

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐẠO HÀM NEWTON HÀM MỘT BIẾN

SOME BASIC PROPERTIES OF NEWTON DERIVATIVES OF ONE VARIABLE FUNCTIONS

Dương Xuân Hiệp, Phạm Quý Mười, Phan Đức Tuấn

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng;

dxhiep1994@gmail.com, pqmuoi@ued.edu.vn, pdtuang@ued.udn.vn

Tóm tắt - Phương pháp Newton nửa trơn đang được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà khoa học trên thế giới. Phương pháp này có tốc độ hội tụ nhanh (bậc hai) và có thể áp dụng cho các phương trình không trơn. Cơ sở của phương pháp dựa trên khái niệm đạo hàm Newton, một sự mở rộng của khái niệm đạo hàm cổ điển. Trong bài báo này, nhóm tác giả xét tính khả vi Newton của một số hàm thường gặp như hàm $|x|$, hàm $\max\{0, f(x)\}$ hoặc tổng quát hơn là hàm $\max\{f(x), g(x)\}$. Đây là các hàm số thường xuất hiện trong nhiều ứng dụng khác nhau. Tính khả vi Newton của hàm $\max\{f(x), g(x)\}$ là kết quả quan trọng nhất trong bài báo. Sau đó, nhóm tác giả trình bày các tính chất cơ bản của đạo hàm Newton. Nhóm tác giả chỉ ra rằng, đạo hàm Newton có một số tính chất tương tự như đạo hàm cổ điển như đạo hàm Newton của một tổng, hiệu, tích, thương.

Từ khóa - đạo hàm Newton; khả vi Newton; đạo hàm Newton của tổng, hiệu, tích, thương; khả vi Newton của hàm $\max\{0, f(x)\}$; khả vi Newton của hàm $\max\{f(x), g(x)\}$.

1. Đặt vấn đề

Khi mô hình toán các vấn đề trong khoa học kỹ thuật, y học, vật lý,... chúng ta thường dẫn đến việc tìm nghiệm của phương trình hoặc hệ phương trình, trong đó có sự xuất hiện các hàm số không khả vi, chẳng hạn như hàm dấu $\text{sgn}(x)$, hàm trị tuyệt đối $|x|$, hàm $\min\{0, x\}$, hàm $\max\{0, x\}$,... và các hàm hợp của chúng [1-4]. Những phương trình và hệ phương trình như thế được gọi là các phương trình không trơn. Gần đây, các nhà nghiên cứu đã đề xuất một số phương pháp để giải các phương trình không trơn, trong đó, phương pháp Newton nửa trơn đã và đang được nghiên cứu và ứng dụng phổ biến trong nhiều ứng dụng khác nhau [5-9]. Phương pháp này dựa trên khái niệm "đạo hàm Newton", một khái niệm mở rộng của đạo hàm cổ điển.

Với vai trò và tầm quan trọng của khái niệm đạo hàm Newton đối với các giải thuật cho phương trình không trơn, trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu tính khả vi Newton của một số hàm cơ bản, thường xuất hiện trong các phương trình không trơn [3, 5, 6, 7, 9] và nghiên cứu một số tính chất cơ bản của các hàm khả vi Newton. Để cho người đọc dễ nắm bắt được khái niệm đạo hàm Newton cũng như các tính chất cơ bản của đạo hàm Newton, nhóm tác giả chỉ xét cho lớp hàm một biến. Tuy nhiên các kết quả trong bài báo này dễ dàng được mở rộng cho các hàm nhiều biến.

2. Đạo hàm Newton

Định nghĩa 2.1. Cho D là một tập con khác rỗng của \mathbb{R} . Ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi Newton* tại $x \in D$ nếu tồn tại một lân cận mở $U \subset D$ của x và tồn tại

Abstract - The Semi-smooth Newton method is being widely considered by a number of researchers in the world. This method converges very fast (second-order convergence) and also can be applied to non-smooth equations. It bases on the notion of "Newton derivative", an extend notion of the Fréchet derivative. In this paper, we study Newton differential of common functions including $|x|$ function, $\max\{0, f(x)\}$ function or general function like $\max\{f(x), g(x)\}$ that are presented in many applications. The Newton differential of $\max\{f(x), g(x)\}$ function is the significant result of this paper. In addition, The authors state propositions on basic properties of Newton derivative. They indicate that Newton derivative contains similar propositions with Fréchet ones such as Newton derivatives of the sum, subtraction, multiplication and division.

