

PHƯƠNG PHÁP ELLIPSOID CẢI TIẾN VÀ ỨNG DỤNG GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

MODIFIED ELLIPSOID METHOD AND ITS APPLICATION TO LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Phạm Quý Mười¹, Phan Thị Như Quỳnh²

¹Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; pqmuoi@ud.edu.vn

²Cao đẳng Công nghiệp Tuy Hòa, Phú Yên; phanthinhquynh@tic.edu.vn

Tóm tắt - Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu phương pháp Ellipsoid và phương pháp Ellipsoid cải tiến để tìm một điểm thỏa mãn hệ bất phương trình tuyến tính, và ứng dụng các phương pháp này vào bài toán quy hoạch tuyến tính. Đầu tiên, chúng tôi trình bày giải thuật Ellipsoid và chứng minh sự hội tụ của nó. Sau khi phân tích những hạn chế của giải thuật này, chúng tôi đưa ra giải thuật Ellipsoid cải tiến và chứng minh sự hội tụ của giải thuật mới này. Sau đó, chúng tôi trình bày cách ứng dụng phương pháp này vào giải bài toán tìm phương án chấp nhận được và phương án tối ưu chấp nhận được trong bài toán quy hoạch tuyến tính. Cuối cùng, một số ví dụ cụ thể được xem xét nhằm minh họa phương pháp Ellipsoid. Các chương trình được viết trong phần mềm Matlab cũng được trình bày chi tiết.

Từ khóa - bài toán quy hoạch tuyến tính; phương pháp Ellipsoid; phương pháp Ellipsoid cải tiến; phương án chấp nhận được; phương án tối ưu chấp nhận được.

Abstract - In this paper, we study Ellipsoid method and modified Ellipsoid method in order to find a point which satisfies a system of linear inequalities and apply it to linear programming problems. We first present Ellipsoid algorithm and prove its convergence. After analyzing the shortcomings of the algorithm, we propose the new algorithm called the modified Ellipsoid algorithm and prove its convergence. Then, we present how the methods can be applied to find feasible solutions and optimal feasible solutions of linear programming problems. Finally, some particular examples are given to illustrate the modified Ellipsoid method. The Matlab codes of modified Ellipsoid method as well as the Matlab codes for two numerical examples are also presented in detail.

Key words - linear programming problem; Ellipsoid method; Modified Ellipsoid method; feasible solution; optimal feasible solution.

1. Đặt vấn đề

Trong quy hoạch tuyến tính, người ta muốn tìm một nghiệm $x \in \mathbb{R}^n$ của bài toán tối ưu tuyến tính:

$$\min_{Ax \geq b} (c, x)_{\mathbb{R}^n} \quad (1)$$

trong đó, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ và $b \in \mathbb{R}^m$ là ma trận và là các vector cho trước.

Trong bài toán này, mỗi vector $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn bất đẳng thức $Ax \geq b$ được gọi là *một phương án chấp nhận được* và mỗi nghiệm của bài toán được gọi là *một phương án tối ưu chấp nhận được*. Các bài toán tìm phương án chấp nhận được và phương án tối ưu chấp nhận được là hai bài toán cơ bản và quan trọng trong nghiên cứu bài toán quy hoạch tuyến tính và được nghiên cứu bởi nhiều tác giả khác nhau. Đối với bài toán kích thước bé ($n \leq 10$), bài toán tìm một phương án chấp nhận được có thể giải thủ công (bằng tay) và bài toán tìm một phương án tối ưu chấp nhận được thường được giải bởi phương pháp đơn hình. Những phương pháp như thế có thể tham khảo ở các cuốn sách về bài toán quy hoạch tuyến tính, ví dụ như trong các cuốn [1,2].

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu phương pháp Ellipsoid và áp dụng nó vào tìm phương án chấp nhận được và phương án tối ưu chấp nhận được của bài toán (1) khi n và m có giá trị lớn. Ý tưởng chính của bài báo như sau:

Bài toán tìm phương án chấp nhận được và phương án tối ưu chấp nhận được của (1) có thể quy về việc tìm một nghiệm của tập P định nghĩa bởi

$$P = \{u \in \mathbb{R}^k : Bu \geq d\} \quad (2)$$

trong đó, $B \in \mathbb{R}^{l \times k}$ và $d \in \mathbb{R}^l$ là ma trận và vector cho trước tương ứng. Cho bài toán tìm phương án tối ưu chấp

nhận được, phương trình (2) nhận được từ định lý đối ngẫu, xem [1].

