

THUẬT TOÁN BELLMAN-FORD CẢI BIÊN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN MẠNG MỞ RỘNG

REVISED BELLMAN-FORD ALGORITHM FINDING SHORTEST PATH ON EXTENDED NETWORKS

Trần Quốc Chiến

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; tqchien@dce.udn.vn

Tóm tắt - Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, Cho đến nay, trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi chỉ đơn thuần là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, mà còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi đỉnh đó. Trong bài báo, mô hình đồ thị mở rộng được định nghĩa. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất là bài toán quan trọng nhất trong lý thuyết đồ thị và có nhiều ý nghĩa khoa học và ứng dụng. Thuật toán Bellman-Ford là thuật toán chính tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác, trong đó trọng số cạnh có thể âm. Trên cơ sở thuật toán Bellman-Ford tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị truyền thống, tác giả xây dựng và chứng minh thuật toán Bellman-Ford cải biên tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác trên mạng đồ thị mở rộng.

Từ khóa - đồ thị; đồ thị mở rộng; đường đi ngắn nhất; thuật toán Dijkstra; thuật toán Bellman-Ford.

1. Đặt vấn đề

Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, Cho đến nay trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi chỉ đơn thuần là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, mà còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi đỉnh đó. Ví dụ, thời gian đi qua ngã tư trên mạng giao thông phụ thuộc vào hướng đi chuyển của phương tiện giao thông: rẽ phải, đi thẳng hay rẽ trái.

Vì vậy, cần xây dựng một mô hình đồ thị tổng quát để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất là thuật toán cơ sở quan trọng, được sử dụng trong nhiều bài toán tối ưu trên đồ thị và mạng. Thuật toán Dijkstra nổi tiếng tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh đã được cải biên thành thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị mở rộng [1], [2]. Tuy nhiên, thuật toán này có một hạn chế là trọng số các cạnh phải dương. Thuật toán Bellman-Ford là thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác, trong đó trọng số cạnh có thể âm, được nghiên cứu và phát triển trong các công trình [3]-[9]. Trên cơ sở thuật toán Bellman-Ford tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị truyền thống, tác giả xây dựng và chứng minh thuật toán Bellman-Ford cải biên tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác trên đồ thị mở rộng. Thuật toán Bellman-Ford là thuật toán cơ sở cho nhiều ứng dụng của mạng hỗn hợp mở rộng. Đặc biệt, với bài toán tìm luồng cực đại chi phí cực tiểu có nhiều ứng dụng thực tế,

Abstract - Graph is a powerful mathematical tool applied in many fields such as transportation, communication, informatics, economy, ... So far, in ordinary graph the weights of edges and vertexes are considered independently and the length of a path is simply the sum of weights of the edges and the vertexes on this path. However, in many practical problems, weights at a vertex are not the same for all paths passing this vertex, but depend on coming and leaving edges. Therefore, a more general type of graphs, called extended graph, is defined in this work. The shortest path problem is one of the most important problems having great scientific and practical meaning. On the basis of the Bellman-Ford algorithm which finds shortest paths from a vertex to other vertexes, this paper develops a revised Bellman-Ford algorithm finding the shortest path from a vertex to other vertexes on extended networks.

Key words - graph; extended graph; shortest path; Dijkstra algorithm; Bellman-Ford algorithm.

trong mạng thẳng dư sẽ xuất hiện trọng số âm. Khi đó, ta phải tìm chu trình âm để hiệu chỉnh luồng giảm chi phí.

2. Đồ thị hỗn hợp mở rộng

Cho đồ thị hỗn hợp $G=(V, E)$ với tập đỉnh V và tập cạnh E , trong đó các cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Mỗi cạnh $e \in E$ được gán trọng số $w_E(e)$. Ký hiệu E_0 là tập hợp các cạnh vô hướng của G và E_1 là tập hợp các cạnh có hướng của G , $m_0 = |E_0|$, $m_1 = |E_1|$. Với mỗi đỉnh $v \in V$, ký hiệu N_v là tập các cạnh vô hướng liên thuộc đỉnh v , I_v là tập các cạnh có hướng đi vào đỉnh v và O_v là tập các cạnh có hướng đi ra từ đỉnh v . Mỗi đỉnh $v \in V$ và mỗi cặp cạnh $(e, e') \in (N_v \cup I_v) \times (N_v \cup O_v)$, $e \neq e'$ được gán trọng số $w_I(v, e, e')$.

