

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỌN ĐIỂM KHỞI ĐẦU TRONG GIẢI THUẬT ĐIỂM TRONG CHO BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

A METHOD OF CHOOSING STARTING POINT IN INTERIOR POINT ALGORITHMS FOR LINEAR PROGRAMMING

Phạm Quý Mười¹, Phan Thị Như Quỳnh²

¹Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; pqmuoi@ud.edu.vn

²Trường Cao đẳng Công nghiệp Tuy Hòa; phanthinhquynh@tic.edu.vn

Tóm tắt - Phương pháp điểm trong thường được dùng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Do tốc độ hội tụ nhanh, phương pháp này thường được dùng để giải các bài toán có kích thước lớn. Tuy nhiên, sự hội tụ của giải thuật lại phụ thuộc vào việc chọn điểm khởi đầu. Vì thế, phương pháp chọn điểm khởi đầu có yếu tố quyết định cho sự hoạt động của giải thuật và đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả khác nhau ở trong và ngoài nước. Trong bài báo này, nhóm tác giả đề xuất một phương pháp chọn điểm khởi đầu đảm bảo cho sự hội tụ của giải thuật điểm trong cho bài toán quy hoạch tuyến tính. Phương pháp này dựa trên giải thuật Ellipsoid cải tiến tìm nghiệm của một bất đẳng thức tuyến tính. Các ví dụ số cụ thể sẽ minh họa tính hiệu quả của phương pháp được nhóm tác giả đề xuất. Tất cả các mã Matlab của các giải thuật được trình bày chi tiết trong bài báo.

Từ khóa - bài toán quy hoạch tuyến tính; phương pháp chọn điểm khởi đầu; phương pháp điểm trong; phương pháp Ellipsoid; phương án chấp nhận được khởi đầu; phương án tối ưu chấp nhận được.

Abstract - The interior point Method is commonly used to solve linear programming problems, especially those of large size due to its fast convergence speed. However, the convergence of the algorithm depends on the choice of starting point. Thus, the method of selecting the starting point determines the operation of the algorithm and has attracted the interest of both domestic and international authors. In this paper, the authors propose a method of selecting the starting point to ensure the convergence of the interior point algorithm for linear programming. This method is based on the Elliptic algorithm of solving linear inequalities. Specific examples will illustrate the effectiveness of the method proposed by the authors. All Matlab codes of these algorithms are also presented in detail in the article.

Key words - Linear programming; Method of choosing starting point; Interior point method; Ellipsoid method; feasible solution; feasible optimal solution.

1. Đặt vấn đề

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$ cho trước và $x \in R^n$ là vector cần tìm. Trong bài báo này, nhóm tác giả giả sử rằng tập các nghiệm chấp nhận được (tức là tập các phương án chấp nhận được) có phần trong khác rỗng.

Có nhiều phương pháp để giải Bài toán (1) như phương pháp hình học, phương pháp đơn hình, phương pháp đơn hình đối ngẫu [1,2]. Khi bài toán có kích thước lớn, người ta thường tìm nghiệm xấp xỉ của Bài toán (1) bằng phương pháp điểm trong. Phương pháp điểm trong cho Bài toán (1) rất dễ để lập trình trong các phần mềm toán học như Matlab, Maple,... Tuy nhiên, một nhược điểm của phương pháp này là vấn đề tìm điểm khởi đầu đảm bảo cho sự hội tụ của giải thuật. Vấn đề này đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học trong và ngoài nước [1, 2].

Trong bài báo này, nhóm tác giả trình bày một phương pháp có tính ứng dụng cao cho việc tìm điểm khởi đầu bảo đảm sự hội tụ của giải thuật điểm trong cho Bài toán (1). Phương pháp đưa ra ở đây dựa trên giải thuật Ellipsoid cải tiến tìm nghiệm của một bất đẳng thức tuyến tính được nghiên cứu trong [3].

