồng cực đại [1, 2, 3, 4, 5, 6] và mạng mở rộng [7, 8, 9], bài báo phát triển thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng.

2. Mạng mở rộng

Cho mạng là đồ thị $G=(V, E)$ với tập nút V và tập cạnh E. Các cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Có nhiều loại phương tiện lưu hành trên mạng. Những cạnh vô hướng biểu diễn tuyến hai chiều, trong đó các phương tiện trên cùng tuyến nhưng ngược hướng lưu hành chia sẻ khả năng thông hành của tuyến. Trên mạng cho các hàm sau.

Hàm khả năng thông hành cạnh c_E: $E \to R^*$, với $c_E(e)$ là khả năng thông hành cạnh $e \in E$.

Hàm khả năng thông hành nút c_V: $V \to R^*$, với $c_V(u)$ là khả năng thông hành nút $u \in V$.

Bộ (V, E, c_E, c_V) gọi là *mạng mở rộng*. (1)

3. Luồng trên mạng mở rộng

Cho mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$. Giả thiết G có đỉnh nguồn s và đỉnh đích t.

Tập các giá trị $\{f(x,y) \mid (x,y) \in G\}$

gọi là *luồng* trên mạng G nếu thoả mãn

(i) $0 \le f(x,y) \le c_E(x,y)\ \forall (x,y) \in E$

(ii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(v,z)\in G} f(v,z) = \sum_{(z,v)\in G} f(z,v)$$

(iii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(v,z)\in G} f(v,z) \le c_V(z)$$

Biểu thức $v(F) = \sum_{(s,v)\in G} f(s,v)$

gọi là *giá trị của luồng F*.

• ***Bài toán luồng cực đại***:

Cho mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh nguồn a và đỉnh đích z. Nhiệm vụ của bài toán là tìm luồng có giá trị lớn nhất.

Bài toán luồng cực đại là bài toán quy hoạch tuyến tính. Giá trị của luồng bị giới hạn bởi tổng khả năng thông hành của các cung đi ra từ đỉnh nguồn, vì vậy ta có thể khẳng định định lý sau:

• *Định lý 1:* Với mỗi mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh nguồn a và đỉnh đích z, luôn luôn tồn tại luồng cực đại.

Chứng minh tương tự như trong tài liệu [1].

4. Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng

+ *Đầu vào*. Mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh

nguồn a và đỉnh đích z.

Các đỉnh trong G được sắp xếp theo thứ tự nào đó.

+ *Đầu ra*. Luồng cực đại $F = \{f(x, y) \mid (x, y)\in G\}$, là tập các luồng trên mạng G.

+ *Các bước*.

(1) ***Khởi tạo***

Luồng xuất phát: $f(x, y):= 0, \forall(x, y)\in E$.

Các đỉnh xuất phát sẽ được lần lượt gán nhãn lần thứ nhất L_1 gồm 5 thành phần:

Nhãn tiến có dạng:

$L_1(v) = [\uparrow, prev_1(v), c_1(v), d_1(v), bit_1(v)]$ và có thể được gán nhãn lần hai

$L_2(v) = [\uparrow, prev_2(v), c_2(v), d_2(v), bit_2(v)]$, với $prev_1(v)$ là đỉnh liền kề trước đối với nhãn tiến;

Nhãn lùi có dạng:

$L_1(v) = [\downarrow, prev_1(v), c_1(v), d_1(v), bit_1(v)]$ và có thể được gán nhãn lần hai

$L_2(v) = [\downarrow, prev_2(v), c_2(v), d_2(v), bit_2(v)]$, với $prev_1(v)$ là đỉnh liền kề sau đối với nhãn lùi;

Đặt nhãn tiến $(\uparrow)$ cho đỉnh nguồn và nhãn lùi $(\downarrow)$ cho đỉnh đích:

$a[\uparrow,\varphi,\infty,\infty,1]$ & $z[\downarrow,\varphi,\infty,\infty,1]$

Tạo lập tập S gồm các đỉnh đã có nhãn tiến nhưng chưa được dùng để sinh nhãn tiến, S' là tập đỉnh được gán nhãn tiến nhờ các đỉnh của tập S