Bộ (V, E, w_E, w_V) gọi là đồ thị mở rộng.

Cho p là đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v qua các cạnh e_i , $i = 1, \dots, h+1$, và các đỉnh u_i , $i = 1, \dots, h$, như sau:

$$p = [u, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, e_h, u_h, e_{h+1}, v]$$

Định nghĩa độ dài đường đi p , ký hiệu $l(p)$, theo công thức sau:

$$l(p) = \sum_{i=1}^{h+1} w_E(e_i) + \sum_{i=1}^h w_V(u_i, e_i, e_{i+1}) \quad (1)$$

• Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Cho đồ thị mở rộng $G = (V, E, w_E, w_V)$ và đỉnh $s \in V$. Tìm đường đi ngắn nhất từ s đến tất cả các đỉnh khác.

3. Thuật toán Bellman-Ford cải biên

◇ Đầu vào

Đồ thị mở rộng $G = (V, E, w_E, w_V)$ và đỉnh $s \in V$.

◊ *Đầu ra*

$l(v)$ là chiều dài đường đi ngắn nhất từ s đến v , và đường đi ngắn nhất (nếu $l(v) < +\infty$), $\forall v \in V$, hoặc kết luận đồ thị có chu trình âm qua đỉnh khả nối với s .

◊ *Phương pháp*

Thuật toán sử dụng các ký hiệu sau:

- $l(v)$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ s đến v ;
- $le(v)$ là cạnh dẫn đến đỉnh v trên đường đi ngắn nhất từ s đến v ;
- $VE_0 = \{(v, e) | v \in V \ \& \ e \in N_v\}$
- $VE_1 = \{(v, e) | v \in V \ \& \ e \in I_v\}$
- $VE = VE_0 \cup VE_1 \cup \{(s, \emptyset)\}$ là tập các cặp đỉnh và cạnh liên thuộc;
- $L(v, e)$ là nhãn cặp đỉnh-cạnh $(v, e) \in VE$;
- $P(v, e)$ là cặp đỉnh-cạnh trước $(v, e) \in VE$ trên đường đi ngắn nhất từ s đến v , với e là cạnh cuối dẫn đến v ;
- uv là ký hiệu tắt cạnh (u, v) .

(1) Khởi tạo:

Gán $L(v, e) = +\infty$, $\forall (v, e) \in VE$, $L(s, \emptyset) = 0$.

Gán $P(v, e) = \emptyset$, $\forall (v, e) \in VE$.

(2) For $i = 1$ to $(2m_0 + m_1)$ do

For $(u, v) \in N_v \cup I_v$ do

For (u, e) , $e \in N_u \cup I_u$

if $L(v, uv) > L(u, e) + w_I(e, u, uv) + w_E(u, v)$ then
 $\{L(v, uv) = L(u, e) + w_I(e, u, uv) + w_E(u, v);$
 $P(v, uv) = (u, e); \}$

(3) Nếu tồn tại $(u, v) \in N_v \cup I_v$ và $e \in N_u \cup I_u$ thỏa $L(v, uv) > L(u, e) + w_I(e, u, uv) + w_E(u, v)$, thì kết luận đồ thị có chu trình âm khả nối với s .

Ngược lại, $l(v) = \min\{L(v, e) | e \in N_v \cup I_v\}$ là độ dài đường đi (có hướng) ngắn nhất từ s đến v , và danh sách $P(v, e)$, cặp đỉnh-cạnh kế trước (v, e) trên đường đi ngắn nhất từ s đến v , $v \in V$.