Bài báo có bố cục như sau: Các kết quả chính của bài báo được trình bày trong Mục 2: Mục 2.1 trình bày tóm tắt giải thuật Ellipsoid và Ellipsoid cải tiến. Mục 2.2 trình

bày phương pháp điểm trong cho Bài toán (1). Mục 2.3 trình bày phương pháp chọn điểm khởi đầu cho phương pháp điểm trong. Đây là kết quả chính của bài báo. Trong Mục 3 nhóm tác giả áp dụng phương pháp điểm trong để giải một số ví dụ cụ thể và xem xét sự hoạt động của phương pháp điểm trong với điểm khởi đầu được chọn bởi phương pháp đưa ra trong Mục 2.3. Cuối cùng, trong Mục 4 nhóm tác giả trình bày mã Matlab cho các giải thuật và ví dụ được khảo sát trong bài báo này.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Giải thuật Ellipsoid và sự hội tụ

Trong phần này nhóm tác giả trình bày tóm tắt giải thuật Ellipsoid cho bài toán: Tìm một điểm của tập P định nghĩa bởi:

$$P = \{u \in R^k : Bu \geq d\}, \quad (2)$$

trong đó $B \in R^{l \times k}$ và $d \in R^l$ là ma trận và vector cho trước.

Chú ý rằng, phương pháp Ellipsoid đã được nghiên cứu trong [1,3] và sự hội tụ của nó được chứng minh khi P là một tập bị chặn và đủ số chiều.

Định nghĩa 1. Tập $P \subset R^k$ được gọi là đủ số chiều nếu tồn tại $r > 0$ sao cho P chứa quả cầu $S(y^*, r)$ với tâm tại y^* và bán kính r .

Trước hết, chú ý rằng một Ellipsoid trong không gian R^k là tập

$$E(z, D) := \{x \in R^k : (x - z)^T D^{-1} (x - z) \leq 1\},$$

trong đó D là ma trận đối xứng, xác định dương cấp $k \times k$ và $z \in R^k$ được gọi là tâm của Ellipsoid.

Ý tưởng của phương pháp Ellipsoid là đi xây dựng một dãy Ellipsoid có thể tích giảm dần và chứa tập P sao cho dãy các điểm tâm của Ellipsoid hội tụ về một điểm nào đó của P . Cụ thể như sau:

Thuật toán Ellipsoid xây dựng ở mỗi bước lặp thứ t , một Ellipsoid E_t có tâm x_t và chứa tập lồi đa diện P . Nếu $x_t \in P$ thì thuật toán kết thúc. Nếu $x_t \notin P$ thì x_t sẽ không thỏa mãn ít nhất một ràng buộc, tức là sẽ có một hàng b_i của B và thành phần d_i của d sao cho $b_i^T x_t < d_i$. Mọi $x \in P$ thỏa ràng buộc $Bx \geq d$ nên $b_i^T x \geq b_i^T x_t$. Do đó P chứa trong nửa không gian $K := \{x \in R^k : b_i^T x \geq b_i^T x_t\}$. Vậy, nếu $x_t \notin P$ thì P chứa trong $E_t \cap K$. Ta gọi $E_t \cap K$ là nửa Ellipsoid (chú ý rằng siêu phẳng xác định nửa Ellipsoid đi qua tâm x_t của E_t). Tính chất hình học của Ellipsoid cho phép ta tìm được một Ellipsoid mới E_{t+1} chứa nửa Ellipsoid của E_t và có thể tích nhỏ hơn hẳn E_t . Lặp lại quá trình trên ta sẽ thu được dãy điểm $\{x_t\}$ (hữu hạn hoặc vô hạn) sao cho $x_t \in P$ cho một giá trị t nào đó, hoặc $x_t \rightarrow x \in P$.