Vì thế, chúng ta trước hết trình bày phương pháp Ellipsoid để tìm một điểm của P và chứng minh sự hội tụ của nó. Chú ý rằng, phương pháp Ellipsoid đã được trình bày trong [1] và sự hội tụ của nó được chứng minh khi P là một tập bị chặn và đủ số chiều (xem định nghĩa ở phần sau). Trong bài báo này chúng tôi chỉ giả sử rằng tập P bị chặn và khác rỗng. Chúng ta sẽ nghiên cứu giải thuật Ellipsoid cải tiến trong điều kiện này. Kết quả chính của bài báo là đưa ra được giải thuật Ellipsoid cải tiến (Giải thuật 2) và chứng minh sự hội tụ của giải thuật này, xem Định lý 2. Các kết quả khác là trình bày ứng dụng các giải thuật vào bài toán quy hoạch tuyến tính cũng như các chương trình được viết trong môi trường Matlab. Các ví dụ số cụ thể sẽ minh họa cho sự thực thi hiệu quả của giải thuật Ellipsoid cải tiến.

2. Kết quả nghiên cứu

Phần này chúng tôi trình bày phương pháp Ellipsoid cho bài toán (2) và chứng minh sự hội tụ của nó. Trước hết, chú ý rằng một Ellipsoid trong không gian $\mathbb{R}^k$ là tập:

$$E(z, D) := \{x \in \mathbb{R}^k : (x - z)^T D^{-1} (x - z) \leq 1\},$$

trong đó D là ma trận đối xứng, xác định dương cấp $k \times k$ và $z \in \mathbb{R}^k$ được gọi là tâm của ellipsoid.

Chúng ta cũng cần khái niệm sau:

Định nghĩa: Tập $P \subset \mathbb{R}^k$ được gọi là đủ số chiều nếu tồn tại $r > 0$ sao cho P chứa quả cầu $S(y^*, r)$ với tâm tại y^* và bán kính r .

2.1. Ý tưởng của phương pháp Ellipsoid

Ý tưởng của phương pháp Ellipsoid là đi xây dựng một dãy ellipsoid có thể tích giảm dần và chứa tập P sao cho dãy các điểm tâm của ellipsoid hội tụ về một điểm nào đó của P . Cụ thể như sau:

Thuật toán Ellipsoid xây dựng ở mỗi bước lặp thứ t , một ellipsoid E_t có tâm x_t và chứa tập lồi đa diện P . Nếu $x_t \in P$ thì thuật toán kết thúc. Nếu $x_t \notin P$ thì x_t sẽ không thỏa mãn ít nhất một ràng buộc, tức là sẽ có một hàng b_i của B và thành phần d_i của d sao cho $b_i^T x_t < d_i$. Mọi $x \in P$ thỏa ràng buộc $Bx \geq d$ nên $b_i^T x \geq b_i^T x_t$. Do đó P chứa trong nửa không gian $K := \{x \in \mathbb{R}^k : b_i^T x \geq b_i^T x_t\}$. Vậy, nếu $x_t \notin P$ thì P chứa trong $E_t \cap K$. Ta gọi $E_t \cap K$ là nửa ellipsoid (chú ý rằng siêu phẳng xác định nửa ellipsoid đi qua tâm x_t của E_t). Tính chất hình học của ellipsoid cho phép ta tìm được một ellipsoid mới E_{t+1} chứa nửa ellipsoid của E_t và có thể tích nhỏ hơn hẳn E_t . Lặp lại quá trình trên ta sẽ thu được dãy điểm $\{x_t\}$ (hữu hạn hoặc vô hạn) sao cho $x_t \in P$ cho một giá trị t nào đó, hoặc $x_t \rightarrow x \in P$.