Chứng minh

Ta xây dựng đồ thị $G' = (V', E', w')$ như sau:

- Tập đỉnh $V' = VE$
- Tập cạnh $E' = \{[(v_1, e_1), (v_2, e_2)] | w_I(e_1, v_1, e_2) + w_E(v_1, v_2) < +\infty\}$
- Trọng số $w'([(v_1, e_1), (v_2, e_2)]) = w_I(e_1, v_1, e_2) + w_E(v_1, v_2)$, $\forall [(v_1, e_1), (v_2, e_2)] \in E'$

Ta có $|V'| = 1 + |VE_0| + |VE_1| = 1 + \sum_{v \in V} |\{(v, e) | e \in N_v\}| +$

$\sum_{v \in V} |\{(v, e) | e \in I_v\}| = 1 + 2m_0 + m_1$. Áp dụng thuật toán

Bellman-Ford cho đồ thị G' tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $(s, \emptyset)$ đến các đỉnh khác, ta nhận được kết quả $L(v, e)$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ $(s, \emptyset)$ đến (v, e) , $\forall (v, e) \in V'$ hoặc tồn tại chu trình âm khả nối với $(s, \emptyset)$. Từ đó suy ra tính đúng đắn của thuật toán Bellman-Ford cải biên.

• *Độ phức tạp thuật toán*

Độ phức tạp thuật toán Bellman-Ford áp dụng cho đồ thị truyền thông là $O(n.m)$, trong đó n là số đỉnh và m là số cạnh của đồ thị [8], [9].

Độ phức tạp thuật toán Bellman-Ford cải biên áp dụng cho đồ thị mở rộng $G = (V, E, w_E, w_V)$ bằng độ phức tạp thuật toán Bellman-Ford áp dụng cho đồ thị $G' = (V', E', w')$. Như đã chỉ ra trong thuật toán, số đỉnh của đồ thị G' là $1 + 2m_0 + m_1$, trong đó m_0 là số cạnh vô hướng và m_1 là số cạnh có hướng của đồ thị G . Vì vậy, độ phức tạp thuật toán Bellman-Ford cải biên áp dụng cho đồ thị mở rộng $G = (V, E, w_E, w_V)$ là:

$$O((2m_0 + m_1) \cdot |E'|)$$

• *Phương pháp tìm đường đi ngắn nhất*

Cho $v \in V$ có $l(v) < +\infty$. Từ v truy vết ngược theo đỉnh-cạnh trước ta nhận được đường đi ngắn nhất từ s đến v như sau:

Đặt: $(v_1, e_1) = P(v, le(v))$, $(v_2, e_2) = P(v_1, e_1)$, ...,

... $(v_k, e_k) = P(v_{k-1}, e_{k-1})$, $(s, \emptyset) = P(v_k, e_k)$

Suy ra đường đi ngắn nhất là:

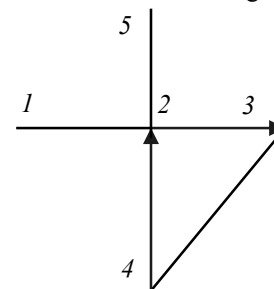
$$s \rightarrow v_k \rightarrow v_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_1 \rightarrow v$$

• *Ghi chú:* Ở bước 2, nếu ở vòng lặp nào đó mà kết quả không thay đổi so với vòng lặp trước, thì có thể kết thúc bước này mà không cần thực hiện các vòng lặp tiếp theo.

4. Ví dụ

4.1. Trường hợp không có chu trình âm

Cho đồ thị mở rộng ở Hình 1a



Hình 1a

Bảng 1a	
Cạnh	w_E
(1,2)	1
(2,3)	3
(3,4)	-1
(4,2)	2
(2,5)	2

Bảng 2a

Đỉnh	Cạnh 1	Cạnh 2	w_V
2	(1,2)	(2,3)	1
2	(1,2)	(2,5)	9
2	(4,2)	(2,1)	1
2	(4,2)	(2,3)	-5
2	(4,2)	(2,5)	1
2	(5,2)	(2,1)	1
2	(5,2)	(2,3)	1
3	(2,3)	(3,4)	1
4	(3,4)	(4,2)	1

Đồ thị có 5 đỉnh, 2 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng, $m_0=3$, $m_1=2$. Trọng số cạnh w_E cho ở Bảng 1a và trọng số đỉnh w_V cho ở Bảng 2a. Áp dụng thuật toán Bellman-Ford cải biên trên, tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại. Ta có $2m_0 + m_1 = 8$, nhưng vì kết quả bước lặp thứ 3 trùng với kết quả bước lặp thứ 2, nên thuật toán kết thúc qua 3 bước lặp và kết quả cho ở Bảng 3a:

Bảng 3a

VE	L_0	P_0	L_1	P_1	L_2	P_2	L_3	P_3	l
1, $\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	
1, (2,1)	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	10	2, (4,2)	10	2, (4,2)	
2, (1,2)	∞	$\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1

2,(4,2)	∞	$\emptyset$	8	4,(3,4)	8	4,(3,4)	8	4,(3,4)	
2,(5,2)	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	
3,(2,3)	∞	$\emptyset$	5	2,(1,2)	5	2,(1,2)	5	2,(1,2)	5
3,(4,3)	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	
4,(3,4)	∞	$\emptyset$	5	3,(2,3)	5	3,(2,3)	5	3,(2,3)	5
5,(2,5)	∞	$\emptyset$	11	2,(4,2)	11	2,(4,2)	11	2,(4,2)	11

Cột VE là các cặp đỉnh cạnh, L_0 và P_0 là giá trị khởi tạo của L và P , L_i và P_i là giá trị của L và P ở bước lặp thứ i , $i = 1, 2, 3$. Các cạnh được xét theo thứ tự: (1,2), (2,3), (3,4), (4,2), (2,5).

Vì không tồn tại $(u,v) \in N_v \cup I_v$ và $e \in N_u \cup I_u$ thỏa $L(v,uv) > L(u,e) + w_f(u,e,uv) + w_E(u,v)$, nên ta có thể suy ra khoảng cách ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh như sau:

$$l(2) = 1, le(2) = (1,2), l(3) = 5, le(3) = (2,3),$$

$$l(4) = 5, le(4) = (3,4), l(5) = 11, le(5) = (2,5)$$

Đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 5 được xác định như sau:

$$(2,(4,2)) = P(5,(2,5)), (4,(3,4)) = P(2,(4,2)),$$

$$(3,(2,3)) = P(4,(3,4)), (2,(1,2)) = P(3,(2,3)),$$

$$(1,\emptyset) = P(2,(1,2))$$

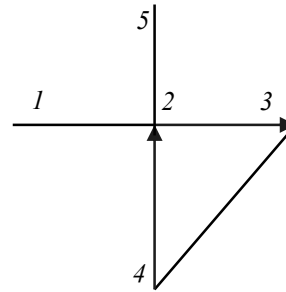
Suy ra đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 5 là: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$, với độ dài là 11.

4.2. Trường hợp có chu trình âm

Cho đồ thị mở rộng ở Hình 1b.

Đồ thị có 5 đỉnh, 2 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng, $m_0=3$, $m_1=2$. Trọng số cạnh w_E cho ở Bảng 1b và trọng số đỉnh w_V cho ở Bảng 2b. Áp dụng thuật toán Bellman-Ford cải biên trên tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại. Ta có $2m_0+m_1 = 8$, nên thuật toán kết thúc qua

8 bước lặp và kết quả cho ở Bảng 3b: Cột VE là các cặp đỉnh cạnh, L_0 và P_0 là giá trị khởi tạo của L và P , L_i và P_i là giá trị của L và P ở bước lặp thứ i , $i = 1, \dots, 8$.



Hình 1b

Bảng 1b

Cạnh	w_E
(1,2)	1
(2,3)	3
(3,4)	-3
(4,2)	2
(2,5)	2

Bảng 2b

Đỉnh	Cạnh 1	Cạnh 2	w_V
2	(1,2)	(2,3)	1
2	(1,2)	(2,5)	9
2	(4,2)	(2,1)	1
2	(4,2)	(2,3)	-5
2	(4,2)	(2,5)	1
2	(5,2)	(2,1)	1
2	(5,2)	(2,3)	1
3	(2,3)	(3,4)	1
4	(3,4)	(4,2)	1

Các cạnh được xét theo thứ tự: (1,2), (2,3), (3,4), (4,2), (2,5).

Xét cạnh (2,3). Ta có:

$$L(3,(2,3)) = -2 > L(2,(4,2)) + w_f(2,(4,2),(2,3)) + w_E(2,3) = -1 + -5 + 3 = -3$$

Suy ra đồ thị có chu trình âm: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ với độ dài là -1.

