

ĐỘNG LỰC HỌC VÀ CÁC ĐẶC TÍNH DAO ĐỘNG CỦA HỆ CON LẮC FURUTA

DYNAMIC MODEL AND VIBRATION CHARACTERISTICS OF THE FURUTA PENDULUM

Phạm Anh Đức, Trần Quang Khải, Đỗ Lê Hưng Toàn, Tôn Nữ Huyền Trang

Trường Đại học Bách khoa - Đại học Đà Nẵng

ducpham@dut.udn.vn, tqkhai@dut.udn.vn, dlhtoan@dut.udn.vn, tnhttrang@dut.udn.vn

Tóm tắt - Con lắc Furuta, hay còn được biết đến với cái tên “con lắc quay ngược”, là một hệ chuyển động có hai bậc tự do với các chuyển động đầu vào được tạo ra bởi một động cơ quay. Hệ con lắc này là một mô hình thực nghiệm lý tưởng để thực nghiệm các phương pháp điều khiển cũng như khảo sát đặc tính dao động của một hệ cơ điện hai bậc tự do. Mặc dù là hệ thống điều khiển phổ biến, thực tế hiện nay có rất ít các công bố trình bày hoàn chỉnh và chi tiết hệ động lực học cũng như đặc tính dao động của con lắc này. Do đó, bài báo sẽ đi vào chi tiết cách thiết lập phương trình động lực học của con lắc Furuta dựa trên các phương trình chuyển động Euler-Lagrange. Chương trình mô phỏng điều khiển và đặc tính chuyển động của các khâu trong con lắc Furuta sẽ được xây dựng trong ứng dụng Matlab. Dựa trên các thông số đặc trưng của hệ thống, các đặc tính dao động của hệ con lắc Furuta sẽ được mô tả cụ thể.

Từ khóa - Mô hình động lực học; hệ con lắc Furuta; đặc tính dao động

Abstract - Furuta pendulum, also known as “the inverted rotary pendulum” is a 2DOF model for control platform with initial movement created by a rotary motor. This pendulum model is a good platform not only to implement theoretical control methods but also to evaluate the vibration characteristics of a 2DOF mechatronics system. Despite the regularity of this control platform, few papers employ the dynamics model and vibration characteristics of Furuta pendulum in detail. Thus, this paper presents a mathematical model for the movement of Furuta pendulum based on Euler-Lagrange equations. Furthermore, a simulation model for system control and movement features of this pendulum is established in Matlab environment. Based on the identified parameters of the system, all vibration characteristics of Furuta pendulum are clearly illustrated.

Key words - Dynamics model; Furuta pendulum; Vibration characteristics

1. Giới thiệu

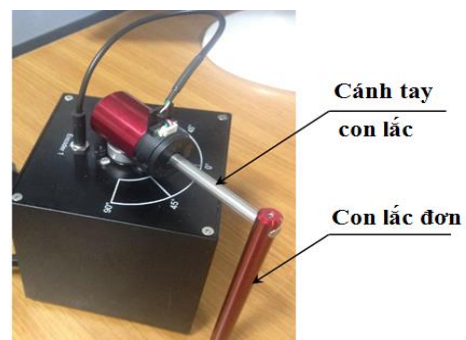
Hệ con lắc Furuta, hay còn được biết đến với cái tên “hệ con lắc quay ngược”, là một hệ chuyển động có hai bậc tự do với các chuyển động đầu vào được tạo ra bởi một động cơ quay. Một mô hình con lắc Furuta (Hình 1) bao gồm một cánh tay quay tròn trên mặt phẳng nằm ngang và một con lắc đơn dao động tự do trên mặt phẳng thẳng đứng [1-4]. Chuyển động quay tròn của cánh tay con lắc được tạo ra và được kiểm soát bởi một động cơ được đặt ở trục quay đầu vào. Do hệ chuyển động với hai bậc tự do nhưng chỉ có một trục có thể được điều khiển trực tiếp, nên hệ con lắc này là hệ thiếu cơ cấu chấp hành (under-actuated system) [2].