$S:=\{a\},\ S':=\varphi$

Tạo lập tập T gồm các đỉnh đã có nhãn lùi nhưng chưa được dùng để sinh nhãn lùi, T' là tập đỉnh được gán nhãn lùi nhờ các đỉnh của tập T

$T:=\{z\},\ T':=\varphi$

(2) ***Sinh nhãn tiến***

(2.1) Chọn đỉnh sinh nhãn tiến

-Trường hợp $S\neq\varphi$: Chọn đỉnh $u\in S$ nhỏ nhất (theo thứ tự).

Loại u khỏi S, $S:=S\setminus\{u\}$. Giả sử nhãn tiến của u là $[\uparrow, prev_i(u), c_i(v), d_i(v), bit_i(v)]$, $i = 1$ hoặc 2. A là tập các đỉnh chưa có nhãn tiến và kề đỉnh sinh nhãn tiến u. Sang bước 2.2.

-Trường hợp $S=\varphi$ và $S'\neq\varphi$:

Gán $S:=S',\ S':=\varphi$. ***Sang bước 3***.

-Trường hợp $S=\varphi$ và $S'=\varphi$: Kết thúc, luồng F là cực đại.

(2.2) Gán nhãn tiến cho đỉnh chưa có nhãn tiến và kề đỉnh sinh nhãn tiến u

-Trường hợp $A=\varphi$: Quay lại bước 2.1.

-Trường hợp $A\neq\varphi$: Chọn $t\in A$ nhỏ nhất. Loại t khỏi tập A, $A:=A\setminus\{t\}$. Gán nhãn tiến cho t như sau:

Nếu $(u,t)\in E,\ f(u,t) < c_E(u,t), bit_i(u)=1$ đặt nhãn tiến đỉnh t là: $prev_j(t):= u$;

$c_j(t):=\min\{c_i(u), c_E(u,t)-f(u,t)\}$, nếu $d_i(u)=0$,

$c_j(t):=\min\{c_i(u), c_E(u,t)-f(u,t), d_i(u)\}$, nếu $d_i(u) > 0$;

$d_j(t):= c_V(t)-\sum_{(i,t)\in G} f(i,t)$;

$bit_j(t):=1$, nếu $d_j(t) > 0$,

$bit_j(t):=0$, nếu $d_j(t) = 0$.

Nếu $(t,u)\in E,\ f(t,u) > 0$ đặt nhãn tiến đỉnh t là: $prev_j(t):= u$; $c_j(t):=\min\{c_i(u), f(t,u)\}$, $d_j(t):= c_V(t)-\sum_{(i,t)\in G} f(i,t)$; $bit_j(t):=1$.

Nếu t không được gán nhãn tiến, thì quay lại bước 2.2.

Nếu t được gán nhãn tiến và t có nhãn lùi, thì sang bước (4) hiệu chỉnh tăng luồng.

Nếu t được gán nhãn tiến và t không có nhãn lùi, thì bổ sung t vào S', $S':=S'\cup\{t\}$ và quay lại bước 2.2.

(3) ***Sinh nhãn lùi***

(3.1) Chọn đỉnh sinh nhãn lùi

-Trường hợp $T\neq\varphi$: Chọn đỉnh $v\in T$ nhỏ nhất (theo thứ tự).

Loại v khỏi T, $T:=T\setminus\{v\}$. Giả sử nhãn lùi của v là $[\downarrow, prev_i(v), c_i(t), d_i(t), bit_i(t)]$, $i = 1$ hoặc 2. B là tập các đỉnh chưa có nhãn lùi và kề đỉnh sinh nhãn lùi v. Sang bước (3.2).

- Trường hợp $T=\varphi$ và $T'\neq\varphi$:

Gán $T:=T',\ T':=\varphi$. ***Quay lại bước 2***.

- Trường hợp $T=\varphi$ và $T'=\varphi$: Kết thúc, luồng F là cực đại.