2.2. Giải thuật Ellipsoid và sự hội tụ

Cách xây dựng dãy Ellipsoid E_t như được mô tả ở phần trên được trình bày chi tiết trong Giải thuật 1 dưới đây:

Giải thuật 1	
Đầu vào:	Ma trận B và vectơ d ; Điểm x_0 và $r > 0$ sao cho hình cầu $E_0 = E(x_0, r^2 I)$ thỏa mãn $P \subset E_0$. $t = 0$;
Vòng lặp:	WHILE $x_t \notin P$
	Tìm hàng i sao cho: $b_i^T x_t < d_i$. (b_i là hàng thứ i của ma trận B)
	$x_{t+1} = x_t + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{D_t b_i}{\sqrt{b_i^T D_t b_i}},$ $D_{t+1} = \frac{k^2}{k^2 - 1} \left(D_t - \frac{2}{k+1} \cdot \frac{D_t b_i b_i^T D_t}{b_i^T D_t b_i} \right),$ $t = t + 1$;
	END WHILE
Đầu ra	x_t

Nhận xét 1: Chú ý rằng phương pháp đơn hình cho bài toán quy hoạch tuyến tính phải bắt đầu từ một phương án cực biên. Một phương án như thế thường là khó tìm, đặc biệt cho các bài toán kích thước lớn. Ngược lại, phương pháp Ellipsoid cho phép chúng ta tùy ý lựa chọn điểm khởi tạo. Chỉ cần chọn $r > 0$ đủ lớn, Giải thuật 1 luôn luôn cho kết quả. Đây là một ưu thế của phương pháp Ellipsoid.

Định lý 1. Giả sử P là tập bị chặn và đủ số chiều. Khi đó, Giải thuật 1 dừng sau hữu hạn bước.

Chứng minh: Chứng minh định lý này tương tự như chứng minh [1, Định lý 1] (trang 117).

Nếu giải thuật dừng lại sau hữu hạn bước thì định lý được chứng minh. Ta giả sử Giải thuật 1 lặp vô hạn và đi chứng minh rằng điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Trước hết ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng $P \subset E_t$ với mọi t . Từ Giải thuật 1, ta có $P \subset E_0$. Giả

sử $P \subset E_t$ đúng với t nào đó.

Vì $x_t \notin P$ nên sẽ có ràng buộc bị vi phạm: $b_{i(t)}^T x_t < b_{i(t)}$, với x_t là tâm của E_t . Với mọi $x \in P$, ta có $b_{i(t)}^T x_t < b_{i(t)} \leq b_{i(t)}^T x$.

$$\text{Do đó } P \subset K_t := \{x \in \mathbb{R}^k : b_{i(t)}^T x \geq b_{i(t)}^T x_t\}.$$

Vậy $P \subset E_t \cap K_t$. Gọi E_{t+1} là ellipsoid $E(x_{t+1}, D_{t+1})$ thì từ [1, Định lý 1] (trang 117) ta có $E_t \cap K_t \subset E_{t+1}$. Do đó, $P \subset E_{t+1}$. Vậy theo phương pháp quy nạp, ta có: $P \subset E_t$ với mọi t .

Vì P là tập đủ số chiều và $P \subset E_t$ với mọi t nên tồn tại y^* và $r^* > 0$ sao cho $S(y^*, r^*) \subset P \subset E_t$ với mọi t .

$$\text{Theo [1, Định lý 1]} \text{ ta có } \frac{\text{Vol}(E_{t+1})}{\text{Vol}(E_t)} < e^{\frac{-1}{2(k+1)}}$$

$\frac{\text{Vol}(E_t)}{\text{Vol}(E_0)} < e^{\frac{-t}{2(k+1)}}$ ($\text{Vol}(A)$ là “độ đo” của tập $A \subset \mathbb{R}^n$, tức là độ dài, diện tích, thể tích,... với $n = 1, 2, 3, \dots$ tương ứng). Do đó:

$$0 < \text{Vol}(S(y^*, r^*)) \leq \text{Vol}(E_t) \rightarrow 0,$$

khi t tiến ra vô cùng. Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Vì vậy Giải thuật 1 dừng lại sau hữu hạn bước.

Như vậy sự hội tụ của Giải thuật 1 nhận được khi P là tập đủ số chiều. Điều này hầu như không xảy ra cho bài toán tìm phương án tối ưu chấp nhận được trong quy hoạch tuyến tính vì trong nhiều trường hợp, tập các phương án tối ưu chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính là duy nhất hoặc hữu hạn. Trong phần tiếp theo chúng ta nghiên cứu giải thuật Ellipsoid cải tiến để nhận được nghiệm xấp xỉ của P trong trường hợp P bị chặn và khác rỗng.