Hệ con lắc này là một mô hình thích hợp để thực nghiệm các phương pháp điều khiển cũng như khảo sát đặc tính dao động của một hệ cơ điện với hai bậc tự do. Sau lần giới thiệu tại Viện khoa học và kỹ thuật Tokyo bởi Furuta [1], nhiều nghiên cứu đã được công bố với thử nghiệm về các quy luật điều khiển tuyến tính hoặc phi tuyến trên mô hình này [5-7]. Đa phần các công bố này nghiên cứu quá trình quay ngược của con lắc [8] hoặc chỉ tập trung vào các mô hình lý tưởng hóa bằng cách loại bỏ các yếu tố phi tuyến trong chuyển động của con lắc hoặc chỉ xem xét moment quán tính quay của con lắc trong hệ đơn trục [3, 6-7]. Các mô hình điều khiển con lắc Furuta theo hướng tối ưu hóa và loại bỏ các yếu tố phức tạp sẽ giúp cho quá trình điều khiển đơn giản. Tuy nhiên, các kết quả có được từ nghiên cứu chưa đánh giá được rõ nét các vấn đề tồn tại thực tế của mô hình động lực học đó. Trong thực tế, các mô hình con lắc Furuta được sử dụng để làm nền tảng khảo sát dao động ở khâu chấp hành cuối của các cánh tay robot.

Đối với các nghiên cứu trong nước hiện nay, các tác giả thường chọn mô hình con lắc ngược đặt di chuyển tịnh tiến trên các hệ thanh ray [9-10]. Khác với hệ con lắc Furuta, quá trình chuyển động đầu vào của con lắc trong hệ tịnh

tiến đó bị giới hạn bởi không gian và phạm vi chuyển động trên thanh ray. Điều này làm cho chu trình khảo sát chuyển động của con lắc ở khâu chấp hành cuối cũng bị hạn chế. Thêm vào đó, các nghiên cứu cũng chỉ tập trung vào việc ứng dụng thuật toán điều khiển và kiểm soát cân bằng của con lắc trong quá trình dựng đứng của nó. Nền tảng mô hình điều khiển đó được dựa trên các lý thuyết tối ưu sử dụng bộ điều khiển toàn phương tuyến tính LQR.

Từ những nhận định đó, bài báo đề xuất hướng nghiên cứu đi vào thiết lập chi tiết bài toán động lực học của con lắc Furuta dựa trên các phương trình chuyển động Euler-Lagrange. Chương trình mô phỏng điều khiển và đặc tính chuyển động của các khâu trong con lắc Furuta sẽ được xây dựng trong ứng dụng Matlab. Dựa trên các thông số đặc trưng của hệ thống, các đặc tính dao động của hệ con lắc Furuta sẽ được mô tả cụ thể.

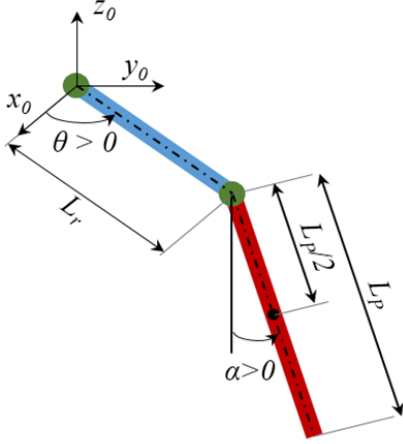


Hình 1. Mô hình hệ con lắc Furuta

2. Mô hình động lực học của con lắc Furuta

Khác với mô hình con lắc đơn hai bậc tự do truyền thống thường bị giới hạn bởi chu trình chuyển động trên các thanh ray. Hệ con lắc Furuta sử dụng các chuyển động quay được tạo ra bởi các động cơ servo một chiều để làm các tác động

đầu vào. Các cánh tay con lắc với chiều dài L_r sẽ có cùng giá trị góc quay θ như của động cơ. Đầu còn lại của cánh tay con lắc được kết nối với con lắc đơn có chiều dài L_p và khối lượng m_p dao động với góc lắc α , như Hình 2. Góc quay θ và góc lắc α được xem ở vị trí 0 theo đường thẳng đứng khi xét trong các mặt phẳng tham chiếu tương ứng của nó, và chiều dương được lấy theo chiều kim đồng hồ (CW).