(3.2) Gán nhãn lùi cho đỉnh chưa có nhãn lùi và kề đỉnh sinh nhãn lùi v

- Trường hợp $B=\varphi$: Quay lại bước 3.1.

- Trường hợp $B\neq\varphi$: Chọn $t\in B$ nhỏ nhất. Loại t khỏi B, $B:=B\setminus\{t\}$. Gán nhãn lùi cho t như sau:

Nếu $(t,v)\in E,\ f(t,v) < c_E(t,v), bit_i(v)=1$ đặt nhãn lùi đỉnh t là: $prev_j(t):= v$;

$c_j(t):=\min\{c_i(v), c_E(t,v)-f(t,v)\}$, nếu $d_i(v)=0$,

$c_j(t):=\min\{c_i(v), c_E(t,v)-f(t,v), d_i(v)\}$, nếu $d_i(v) > 0$;

$d_j(t):= c_V(t)-\sum_{(i,t)\in G} f(i,t)$;

$bit_j(t):=1$, nếu $d_j(t) > 0$,

$bit_j(t):=0$, nếu $d_j(t) = 0$.

Nếu $(v,t)\in E,\ f(v,t) > 0$ đặt nhãn lùi đỉnh t là: $prev_j(t):= v$; $c_j(t):=\min\{c_i(v), f(v,t)\}$,

$d_j(t):= c_V(t)-\sum_{(i,t)\in G} f(i,t)$; $bit_j(t):=1$.

Nếu t không được gán nhãn lùi, thì quay lại bước (3.2).

Nếu t được gán nhãn lùi và t có nhãn tiến, thì sang bước (4) hiệu chỉnh tăng luồng.

Nếu t được gán nhãn lùi và t không có nhãn tiến, thì bổ sung t vào T', $T' := T' \cup \{t\}$ và quay lại bước (3.2).

(4) *Hiệu chỉnh tăng luồng*

Giả sử t có nhãn tiến [$\uparrow$, $prev_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $bit_i(t)$] và nhãn lùi [$\downarrow$, $prev_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $bit_i(t)$]. Ta hiệu chỉnh luồng F như sau:

(4.1) Hiệu chỉnh ngược từ t về a theo nhãn tiến

(4.1.1) Khởi tạo

$y := t$, $x := prev_1(t)$, $\delta := c_1(t)$.

(4.1.2) Hiệu chỉnh

(i) Trường hợp (x, y) là cạnh có hướng từ x đến y: đặt $f(x, y) := f(x, y) + \delta$.

(ii) Trường hợp (y, x) là cạnh có hướng từ y đến x: đặt $f(y, x) := f(y, x) - \delta$.

(iii) Trường hợp (x, y) là cạnh vô hướng:

Nếu $f(x, y) \geq 0$ và $f(y, x) = 0$, thì đặt $f(x, y) := f(x, y) + \delta$.

Nếu $f(y, x) > 0$, thì đặt $f(y, x) := f(y, x) - \delta$.

(4.1.3) Tịnh tiến

(i) Trường hợp $x = a$, thì sang bước (4.2).

(ii) Trường hợp $x \neq a$, thì đặt $y := x$ và $x := h$, với h là thành phần thứ hai của nhãn tiến đỉnh y. Sau đó quay lại bước (4.1.2).

(4.2) Hiệu chỉnh từ t đến z theo nhãn lùi

(4.2.1) Khởi tạo

$x := t$, $y := prev_1(t)$, $\delta := c_1(t)$.

(4.2.2) Hiệu chỉnh

(i) Trường hợp (x, y) là cạnh có hướng từ x đến y: đặt $f(x, y) := f(x, y) + \delta$.

(ii) Trường hợp (y, x) là cạnh có hướng từ y đến x: đặt $f(y, x) := f(y, x) - \delta$.

(iii) Trường hợp (x, y) là cạnh vô hướng:

Nếu $f(x, y) \geq 0$ và $f(y, x) = 0$, thì đặt $f(x, y) := f(x, y) + \delta$.

Nếu $f(y, x) > 0$, thì đặt $f(y, x) := f(y, x) - \delta$.