Key words - Newton Derivative; Newton differential; Newton derivatives of sum, subtraction, multiplication, division; Newton derivative of $\max\{0, f(x)\}$; Newton derivative of $\max\{f(x), g(x)\}$.

ánh xạ $F : U \rightarrow \mathcal{L}(D, \mathbb{R})$ sao cho

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0,$$

trong đó $\mathcal{L}(D, \mathbb{R})$ là tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ D vào \mathbb{R} .

Khi đó F được gọi là *một đạo hàm Newton* của f tại x .

Định nghĩa 2.2. Cho U là một tập con mở của $D \subset \mathbb{R}$. Ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi Newton trên U* nếu tồn tại ánh xạ $F : U \rightarrow \mathcal{L}(D, \mathbb{R})$ sao cho với mỗi $x \in U$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Khi đó, hàm số f được gọi là *hàm Newton nửa trơn trên U* và F được gọi là *một đạo hàm Newton của f trên U* .

Chú ý 2.1. Nếu hàm số f có đạo hàm cổ điển f' liên tục trên tập mở U thì f là hàm nửa trơn trên U và đạo hàm Newton của f là f' .

Thật vậy, với mọi $x \in U$, ta có:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x+h)h|}{|h|} \\ &\leq \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} + |f'(x) - f'(x+h)| \rightarrow 0 \text{ khi } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vậy f là hàm nửa trơn trên U và có một đạo hàm Newton là $F = f'$.

3. Đạo hàm Newton của các hàm số thường gặp

Trong phần này, nhóm tác giả nghiên cứu tính khả vi

Newton của một số hàm cơ bản, thường xuất hiện trong các bài toán tối ưu không trơn. Kết quả chính của phần này và cũng là kết quả cơ bản nhất trong bài báo là tính khả vi Newton của hàm $\max\{f(x), g(x)\}$.

Mệnh đề 3.1. Hàm số $f(x) = |x|$ có đạo hàm Newton trên \mathbb{R} và phiếm hàm $F(x)(\cdot)$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0, \\ \delta & \text{nếu } x = 0, \\ 1 & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

với $\delta \in \mathbb{R}$ là đạo hàm Newton của f trên \mathbb{R} .

Chứng minh

Thật vậy, ta có:

$$F(x)h = \begin{cases} -h & \text{nếu } x > 0, \\ \delta h & \text{nếu } x = 0, \\ h & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$$

là một phiếm hàm tuyến tính với mỗi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\|F(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{|F(x)h|}{|h|} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq 0, \\ |\delta| & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Suy ra $F(x)(\cdot)$ là phiếm hàm tuyến tính bị chặn.

Với $x > 0$ và h đủ nhỏ, ta có $x+h > 0$ và

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Với $x = 0$, ta có:

$$|f(0+h) - f(0) - F(0+h)h| = 0,$$

với $h > 0$ hoặc $h < 0$. Do đó

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(0+h) - f(0) - F(0+h)h|}{|h|} = 0.$$

Với $x < 0$, tương tự trường hợp $x > 0$ ta thu được:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy phiếm hàm tuyến tính liên tục $F(x)(\cdot)$ là đạo hàm Newton của hàm số $f(x) = |x|$.

Mệnh đề 3.2. Hàm số $f(x) = \max\{0, x\}$ có đạo hàm Newton trên \mathbb{R} và phiếm hàm tuyến tính $F(x)(\cdot)$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0, \\ \delta & \text{nếu } x = 0, \\ 1 & \text{nếu } x > 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

với $\delta \in \mathbb{R}$ là đạo hàm Newton của f trên \mathbb{R} .