Cách xây dựng dãy Ellipsoid E_t như được mô tả ở phần trên được trình bày chi tiết trong Giải thuật 1 dưới đây:

Giải thuật 1:	
Phương pháp Ellipsoid cho Bài toán (2)	
Đầu vào	Ma trận B và vectơ d ; Điểm x_0 và $r > 0$ sao cho hình cầu $E_0 = E(x_0, r^2 I)$ thỏa mãn $P \subset E_0$, $t=0$;
Vòng lặp	WHILE $x_t \notin P$ 1. Tìm hàng i sao cho: $b_i^T x_t < d_i$ (b_i là hàng thứ i của ma trận B). 2. $x_{t+1} = x_t + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{D_i b_i}{\sqrt{b_i^T D_i b_i}}$, 3. $D_{t+1} = \frac{k^2}{k^2-1} \left(D_t - \frac{2}{k+1} \cdot \frac{D_i b_i b_i^T D_t}{b_i^T D_i b_i} \right)$, 4. $t = t+1$, END WHILE
Đầu ra	x_t

Định lý 2. Giả sử P là tập bị chặn và đủ số chiều. Khi đó, Giải thuật 1 dừng sau hữu hạn bước.

Chứng minh: Chứng minh định lý này có thể tìm thấy ở [1, Định lý 1] (trang 117).

Chú ý 3. Điều kiện P là tập đủ số chiều là một điều kiện khá chặt và trong nhiều trường hợp, điều kiện này không thỏa mãn, ví dụ như tập nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính. Hơn nữa, việc biểu diễn các số trong máy tính luôn chứa đựng sai số. Do đó, Giải thuật 1 thường có tính không ổn định. Vì thế, trong [3] nhóm tác giả đã đề xuất một giải thuật thay thế, được gọi là phương pháp Ellipsoid cải tiến. Phương pháp Ellipsoid cải tiến hội tụ chỉ dưới điều kiện tập P khác rỗng và bị chặn. Giải thuật cho phương pháp Ellipsoid cải tiến hoàn toàn giống Giải thuật 1 ngoại trừ điều kiện trong Bước 1 (nằm trong vòng lặp Giải thuật 1) được thay bởi điều kiện

$b_i^T x_t - d_i < -2\delta$ với $\delta > 0$ được chọn khá bé.

2.2. Giải thuật điểm trong và sự hội tụ

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc đưa ra bởi Bài toán (1). Ý tưởng đầu tiên trong phương pháp điểm trong là thay vì trực tiếp giải Bài toán (1), thì sẽ đi giải một dãy bài toán xấp xỉ mà dãy nghiệm của nó hội tụ về một nghiệm của (1). Cụ thể là xét dãy bài toán tối ưu sau:

$$\begin{cases} \min B_\mu(x) := c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \log x_j, \\ Ax = b. \end{cases} \quad (3)$$

Ở đây $\mu > 0$ là tham số và nghiệm của bài toán ký hiệu là $x(\mu)$. Hàm $B_\mu(x)$ được gọi là hàm chắn (barrier function). Hàm chắn này có một ưu việt là nó lồi chặt nên nghiệm $x(\mu)$ của Bài toán (3) là duy nhất. Rõ ràng khi μ càng nhỏ (gần 0) thì $x(\mu)$ càng gần đến nghiệm tối ưu của Bài toán (1).

Bài toán (3) là một bài toán phi tuyến và vì thế vẫn còn khó giải vì hàm mục tiêu tuy là lồi chặt nhưng không phải là hàm bậc hai. Ta lại xấp xỉ một lần nữa bài toán này bằng cách thay $B_\mu(x)$ bởi đa thức Taylor bậc hai của nó. Giả sử $x > 0$ là nghiệm xấp xỉ hiện hành, tính toán trực tiếp các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai, ta có:

$$B_\mu(x+d) \approx B_\mu(x) + (c^T - \mu e^T X^{-1})d + \frac{1}{2} \mu d^T X^{-2} d. \quad (4)$$

Ở đây ma trận chéo X là ma trận có đường chéo chính là vectơ x . Bây giờ, thay cho Bài toán (3) ta giải bài toán xấp xỉ với hàm mục tiêu ở bên vế phải của (4) theo d . Vì x cố định, bài toán xấp xỉ tương đương với:

$$\begin{cases} \min (c^T - \mu e^T X^{-1})d + \frac{1}{2} \mu d^T X^{-2} d \\ Ad = 0. \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ cho nghiệm tối ưu của bài toán này là:

$$\begin{cases} c - \mu X^{-1} e + \mu X^{-2} d - A^T y = 0 \\ Ad = 0. \end{cases}$$

Vì thế, phương pháp điểm trong cho Bài toán (1) được trình bày ở Giải thuật 2.