(4.2.3) Tịnh tiến

(i) Trường hợp $x = z$, thì sang bước 4.3.

(ii) Trường hợp $x \neq z$: Đặt $x := y$ và $y := k$, với k là thành phần thứ hai của nhãn lùi đỉnh x. Sau đó quay lại bước (4.2.2).

(4.3) Xóa tất cả nhãn của các đỉnh trên mạng, trừ đỉnh nguồn a và đỉnh đích z. Quay lại bước (2).

• ***Định lý* 2.** Nếu các khả năng thông qua cạnh và khả năng thông qua đỉnh là số nguyên thì sau hữu hạn bước quá trình giải kết thúc.

Chứng minh

Theo định lý 1, qua mỗi bước hiệu chỉnh luồng, giá trị luồng tăng lên 1 lượng đơn vị (do c_E *nguyên*, c_V *nguyên, kéo theo* δ nguyên dương). Mặt khác, giá trị luồng bị chặn trên là bởi tổng các khả năng thông qua của các cung đi khỏi đỉnh nguồn. Vì vậy qua một số hữu hạn bước quá trình giải phải kết thúc.

• ***Định lý* 3** Cho mạng mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t, $F = \{f(x,y) \mid (x,y) \in G\}$ là luồng nhận được khi kết thúc thuật toán tìm luồng cực đại. Khi đó, F là luồng cực đại.

Chứng minh tương tự như trong tài liệu [1].

• ***Độ phức tạp của thuật toán*.**

Giả thiết khả năng thông hành cạnh và khả năng thông hành nút là số nguyên. Ở mỗi bước lặp tìm đường đi tăng luồng, ta phải duyệt qua nhiều nhất là |E| cung và để hiệu chỉnh luồng ta phải duyệt qua nhiều nhất là 2.|V| cung trên đường đi tăng luồng, nên độ phức tạp mỗi lần tăng luồng là:

$O(|E| + 2.|V|)$. Ký hiệu v^* là trị của luồng cực đại. Số lần tăng luồng nhiều nhất là v^*. Vì vậy, độ phức tạp của thuật toán là:

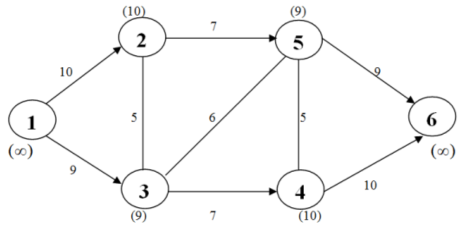
$O(v^*(|E| + 2.|V|))$.

5. Ví dụ

Cho sơ đồ mạng mở rộng ở *hình 1*.

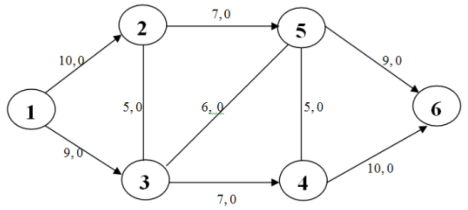
Mạng có 6 nút, 6 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng. Khả năng thông hành cạnh c_E và khả năng thông hành nút c_V.

Đỉnh nguồn là 1, đỉnh đích là 6.



Hình 1. *Sơ đồ mạng mở rộng*

Xuất phát từ luồng 0 cho ở hình 2.



Hình 2. *Mạng xuất phát từ luồng 0*

*Đỉnh nguồn 1: [$\uparrow$, φ, ∞, ∞, 1] và

đỉnh đích 6: [$\downarrow$, φ, ∞, ∞, 1]

Đỉnh 2: nhãn tiến [$\uparrow$, 1, 10, 10, 1];

Đỉnh 5: nhãn lùi [$\downarrow$, 6, 9, 9, 1];

Đỉnh 3: nhãn tiến [$\uparrow$, 1, 9, 9, 1] và

nhãn lùi [$\downarrow$, 4, 7, 9, 1]