Chứng minh

Thật vậy, phiếm hàm $F(x)(\cdot)$ xác định bởi (0.1) là một phiếm hàm tuyến tính với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Hơn nữa

$$\|F(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{|F(x)h|}{|h|} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0, \\ |\delta| & \text{nếu } x = 0, \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Suy ra $F(x)$ là phiếm hàm tuyến tính bị chặn. Tương tự như trong Mệnh đề 3.1, xét các trường hợp $x > 0$, $x = 0$ và $x < 0$, ta cũng chứng minh được

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy phiếm hàm tuyến tính liên tục $F(x)$ là đạo hàm Newton của hàm số $f(x) = \max\{0, x\}$ trên \mathbb{R} .

Mệnh đề 3.3. Cho hàm số $g(x) = \max\{0, f(x)\}$ với $f \in C^1(\mathbb{R})$ và thỏa mãn $f(x) = 0$ tại hữu hạn điểm $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Khi đó, hàm số g có đạo hàm Newton trên \mathbb{R} và đạo hàm Newton của $g(x)$ là phiếm hàm tuyến tính $G(x)(\cdot)$ xác định bởi

$$G(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{nếu } x \in P, \\ \delta_i & \text{nếu } x = x_i \in O, \\ 0 & \text{nếu } x \in N, \end{cases} \quad (0.2)$$

trong đó $P = \{x \mid f(x) > 0\}$, $O = \{x \mid f(x) = 0\}$, $N = \{x \mid f(x) < 0\}$ và $\delta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Chứng minh

Thật vậy, ta có là phiếm hàm $G(x)(\cdot)$ xác định bởi (0.2) là một phiếm hàm tuyến tính với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Hơn nữa

$$\|G(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{|G(x)h|}{|h|} = \begin{cases} f'(x) & \text{nếu } x \in P, \\ \delta_i & \text{nếu } x = x_i \in O, \\ 0 & \text{nếu } x \in N. \end{cases}$$

Suy ra $G(x)(\cdot)$ là phiếm hàm tuyến tính bị chặn.

+ Với $x \in P$ và với h đủ nhỏ, ta có $x+h \in P$ (do P là một tập mở) và

$$\begin{aligned} & \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} \\ &= \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x+h)h|}{|h|} \\ &\leq \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} \\ &\quad + \frac{|f'(x)h - f'(x+h)h|}{|h|}. \end{aligned}$$

Vì $f \in C^1(\mathbb{R})$ nên

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0,$$

và $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f'(x)h - f'(x+h)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |f'(x) - f'(x+h)| = 0.$

$$\text{Do đó } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

+ Với $x \in N$ và với h đủ nhỏ, ta có $x+h \in N$ (do N là một tập mở) và

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

+ Với $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ và với $h \neq 0$ đủ bé, ta có:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|g(x_i+h) - g(x_i) - G(x_i+h)h|}{|h|} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(x_i+h) - f(x_i) - f'(x_i+h)h|}{|h|} & \text{nếu } x_i+h \in P, \\ 0 & \text{nếu } x_i+h \in N. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|g(x_i+h) - g(x_i) - G(x_i+h)h|}{|h|} = 0.$$

Tương tự như trên, ta có:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|g(x_i+h) - g(x_i) - G(x_i+h)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x_i+h) - f(x_i) - f'(x_i+h)h|}{|h|} = 0.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x_i+h) - g(x_i) - G(x_i+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy phiếm hàm tuyến tính $G(x)(\cdot)$ là đạo hàm Newton của hàm số $g(x) = \max\{0, f(x)\}$ trên \mathbb{R} .

Trong Mệnh đề 3.3, hàm số $g(x) = \max\{0, f(x)\}$ được chứng minh là khả vi Newton nếu hàm f có hữu hạn không điểm. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát hơn, khi mà hàm số f có thể có hữu hạn hoặc vô hạn không điểm. Để đưa ra được một đạo hàm Newton cho hàm số g trong trường hợp tổng quát này, ta cần kết quả trong bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. Cho hàm số f xác định trên $D = P \cup O \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in \bar{P} \cap \bar{O}$. Nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset P, \{y_n\} \subset O$ với $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow x_0$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a,$$

thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Chứng minh

Ta xét một dãy $\{x_n\}$ với $x_n \rightarrow x_0$ tùy ý và đặt

$$I_1 = \{n \mid x_n \in P\} = \{n_1, n_2, \dots\}.$$

$$I_2 = \{n \mid x_n \in O\} = \{k_1, k_2, \dots\}.$$

Suy ra $\{x_{n_i}\} \subset P, \{x_{k_j}\} \subset O$. Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: I_1 hữu hạn và I_2 vô hạn. Khi đó, tồn tại n^* sao cho $\forall n \geq n^*, x_n \in O$. Từ giả thiết của bổ đề, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