2.3. Giải thuật Ellipsoid cải tiến và sự hội tụ

Giải thuật Ellipsoid cải tiến được trình bày bởi ngôn ngữ giả lập trình trong Giải thuật 2 sau đây:

Giải thuật 2	
Đầu vào:	Ma trận B và vectơ d ; Điểm x_0 và $r > 0$ sao cho hình cầu $E_0 = E(x_0, r^2 I)$ thỏa mãn $P \subset E_0$. $t = 0$; $\varepsilon > 0$ và $P_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : Bx \geq d - 2\varepsilon\}$.
Vòng lặp:	WHILE $x_t \notin P_\varepsilon$
	Tìm hàng i sao cho: $b_i^T x_t < d_i - 2\varepsilon$. (b_i là hàng thứ i của ma trận B)
	$x_{t+1} = x_t + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{D_t b_i}{\sqrt{b_i^T D_t b_i}},$ $D_{t+1} = \frac{k^2}{k^2 - 1} \left(D_t - \frac{2}{k+1} \cdot \frac{D_t b_i b_i^T D_t}{b_i^T D_t b_i} \right),$ $t = t + 1$;
	END WHILE
Đầu ra	x_t

Kết quả chính của bài báo được đưa ra trong định lý sau:

Định lý 2. Giả sử P là tập bị chặn và khác rỗng.

Khi đó, Giải thuật 2 dừng sau hữu hạn bước. Hơn nữa, nếu Giải thuật 1 dừng tại bước thứ $t = N(\varepsilon)$, thì $d(x_{N(\varepsilon)}, P) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$, trong đó $d(x, P) = \inf_{y \in P} \|x - y\|$ là khoảng cách từ x đến P .

Chứng minh: Ta định nghĩa $P_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : Bx \geq d - \varepsilon\}$. Vì P khác rỗng nên tồn tại $x \in P$. Chọn $\varepsilon_1 > 0$ đủ bé sao cho $\|By - Bx\| \leq \varepsilon$ với mọi $y \in S(x, \varepsilon_1)$. Khi đó, ta có $By \geq Bx - d - \varepsilon/2 \geq d - 2\varepsilon$ với mọi $y \in S(x, \varepsilon_1)$. Do đó, $S(x, \varepsilon_1) \subset P_{2\varepsilon}$. Tức là $P_{2\varepsilon}$ là tập đủ số chiều. Để thấy rằng, Giải thuật 2 chính là Giải thuật 1 với P được thay bởi $P_{2\varepsilon}$. Vì P là tập bị chặn và khác rỗng, nên $P_{2\varepsilon}$ là tập bị chặn và đủ số chiều. Áp dụng Định lý 1, ta có Giải thuật 2 dừng tại bước thứ $t = N(\varepsilon)$ hữu hạn và $x_{N(\varepsilon)} \in P_{2\varepsilon}$. Mặt khác, ta có:

$d(x_{N(\varepsilon)}, P) \leq d(P_{2\varepsilon}, P) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Vậy định lý được chứng minh.

3. Ứng dụng vào bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính (P) và bài toán đối ngẫu của nó (D) :

$$(P) \begin{cases} f(x) = c^T x \rightarrow \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (D) \begin{cases} g(y) = b^T y \rightarrow \max \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ và $b, y \in \mathbb{R}^m$.

Bài toán tìm một phương án chấp nhận được của (P) là tìm một điểm $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad (P_1) \quad \begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Từ định lý đối ngẫu mạnh thì (P) có nghiệm tối ưu x khi và chỉ khi (D) có nghiệm tối ưu y và điều này xảy ra khi và chỉ khi (x, y) thỏa mãn hệ bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} c^T x - b^T y \leq 0 \\ Ax \geq b \\ A^T y \leq c \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad (P_2) \quad \begin{bmatrix} -c^T & b^T \\ A & 0 \\ 0 & -A^T \\ I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó, bài toán tìm phương án chấp nhận được (P_1) và bài toán tìm phương án tối ưu chấp nhận được (P_2) dẫn đến bài toán tìm một nghiệm của bất phương trình (2).

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ trình bày kết quả số khi áp dụng Giải thuật 2 cho các ví dụ cụ thể. Chúng ta chọn $2\varepsilon = 10^{-10}$ và Giải thuật 2 được viết bằng ngôn ngữ lập trình Matlab. Các mã chương trình Matlab cho Giải thuật 2 và các ví dụ sau được trình bày trong phần tiếp theo:

Ví dụ 1:

Xét bài toán: Tìm $\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + 3x_2$ với điều kiện (x_1, x_2) thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ -x_1 \geq -3 \\ -x_2 \geq -4 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Bài toán này có duy nhất một nghiệm tối ưu là (2,1).