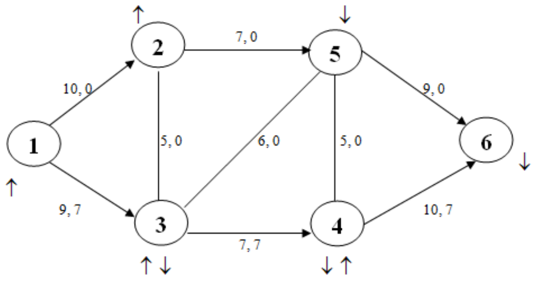
Đỉnh 4: nhãn tiến [$\uparrow$, 3, 7, 10, 1] và

nhãn lùi [$\downarrow$, 6, 10, 10, 1]

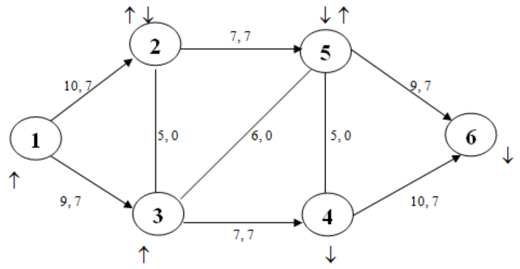
+Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở hình 3 và giá trị luồng $v(F) = 7$.

+Tương tự, kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở hình 4 và giá trị luồng $v(F) = 14$.

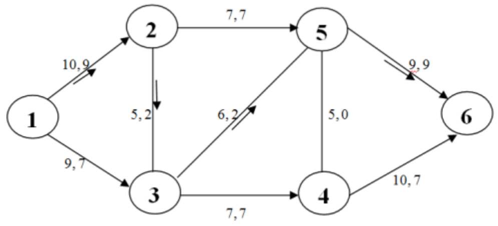
+ Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở hình 5 và giá trị luồng *v(F)* = 16.



Hình 3. *Mạng có giá trị luồng v(F)= 7*



Hình 4. *Mạng có giá trị luồng v(F)= 14*



Hình 5. *Mạng có giá trị luồng v(F)= 16*

Đây là luồng cực đại, vì trong lần sinh nhãn tiến và nhãn lùi tiếp theo không được gán nhãn.

6. Kết luận

Bài viết xây dựng mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế một cách chính xác, giảm khối lượng tính toán ở nhiều công đoạn từ đó làm tăng đáng kể hiệu quả của thuật toán so với thuật toán [9], chỉ tăng luồng tại nút vừa có nhãn tiến và vừa có nhãn lùi. Tiếp theo, thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng được xây dựng. Cuối cùng, một ví dụ cụ thể được trình bày để minh họa cho thuật toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Quốc Chiến, *Bài toán tìm luồng cực đại trên mạng*, Đề tài NCKH cấp Bộ, mã số B2005-16-34.

[2] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (1)", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng*, 1(13)/2006, 53-58.

[3] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (2)", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng*, 3(15)-4(16)/2006, 77-82.

[4] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng*, 4(21)/2007, 1-6.

[5] Trần Quốc Chiến, Hồ Xuân Bình, "Thuật toán song song tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng*, 5(22)/2007, 37-42.

[6] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích có trọng số tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà nẵng*, 3(26)/2008, 99-105.

[7] Trần Quốc Chiến, "Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 12(61)/2012, 16-21.

[8] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ, Trần Ngọc Việt, "Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mở rộng". *Proceeding of the 6th National Conference on Fundamental and Applied Information Technology Research (FAIR), Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VI "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT"*, Huế, 20-21/6/2013. NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ. Hà Nội 2013. 522-527.

[9] Trần Quốc Chiến, Trần Ngọc Việt, Nguyễn Đình Lầu, "Thuật toán tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 1(74)/2014, 1-4.

[10] Taylor, M. A. P., editor: *Transportation and Traffic theory in the 21st Century, Pergamon Press, Amsterdam*, The Netherlands, 2002.

[11] Ellis L. Johnson, Committee Chair, George L. Nemhauser: *Shortest paths and multicommodity network flow*, 2002.

(BBT nhận bài: 24/03/2014, phản biện xong: 10/04/2014)