+ Trường hợp 2: I_1 vô hạn, I_2 hữu hạn. Tương tự, ta cũng chỉ ra được $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

+ Trường hợp 3: Cả I_1, I_2 vô hạn. Khi đó,

• Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = a \Rightarrow \exists i_1^* : |f(x_{n_i}) - a| < \varepsilon, \forall i \geq i_1^*.$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = a \Rightarrow \exists j_1^* : |f(x_{k_j}) - a| < \varepsilon, \forall j \geq j_1^*.$$

Chọn $n^* = \max\{n_{i_1^*}, k_{j_1^*}\}$. Khi đó, vì $I_1 \cup I_2 \in \mathbb{N}$ nên với mỗi $n \geq n^*$, tồn tại $i \geq i_1^*$ hoặc tồn tại $j \geq j_1^*$ để cho $n = n_i$ hoặc $n = k_j$. Do đó, trong cả hai trường hợp ta đều có:

$$|f(x_n) - a| = |f(x_{n_i}) - a| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Sử dụng bổ đề này, chúng ta chứng minh được kết quả sau:

Mệnh đề 3.4. Cho hàm số $g(x) = \max\{0, f(x)\}$ với $f \in C^1(\mathbb{R})$. Khi đó, phiếm hàm tuyến tính $G(x)(\cdot)$ xác định bởi

$$G(x) = \begin{cases} f'(x) & , x \in P \\ 0 & , x \in Q \end{cases}$$

với $P = \{x \mid f(x) > 0\}$ và $Q = \{x \mid f(x) \leq 0\}$ là một đạo hàm Newton của g trên \mathbb{R} .

Chứng minh

Chúng ta dễ dàng kiểm tra được với mỗi $x \in \mathbb{R}$ phiếm hàm $G(x)(\cdot)$ với

$$G(x)h = \begin{cases} f'(x)h & , x \in P \\ 0 & , x \in Q. \end{cases}$$

là một toán tử tuyến tính và bị chặn.

$$\text{Đặt } O = \{x \mid f(x) = 0\}, P = \{x \mid f(x) > 0\},$$

$$Q = \{x \mid f(x) \leq 0\}, \text{ ta có } P \cup Q = \mathbb{R}.$$

Với $x \in P$ và với $h \neq 0$ đủ bé, ta có $x+h \in P$ (do P là một tập mở). Do đó

$$\begin{aligned} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} &= \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x+h)h|}{|h|} \\ &\leq \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} + \frac{|f'(x)h - f'(x+h)h|}{|h|}. \end{aligned}$$

Vì $f \in C^1(\mathbb{R})$ nên

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0$$

và

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f'(x)h - f'(x+h)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |f'(x) - f'(x+h)| = 0.$$

$$\text{Do đó } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Với $x \in Q$ và $x \neq \bar{P}$ thì x là điểm trong của $R \setminus \bar{P} \subset Q$. Do đó, với h đủ bé thì $x+h \in O$ và $x+h \neq \bar{P}$, suy ra

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Với $x \in \bar{P} \cap \bar{Q}$ thì $x \in O$. Với mọi dãy $\{x_n\} \subset P$ mà $x_n = x + h_n$ với $h_n \rightarrow 0$ và với mọi dãy $\{y_n\} \subset Q$ mà $y_n = x + k_n$ với $k_n \rightarrow 0$, ta có

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{|g(x_n) - g(x) - G(x_n)h_n|}{|h_n|} = 0,$$

$$\lim_{k_n \rightarrow 0} \frac{|g(y_n) - g(x) - G(y_n)k_n|}{|k_n|} = 0.$$

Theo Bổ đề 3.1, ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy phiếm hàm tuyến tính $G(x)(\cdot)$ là đạo hàm Newton của hàm số $g(x)$ trên \mathbb{R} .