Hình 2. Sơ đồ động học của hệ con lắc Furuta

Phương trình chuyển động của hệ con lắc này có thể được xác định bằng phương trình động lực học Euler-Lagrange như phương trình (1). Phương trình này được đồng thời áp dụng cho cả hai khâu của hệ con lắc Furuta, bao gồm: cánh tay con lắc L_r và con lắc đơn L_p . Động năng T của hệ là tổng động năng của cánh tay con lắc và con lắc đơn, được mô tả như trong phương trình (2). Hơn nữa, thế năng Π của hệ con lắc này cũng chính là thế năng của con lắc đơn. Nó được xác định dựa trên cấu trúc hình học và khối lượng của con lắc sử dụng trong mô hình, và biểu diễn bởi phương trình (3). Độ cản Φ của hệ con lắc Furuta của chuyển động trong phương trình (1) được xác định dựa vào phương trình (4). Rõ ràng, độ cản Φ của hệ con lắc Furuta là tổng độ cản chuyển động của các cơ cấu thành phần được tính theo tích của hệ số cản và vận tốc tương ứng với mỗi cơ cấu đó. Cuối cùng, tác động đầu vào của hệ con lắc này được mô tả bởi phương trình (5), với duy nhất một lực tác động τ đặt vào cánh tay con lắc.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q_i \quad (1)$$

$$T = T_{mr} + T_{mp}$$

$$= \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_p \left[L_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_p^2}{4} \dot{\alpha}^2 \right] + \frac{1}{2} m_p \left[\frac{L_p^2}{4} \dot{\theta}^2 \cdot \sin^2 \alpha + L_r L_p \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \alpha \right] \quad (2)$$

$$\Pi = m_p g \frac{L_p}{2} (1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

$$\Phi = D_r \dot{\theta} + D_p \dot{\alpha} \quad (4)$$

$$Q = [\tau \quad 0]^T \quad (5)$$

với T_{mr} động năng của cánh tay con lắc; T_{mp} động năng của

con lắc đơn; g gia tốc trọng trường; J_r, J_p moment quán tính của cánh tay con lắc, con lắc đơn; D_r, D_p hệ số cản của cánh tay con lắc và con lắc đơn.

Tác động đầu vào của hệ con lắc chính là lực moment của động cơ như trong phương trình (6). Theo đó, moment lực của động cơ được xác định dựa vào các định lý Kirchoff và định luật 2 Newton. Nó là thể hiện các mối quan hệ giữa hiệu suất động cơ η_m , hệ số sức điện động của động cơ K_m dòng điện đầu vào V_m , trở kháng R_m , và gia tốc của động cơ $\ddot{\theta}$.

$$\tau = \frac{\eta_m K_m (V_m - K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (6)$$

Thực hiện đạo hàm riêng theo hai biến thành phần là góc quay θ và góc lắc α với các công thức (1-5), phương trình chuyển động của cả hệ con lắc Furuta được biến đổi lại dưới dạng hệ phương trình (7).

$$\begin{cases} \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos^2 \alpha + J_r \right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \right) \ddot{\alpha} \\ + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - D_r \dot{\theta} \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} \\ - \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos \alpha \sin \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin \alpha = -D_p \dot{\alpha} \end{cases} \quad (7)$$

Thông thường, để dễ dàng giải bài toán động lực học hoặc thiết kế và mô phỏng điều khiển hệ con lắc này, người ta đề xuất phương pháp tuyến tính hóa hệ phương trình. Các phương trình được đề xuất loại bỏ các thành phần hàm sin/cos, giả sử các giá trị hàm đó của các góc quay/lắc tĩnh tiến về không. Tuy nhiên, việc làm này dễ dẫn đến các sai số trong giá trị tính toán, đặc tính hệ thống cũng như các tham số điều khiển áp dụng đối với mô hình cũng sẽ sai lệch. Do đó, nhóm nghiên cứu đề xuất giữ nguyên cấu trúc cũng như các thành phần trong hệ phương trình (7) – hệ phương trình phi tuyến. Cách giải quyết hệ phương trình trong mô phỏng sẽ được giải thích cụ thể trong phần sau.