Bảng 3b

VE	L_0	P_0	L_1	P_1	L_2	P_2	L_3	P_3	L_4	P_4	L_5	P_5	L_6	P_6	L_7	P_7	L_8	P_8
1, $\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$
1,(2,1)	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	8	2,(4,2)	7	2,(4,2)	6	2,(4,2)	5	2,(4,2)	4	2,(4,2)	3	2,(4,2)	2	2,(4,2)
2,(1,2)	∞	$\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$	1	1, $\emptyset$
2,(4,2)	∞	$\emptyset$	6	4,(3,4)	5	4,(3,4)	4	4,(3,4)	3	4,(3,4)	2	4,(3,4)	1	4,(3,4)	0	4,(3,4)	-1	4,(3,4)
2,(5,2)	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$
3,(2,3)	∞	$\emptyset$	5	2,(1,2)	4	2,(4,2)	3	2,(4,2)	2	2,(4,2)	1	2,(4,2)	0	2,(4,2)	-1	2,(4,2)	-2	2,(4,2)
3,(4,3)	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$	∞	$\emptyset$
4,(3,4)	∞	$\emptyset$	3	3,(2,3)	2	3,(2,3)	1	3,(2,3)	0	3,(2,3)	-1	3,(2,3)	-2	3,(2,3)	-3	3,(2,3)	-4	3,(2,3)
5,(2,5)	∞	$\emptyset$	9	2,(4,2)	8	2,(4,2)	7	2,(4,2)	6	2,(4,2)	5	2,(4,2)	4	2,(4,2)	3	2,(4,2)	2	2,(4,2)

5. Kết luận

Bài viết xây dựng mô hình đồ thị hỗn hợp mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn mô hình đồ thị truyền thống. Sau đó, trên cơ sở thuật toán Bellman-Ford tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị truyền thống, tác giả xây dựng và chứng minh thuật toán Bellman-Ford cải biên tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác trên mạng đồ thị mở rộng. Hai ví dụ cụ thể được trình bày để minh họa thuật toán. Thuật toán Bellman-Ford là thuật toán cơ sở cho nhiều ứng dụng của mạng hỗn hợp mở rộng. Đặc biệt, với bài toán tìm luồng cực đại chi phí cực tiểu có nhiều ứng dụng

thực tế, trong mạng thẳng dư sẽ xuất hiện trọng số âm. Khi đó, ta phải tìm chu trình âm để hiệu chỉnh luồng giảm chi phí. Vấn đề này sẽ được nghiên cứu trong các công trình tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Quốc Chiến, “Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ*, Đại học Đà Nẵng, 12(61)/2012, 16-21.
- [2] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ, Trần Ngọc Việt, “Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mở rộng”, *Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VI “Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT”*, Huế, 20-21/6/2013, NXB Khoa học tự nhiên và Công

- nghe, Hà Nội 2013. p.522-527.
- [3] Bellman, Richard: *On a routing problem*. Quarterly of Applied Mathematics 16 (1958): 87–90. MR 0102435.
- [4] Ford Jr., Lester R.: *Network Flow Theory*. Paper P-923. Santa Monica, California: RAND Corporation (August 14, 1956).
- [5] Moore, Edward F.: *The shortest path through a maze*, Proc. Internat. Sympos. Switching Theory 1957, Part II. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press. pp. 285–292. MR 0114710.
- [6] Yen, Jin Y.: *An algorithm for finding shortest routes from all source nodes to a given destination in general networks*. Quarterly of Applied Mathematics 27 (1970): 526–530. MR 0253822.
- [7] Bannister, M. J., Eppstein, D.: *Randomized speedup of the Bellman–Ford algorithm* (PDF). Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO12), Kyoto, Japan (2012). pp. 41–47. arXiv:1111.5414
- [8] Bang-Jensen, Jørgen, Gutin, Gregory: *Section 2.3.4: The Bellman–Ford–Moore algorithm. Digraphs: Theory, Algorithms and Applications* (First ed. 2000). ISBN 978-1-84800-997-4.
- [9] Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L.: *Introduction to Algorithms*. MIT Press and McGraw-Hill., Second Edition. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. ISBN 0-262-03293-7. Section 24.1: The Bellman–Ford algorithm, pp. 588–592. Problem 24-1, pp. 614–615. Third Edition. MIT Press, 2009. ISBN 978-0-262-53305-8. Section 24.1: The Bellman–Ford algorithm, pp. 651–655.

(BBT nhận bài: 10/08/2015, phản biện xong: 22/09/2015)