Giải thuật 2 cho bài toán tìm phương án chấp nhận được và phương án tối ưu trong ví dụ này được liệt kê ở Bảng 1&2. Chú ý rằng, các giá trị được làm tròn đến bốn chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Bảng 1. Giải thuật 1 với $x_0 = (0,0)$ và $r = 10$ cho Ví dụ 1 đối với bài toán tìm phương án chấp nhận được

t	x_t	$\min(Ax_t - b)$
0	(0,0)	-5
1	(2.9814, 1.4907)	-0.4907
2	(0.9155, 4.6835)	-1.7680
3	(0.7056, 1.8449)	-1.7439
4	(3.2403, 2.5560)	-0.2403
5	(1.2704, 3.1902)	0.0802

Bảng 1 cho thấy rằng, chỉ với 5 vòng lặp, chúng ta nhận được một phương án chấp nhận được. Trong trường hợp này, tập $P_1 = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ đủ số chiều và bị chặn. Do đó, kết quả số trong trường hợp này phù hợp với kết quả lý thuyết trong Định lý 2.

Đối với bài toán tìm phương án tối ưu, kết quả số được trình bày ở Bảng 2. Giải thuật dừng lại sau 3639 vòng lặp. Chú ý rằng, trong trường hợp này tập nghiệm tối ưu chỉ có một điểm, tức là giả thiết về đủ số chiều không thỏa mãn. Tuy vậy, giải thuật vẫn cho nghiệm xấp xỉ với độ chính xác cao sau hữu hạn bước.

Bảng 2. Giải thuật 1 với $x_0 = (0,0)$ và $r = 10$ cho Ví dụ 1 đối với bài toán tìm phương án tối ưu chấp nhận được

t	$x_t = (x, y)$	$\min(Bx_t - d)$
	x	
0	(0,0)	-5
1	(0.8944, 0.447)	-3.1305
2	(0.7161, 0.1104)	-3.4573
3	(1.5234, 0.4967)	-1.4565
...	...	...
3637	(2,1)	-1.2079e-10
3638	(2,1)	-1.3057e-10
3639	(2,1)	-9.6286e-11

Ví dụ 2:

Xét bài toán: Tìm $\min_{x \in \mathbb{R}^n} -\sum_{i=1}^n x_i$ với điều kiện $0 \leq x_i \leq 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Phương án tối ưu chấp nhận được của bài toán là $x = (1, \dots, 1)$.

Áp dụng Giải thuật 2 để tìm phương án tối ưu chấp nhận được trong ví dụ này được liệt kê ở Bảng 3. Ở đây

chúng ta chọn $n = 15$.

Bảng 3. Giải thuật 1 với $x_0 = (-1, \dots, -1)$ và $r = 3$ cho Ví dụ 2 đối với bài toán tìm phương án chấp nhận được

t	x_t	$\min(Ax_t - b)$
0	$(-1, \dots, -1)$	-1
1	$(-0.8125, \dots, -1)$	-1
...	...	...
90	$(0.0905, \dots, -0.3590)$	-0.3590
91	$(0.0905, \dots, -0.1715)$	-0.1715
92	$(0.0905, \dots, 0.0043)$	0.0043

Bảng 3 cho thấy sau 92 vòng lặp, chúng ta nhận được một phương án chấp nhận được. Trong trường hợp này $P_1 = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ đủ số chiều và bị chặn. Như trong Ví dụ 1, nghiệm số là một phương án chấp nhận được.

Đối với bài toán tìm phương án tối ưu, kết quả số được trình bày ở Bảng 4. Giải thuật dừng lại sau 81921 vòng lặp. Giống như Ví dụ 1, trong trường hợp này tập nghiệm tối ưu chỉ có một điểm, tức là giả thiết về đủ số chiều không thỏa mãn và nghiệm số là nghiệm xấp xỉ của phương án tối ưu chấp nhận được với độ chính xác gần như tuyệt đối.