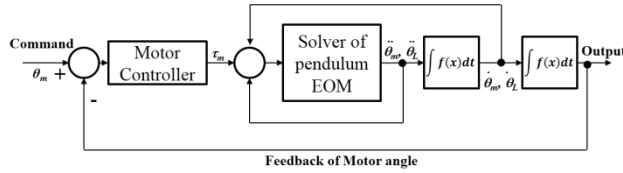
3. Mô phỏng động lực học và hệ điều khiển của hệ con lắc Furuta

Mô hình mô phỏng cho hệ con lắc quay hai bậc tự do Furuta được xây dựng và mô phỏng dựa trên sơ đồ khối như Hình 3 bằng phần mềm Matlab. Thông thường, đầu vào của chương trình điều khiển là các góc quay của động cơ (cũng là góc quay cánh tay con lắc). Các yêu cầu góc quay đầu vào này sẽ được xử lý bởi một bộ điều khiển PD để tạo các lực moment τ cần thiết cho động cơ.

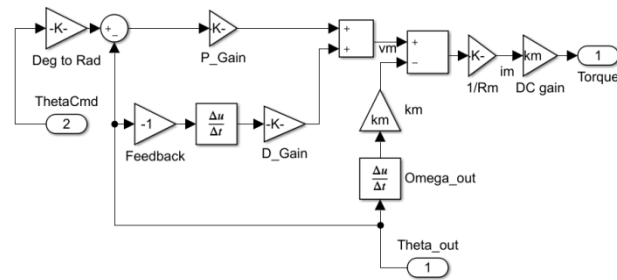
Chi tiết bộ điều khiển PD thiết kế được mô tả trong Hình 4. Ở đây, hệ số P được chọn là 25 và D là 1,25. Bộ thiết kế PD này được thiết kế dựa trên đặc tính hoạt động của một động cơ một chiều đặc trưng, đồng thời cũng dựa trên định lý Kirchoff và định luật 2 Newton cho một hệ cơ-điện.

Mô hình động lực học của hệ con lắc quay Furuta được thể hiện bởi khối “Solver of pendulum EOM”. Khối xử lý hệ phương trình phi tuyến của con lắc đơn này được giới thiệu như Hình 5. Ở đây, khối tích hợp các dòng lệnh giải

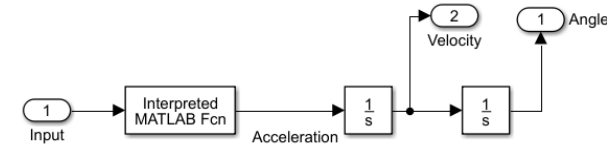
hàm số trong Matlab Simulink được sử dụng. Hệ phương trình (6) được lập trình trên nền ngôn ngữ của Matlab script và được nhúng vào trong khối “MATLAB Fcn” như trong Hình (5). Thông qua các khối tích phân, các tính toán đầu ra được chuyển đổi từ gia tốc sang vận tốc và các giá trị góc của góc quay θ hay góc lắc α . Từ đó ta biết được các đáp ứng đặc trưng của hệ con lắc quay Furuta.



Hình 3. Hệ mô phỏng hệ con lắc Furuta



Hình 4. Bộ điều khiển hệ con lắc Furuta



Hình 5. Khối xử lý chương trình động lực học của hệ con lắc Furuta trong Matlab

4. Đặc tính dao động của hệ con lắc quay Furuta

4.1. Thông số đặc trưng của mô hình

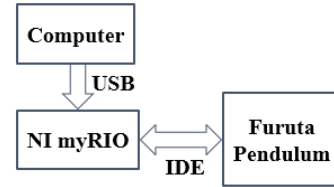
Giá trị của các thông số của mô hình hệ con lắc hai bậc tự do Furuta để sử dụng cho mô phỏng được sử dụng từ mô hình thực tế như trong Bảng 1. Các thông số của mô hình được xác định dựa trên các thông số cung cấp từ nhà sản xuất của từng thành phần.

Bảng 1. Các thông số mô hình hệ con lắc Furuta

Thông số	Kí hiệu	Đơn vị	Giá trị
Độ dài cánh tay lắc	L_r	(m)	0,085
Độ dài con lắc đơn	L_P	(m)	0,129
Moment quán tính của cánh tay lắc	J_r	(kg.m ²)	$5,72 \times 10^{-5}$
Moment quán tính của con lắc đơn	J_P	(kg.m ²)	$3,33 \times 10^{-5}$
Hệ số cản của cánh tay lắc	D_r	(Nms/rad)	0,0015
Hệ số cản của con lắc đơn	D_P	(Nms/rad)	0,0005
Khối lượng con lắc đơn	m_P	(kg)	0,024
Gia tốc trọng trường	g	(m/s ²)	9,81
Hệ số Back-EMF	K_m		0,0431
Nội điện trở của động cơ	R_m	Ω	0,84