Định lý 3.1. Cho hàm số $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ với $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ và $f(x) = g(x)$ tại hữu hạn điểm rời rạc $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Khi đó, đạo hàm Newton của hàm số $h(x)$ là phiếm hàm tuyến tính $H(x)(\cdot)$ xác định bởi

$$H(x) = \begin{cases} f'(x) & , x \in P \\ g'(x) & , x \in N \\ \delta_i & , x = x_i \in O. \end{cases}$$

Ở đây

$$P = \{x \mid f(x) > g(x)\},$$

$$N = \{x \mid f(x) < g(x)\},$$

$$O = \{x \mid f(x) = g(x)\}$$

Chúng minh tương tự như trong Mệnh đề 3.3.

Định lý 3.2. Cho hàm số $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ với $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Khi đó, đạo hàm Newton của hàm số $h(x)$ là phiếm hàm tuyến tính H xác định bởi

$$H(x) = \begin{cases} f'(x) & , x \in P \\ g'(x) & , x \in Q. \end{cases}$$

trong đó $P = \{x \mid f(x) > g(x)\}$, $Q = \{x \mid f(x) \leq g(x)\}$.

Chúng minh tương tự như trong Mệnh đề 3.4.

4. Một số tính chất của đạo hàm Newton

Trong phần này, nhóm tác giả trình bày một số kết quả liên quan đến tính khả vi Newton của tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của hai hàm khả vi Newton và chỉ ra rằng, tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm khả vi Newton là hàm khả vi Newton. Đối với hàm hợp, để có kết quả tương tự như khả vi cổ điển chúng ta cần điều kiện mạnh hơn, tức là

hợp của một hàm khả vi Newton và một hàm khả vi cổ điển. Chi tiết các kết quả này sẽ được trình bày lần lượt thông qua các định lý dưới đây.

Định lý 4.1. Cho f và g xác định trên $D \subset \mathbb{R}$, là các hàm nửa trơn trên tập mở $U \subset D$ với một đạo hàm Newton tương ứng là F và G . Khi đó hàm số $f+g$ và $f-g$ cũng là các hàm nửa trơn trên U và có một đạo hàm Newton lần lượt là $F+G$ và $F-G$.

Chúng minh

Vì F và G là Newton đạo hàm của f và g trên U nên với mọi $x \in U$, ta có:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Do đó với mọi $x \in U$, ta có:

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(f+g)(x+h) - (f+g)(x) - (F+G)(x+h)h|}{|h|}$$

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy hàm số $f+g$ là hàm nửa trơn trên U và có một đạo hàm Newton là $F+G$. Chúng minh tương tự cho hàm $f-g$.

Định lý 4.2. Cho hàm số f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$ là hàm nửa trơn trên $U \subset D$ với một đạo hàm Newton là F . Khi đó, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, hàm số λf cũng là hàm nửa trơn trên U và có một đạo hàm Newton là λF .

Chúng minh

Vì F là đạo hàm Newton của f trên U nên với mọi $x \in U$, ta có:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Do đó

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x) - (\lambda F)(x+h)h|}{|h|} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số λf là hàm nửa trơn trên U và có một đạo hàm Newton là λF .

Định lý 4.3. Cho f và g xác định trên $D \subset \mathbb{R}$, g liên tục trên D và $g(x) \neq 0$ ($\forall x \in D$), là các hàm nửa trơn trên tập mở $U \subset D$ với một đạo hàm Newton tương ứng là F và G . Khi đó, hàm số $h = f.g$ và $k = \frac{f}{g}$ cũng là các hàm nửa trơn trên U và có một đạo hàm Newton lần lượt là $H = F.g + f.G$ và $K = \frac{F.g - f.G}{g^2}$.