Bảng 4. Giải thuật 1 với $x_0 = (0, \dots, 0)$ và $r = 10$ cho Ví dụ 2 đối với bài toán tìm phương án tối ưu chấp nhận được

t	$x_t = (x, y)$	$\min(Bx_t - d)$
	x	
0	$(0, \dots, 0)$	-1
1	$(0, \dots, 0)$	-1
2	$(0.0397, \dots, 0.0397)$	-1.0397
3	$(0.0399, \dots, 0.0399)$	-1.0399
...	...	...
81919	$(1, \dots, 1)$	-1.9933e-10
81920	$(1, \dots, 1)$	-1.0707e-10
81921	$(1, \dots, 1)$	-9.8824e-11

4. Chương trình Matlab

Các kết quả nghiệm số trong phần trên nhận được khi Giải thuật 1 được mã hóa trong phần mềm Matlab. Phần này chúng tôi đưa ra các chương trình Matlab của Giải thuật 1 và hai ví dụ đã trình bày ở phần trước. Giải thuật 1 là hàm “ellipsoid_method”.

4.1. Chương trình Matlab cho Giải thuật 1

```
function [x0 i Ax0 Amin] ...
=ellipsoid_method(A,b,x0,R,Nmax)
%Giải thuật 1
[m n]=size(A);
D0=R^2*eye(n,n);
m_min=min(A*x0-b);
Ax0=[x0];
Amin=[m_min];
for i=0:Nmax
    check=find(A*x0-b<-1e-10);
    if size(check,1)==0
        break;
    else
```

```
        k=check(1);
        ak=A(k,:);
        x1=x0+D0*ak/((1+n)*(sqrt(ak'*D0*ak)));
        x0=x1;
        tg1=n^2/(n^2-1);
        tg2=2/(n+1);
        D0=tg1*(D0- tg2*(D0*ak)*(ak'*D0)/(ak'*D0*ak));
        m_min=min(A*x0-b);
        Ax0=[ Ax0 x0];
        Amin=[ Amin m_min];
    end
end
Amin=Amin';
Ax0=Ax0';
end
```

4.2. Chương trình Matlab cho Ví dụ 1

```
clear all
Nmax=10000;
%EXAMPLE 1
A=[2 1; -1 1; -1 0; 0 -1; 1 -1; 0 0 1];
b=[5 -1 -3 -4 -2 0 0]';
%bài toán tìm phương án chấp nhận được
[m n]=size(A);
x0=zeros(n,1);
R=1e1;
[x0 i Ax0 Amin]=ellipsoid_method(A,b,x0,R,Nmax);
%bài toán tìm phương án tối ưu chấp nhận được
c=[2 3]';
B=[-c' b'; A zeros(m,m); zeros(n,n) -A'; ...
    eye(n) zeros(n,m); zeros(m,n) eye(m)];
d=[0; b; -c; zeros(n,1); zeros(m,1)];
k=size(B,2);
x0=zeros(k,1);
R=1e1;
[xx0 ii Axy0 Aminp] ...
=ellipsoid_method(B,d,x0,R,Nmax);
```

4.3. Chương trình Matlab cho Ví dụ 2

```
clear all
Nmax=100000;
%EXAMPLE 2
n=15;
A=[-eye(n); eye(n)];
b=[-ones(n,1); zeros(n,1)];
%bài toán tìm phương án chấp nhận được
[m n]=size(A);
x0=-ones(n,1);
R=3;
[x0 i Ax0 Amin]=ellipsoid_method(A,b,x0,R,Nmax);
%bài toán tìm phương án tối ưu chấp nhận được
c=-ones(n,1);
```

```

B=[-c' b';A zeros(m,m);zeros(n,n) -A';...
    eye(n) zeros(n,m); zeros(m,n) eye(m)];
d=[0; b; -c; zeros(n,1);zeros(m,1)];
k=size(B,2);
x0=-zeros(k,1);
R=1e1;
[xx0 ii Axy0 Aminp]...
=ellipsoid_method(B,d,x0,R,Nmax);

```

5. Kết luận

Bài báo này đã trình bày phương pháp Ellipsoid cho bài toán (2) và chứng minh sự hội tụ của nó dưới các

điều kiện khác nhau của tập P . Từ đó, chúng tôi chi tiết phương pháp Ellipsoid thông qua Giải thuật 1. Chúng tôi cũng đã chỉ ra cách ứng dụng phương pháp Ellipsoid vào tìm phương án chấp nhận được và phương án tối ưu chấp nhận được trong bài toán quy hoạch tuyến tính. Các ví dụ số đã minh họa Giải thuật 1 và các kết quả số phù hợp với các kết quả lý thuyết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming* (Vol. 116). Springer Science & Business Media.
- [2] Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương, 1999. *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Giáo dục.

(BBT nhận bài: 24/07/2015, phản biện xong: 31/08/2015)