4.2. Hệ thống thực nghiệm

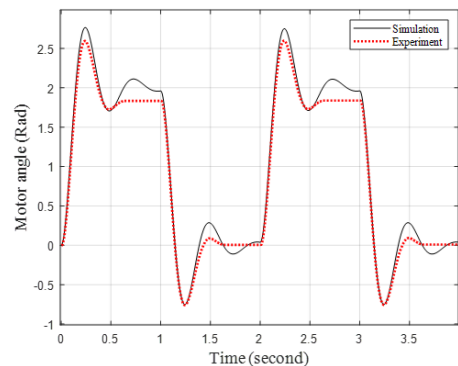
Mô hình thực nghiệm của mô hình hệ con lắc quay Furuta được mô tả như Hình 6. Một động cơ DC servo được sử dụng để tạo chuyển động cho mô hình con lắc. Các encoder quang được sử dụng để đo góc quay của động cơ và góc lắc của con lắc đơn. Hơn nữa, dữ liệu thu thập góc quay của động cơ và góc lắc của con lắc đơn cũng như các tín hiệu điều khiển sẽ được kiểm soát bởi bộ điều khiển NI myRIO. Bộ điều khiển này với các nền tảng FPGA và vi xử lý sử dụng chipset ARM Cortex-A9 sẽ giúp cho việc điều khiển hệ thống đạt sự đáp ứng gần như đồng thời theo sự thay đổi của thời gian thực. Việc này là vô cùng hiệu quả cho việc xử lý các tác vụ phức tạp, đồng thời và đáp ứng nhanh các yêu cầu điều khiển; tốt hơn các đòi hỏi thông thường.



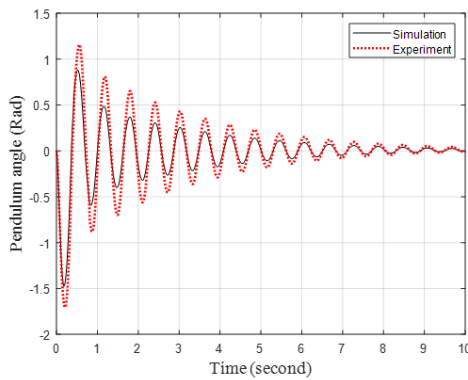
Hình 6. Mô hình giao tiếp trong hệ điều khiển của hệ con lắc quay Furuta

4.3. Đặc tính dao động của hệ con lắc quay Furuta

Các đặc tính dao động của hệ con lắc quay Furuta được so sánh giữa lý thuyết và thực nghiệm như trong Hình 7 và 8. Dựa trên các tham số hệ thống trong Bảng 1 kết hợp với hệ mô phỏng chi tiết bài toán động lực học của con lắc trong Matlab/Simulink, kết quả dao động của con lắc Furuta đã được thể hiện. Kết quả thực nghiệm được xác định dựa trên các giá trị đo được bởi hai encoder quang đặt ở động cơ và trục quay cánh tay con lắc. Rõ ràng, hệ con lắc quay này có các đặc tính của hệ dao động bậc hai (the second-order system). Đặc tính dao động của góc quay của cánh tay con lắc được mô tả như trong Hình 7. Hơn nữa, tín hiệu dao động đầu ra của con lắc đơn như trong Hình 8 thể hiện rằng hệ này là một hệ dao động dưới mức (under-damped system). Sau một thời gian dao động, con lắc sẽ có xu hướng đưa về trạng thái cân bằng. Việc xác định hệ số tắt dần, tần số dao động riêng của hệ hoàn toàn có thể được dựa trên mối quan hệ giá trị biên độ và thời gian của các đỉnh dao động trong tín hiệu đầu ra của góc lắc của hệ con lắc Furuta. Theo kết quả tính toán dựa trên kết quả có được theo phương pháp giảm số bậc logaric (log-decrement method), hệ con lắc này sẽ có tần số dao động riêng là 11,12 (Hz) và hệ số tắt dần là 0,367.