Chứng minh

Vì F và G là đạo hàm Newton của f và g trên U nên với mọi $x \in U$, ta có:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + F(x+h)h + o(h),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x) - G(x+h)h|}{|h|} = 0$$

$$\Rightarrow g(x+h) = g(x) + G(x+h)h + o(h).$$

Thế biểu thức $f(x+h)$ và $g(x+h)$ ở trên và khai triển, ta có:

$$\begin{aligned} h(x+h) - h(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= (g(x)F(x+h) + f(x)G(x+h))h + o(h) \\ &= [(g(x+h) - G(x+h))h + o(h)]G(x+h) + \\ &+ (f(x+h) - F(x+h))h + o(h) \\ &= (g(x+h)F(x+h) + f(x+h)G(x+h))h + o(h) \\ &= H(x+h)h + o(h). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h(x+h) - h(x) - H(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy $H = F.g + f.G$ là một đạo hàm Newton của hàm số $h = f.g$ trên U .

Tương tự ta chứng minh tính khả vi Newton cho k . Ta có:

$$\begin{aligned} k(x+h) - k(x) &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} (f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)) \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} [(F(x+h)g(x) - f(x)G(x+h))h + o(h)] \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ [F(x+h)(g(x+h) - G(x+h))h + o(h)] \right. \\ &\quad \left. - (f(x+h) - F(x+h))h + o(h) \right\} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ [g(x+h)F(x+h) + f(x+h)G(x+h) \right. \\ &\quad \left. + (F(x+h) - G(x+h))o(h)]h + o(h) \right\} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ (g(x+h)F(x+h) + f(x+h)G(x+h))h \right. \\ &\quad \left. + (F(x+h) - G(x+h))o(h^2) + o(h) \right\} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} [(F(x+h)g(x+h) - f(x+h).G(x+h))h + o(h)] \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k(x+h) - k(x) - A|}{|h|} = 0,$$

$$\text{với } A = \frac{F(x+h)g(x+h) - f(x+h)G(x+h)}{g(x+h)g(x)}h.$$

Đề ý rằng g liên tục trên D nên cũng liên tục trên U và $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$.

$$\text{Suy ra } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k(x+h) - k(x) - B|}{|h|} = 0,$$

$$B = \frac{F(x+h)g(x+h) - f(x+h)G(x+h)}{g^2(x)}h.$$

$$\text{với } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|k(x+h) - k(x) - K(x+h)h|}{|h|} = 0.$$

Vậy $K = \frac{F.g - f.G}{g^2}$ là một đạo hàm Newton của hàm

$$\text{số } k = \frac{f}{g}.$$

5. Kết luận

Kết quả chủ yếu của bài báo này là đưa ra được các điều kiện đủ cho tính khả vi Newton của hàm $\max\{f(x), g(x)\}$ và một số trường hợp đặc biệt của nó. Bài báo cũng đã phát biểu và chứng minh tính chất khả vi Newton của tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm khả vi Newton. Đây là các kết quả cơ bản và cần thiết khi nghiên cứu đạo hàm Newton, Phương pháp Newton nửa trơn và ứng dụng của phương pháp vào giải các bài toán cụ thể.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Frank H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, The Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1990.
- [2] Ivar Ekeland and Roger Témam, *Convex Analysis and Variational Problems*, The Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999.
- [3] Liqun Qi and Defeng Sun, "A survey of some nonsmooth equations and smoothing Newton methods", *Progress in optimization*, 30, 1999, pp. 121-146.
- [4] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [5] Phạm Quý Mười, Đinh Nho Hao, Peter Maass, and Michael Pidcock, "Semismooth Newton and Quasi-Newton methods in weighted l_1 -regularization", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21(5), 2013, pp. 665-693.
- [6] Phạm Quý Mười, Đinh Nho Hao, Peter Maass, and Michael Pidcock, "Descent gradient methods for nonsmooth minimization problems in ill-posed problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 298, 2016, pp. 105-122.
- [7] Xiaojun Chen, Zuhair Nashed, and Liqun Qi, "Smoothing methods and Semismooth methods for nondifferentiable operator equations", *SIAM Journal Numerical Analysis*, 38(5), 2000, pp. 1200-1216.
- [8] M. HinterMuller, K. Ito, and K. Kunish, "The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method", *SIAM Journal on Optimization*, 13(3), 2003, pp. 865-888.
- [9] M. HinterMuller, *Semismooth Newton Method and Applications*, Oberwolfach-Seminar on Mathematics of PDE-Constrained Optimization, November 2010.