Hình 7. Dao động góc quay của cánh tay con lắc



Hình 8. Dao động góc lắc của hệ con lắc quay Furuta

Tuy nhiên, các kết quả đo đạc được cho thấy rằng, các dao động của con lắc trong mô hình thực nghiệm lại chậm hơn các kết quả mô phỏng được trong mô hình Matlab/Simulink. Các sai lệch này được gây ra bởi từ sai số giá trị của các thông số mô hình và tác động từ dây tín hiệu của encoder dùng để đo góc lắc. Rõ ràng, các tham số đầu vào của mô hình, như thông số động cơ, hệ số cản nhớt, khối lượng và kích thước các thành phần, cần được đo đạc và kiểm nghiệm lại trên thực tế. Quá trình nhận định hệ thống đó (identification of system) sẽ giúp cho kết quả đầu ra của mô phỏng và thực nghiệm tiệm cận với nhau hơn. Thêm vào đó, các tác động bên ngoài, như đặc điểm cấu trúc thiết kế của mô hình hay tác động từ yếu tố chưa mô tả cần được chú ý và xem xét như là một phần tác động không nhỏ đến tín hiệu đầu ra của hệ.

5. Kết luận

Bài báo trình bày bài toán động lực học của con lắc Furuta và các đặc tính dao động của nó. Bài báo giới thiệu chi tiết bài toán động lực học của hệ con lắc Furuta dựa trên các phương trình chuyển động Euler-Lagrange. Chương trình mô phỏng bài toán động lực học này được xây dựng trong ứng dụng Matlab/Simulink. Dựa trên các thông số đặc trưng của hệ thống, các đặc tính dao động của hệ con lắc Furuta đã được giới thiệu.

Các đặc tính dao động của con lắc Furuta cũng được kiểm nghiệm bằng mô hình thực tế. Dao động của hệ con lắc quay Furuta là dao động hệ bậc hai. Các kết quả thực nghiệm có sự sai lệch so với mô phỏng. Rõ ràng, các sai lệch này có thể là do các tham số mô hình có sự sai lệch so với thực tế hoặc do các yếu tố tác động bên ngoài. Do đó, quá trình nhận định hệ thống là cần thiết để kết quả mô phỏng tiệm cận với kết quả thực nghiệm của hệ thống.

Lời cảm ơn: Bài báo này được tài trợ bởi Trường Đại học Bách khoa – Đại học Đà Nẵng với đề tài có mã số: T2020-02-03.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] K. Furuta, M. Yamakita, and S. Kobayashi, "Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback", *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 206, no. 6, pp. 263–269, 1992.
- [2] Y. Xu, M. Iwase, and K. Furuta, "Time optimal swing-up control of single pendulum", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, vol. 123, no. 3, pp. 518–527, 2001.
- [3] K. Furuta and M. Iwase, "Swing-up time analysis of pendulum", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, vol. 52, no. 3, pp. 153–163, 2004.
- [4] M. Iwase, K. J. Åström, K. Furuta, and J. Åkesson, "Analysis of safe manual control by using Furuta pendulum", in *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications (CCA '06)*, pp. 568–572, October 2006.
- [5] J. Åkesson and K. J. Åström, "Safe manual control of the Furuta pendulum", in *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications (CCA '01)*, pp. 890–895, September 2001.
- [6] I. Fantoni and R. Lozano, *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems*, Springer, London, UK, 2002.
- [7] O. Egeland and T. Gravdahl, *Modeling and Simulation for Automatic Control, Marine Cybernetics*, Trondheim, Norway, 2002.
- [8] J. Aracil, J.A. Acosta, F. Gordillo, "A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the Furuta pendulum", *Control engineering practice*, Vol. 21, pp.989-993, 2013.
- [9] Cao Xuân Cường, Trần Đình Khôi Quốc, "Điều khiển mô hình con lắc ngược sử dụng bộ điều khiển LQR với hai vòng phản hồi", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Đà Nẵng*, Số 5 (126), 2018.
- [10] Nguyễn Thanh Tân, *Báo cáo tổng kết đề tài nghiên cứu khoa học cấp trường: Thiết kế mô hình cân bằng con lắc ngược*, Đại học Trà Vinh, 2017.

(BBT nhận bài: 05/3/2020, hoàn tất thủ tục phản biện: 02/6/2020)