Giải thuật 2: Phương pháp điểm trong cho Bài toán (3)	
Đầu vào	- Tham số của bài toán: A, b, c . - Điểm xuất phát: (x^0, y^0, s^0) . - Tiêu chuẩn dừng: $\varepsilon > 0$. - Giá trị tham số chắn: μ^0 và tham số $\alpha \in (0, 1)$.
Vòng lặp	WHILE $(s^k)^T x^k < \varepsilon$ 1. $\mu^{k+1} = \alpha \mu^k$; 2. Giải hệ tuyến tính ra d và y : $\begin{cases} \mu^{k+1} X_k^{-2} d - A^T y = \mu^{k+1} X_k^{-1} e - c \\ Ad = 0, \end{cases}$ 3. Cập nhật: $x^{k+1} = x^k + d$

	$y^{k+1} = y$ $s^{k+1} = c - A^T y$
	$k := k + 1$
	END WHILE
Đầu ra	x^k

Chú ý rằng, X_k là ma trận chéo mà đường chéo chính là vectơ x^k và ở mục đầu vào của giải thuật trên, $x^0 > 0$ là nghiệm chấp nhận được của (3) và $(y^0, s^0), (s^0 > 0)$ là nghiệm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu của nó.

Sự hội tụ của giải thuật này được đưa ra trong định lý sau:

Định lý 4. ([1], Định lý hội tụ)

Giả sử nghiệm gốc và đối ngẫu chấp nhận được xuất phát là $x^0, (y^0, s^0)$, với $x^0 > 0, s^0 > 0$ thỏa

$$\left\| \frac{1}{\mu^0} X_0 S_0 e - e \right\| \leq \beta < 1. \quad (5)$$

Nếu tham số $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{\beta} - \beta}{\sqrt{\beta} + \sqrt{n}}$ thì sau

$$K = \left\lceil \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{n}}{\sqrt{\beta} - \beta} \log \frac{(s^0)^T x^0 (1 + \beta)}{\varepsilon (1 - \beta)} \right\rceil$$

bước lặp, Giải thuật 2 sẽ cho cặp nghiệm chấp nhận được gốc x^k và đối ngẫu (y^k, s^k) với lỗi hồng đối ngẫu thỏa $(s^k)^T x^k \leq \varepsilon$.

2.3. Phương pháp chọn điểm khởi đầu

Từ Định lý 4 nhóm tác giả thấy rằng để Giải thuật 2 hội tụ thì điểm xuất phát cho giải thuật (x^0, y^0, s^0) phải thỏa mãn hai điều kiện:

(1) $x^0 > 0, s^0 > 0$ và $x^0, (y^0, s^0)$ lần lượt là điểm chấp nhận được của Bài toán (3) và bài toán đối ngẫu của nó.

(2) μ^0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left\| \frac{1}{\mu^0} X_0 S_0 e - e \right\| \leq \beta < 1.$$

Trong hai điều kiện này, thì điều kiện thứ nhất là quan trọng nhất, có vai trò quyết định sự hội tụ của Giải thuật 2. Trong khi đó, thực tế cho thấy, Giải thuật 2 hội tụ với bất kỳ dãy $\{\mu^k\}$ hội về 0 khi $k \rightarrow \infty$. Điều này có nghĩa là nếu điểm khởi đầu thỏa mãn Điều kiện (1) thì Giải thuật 2 hội tụ cho bất kỳ giá trị μ^0 và tham số $\alpha \in (0, 1)$. Tuy nhiên, sự lựa chọn giá trị μ^0 và $\alpha \in (0, 1)$ ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ của giải thuật. Điều kiện (2) cùng với giá trị cụ thể của α trong Định lý 4 chỉ là điều kiện đủ để Giải thuật 2 hội tụ sau K bước lặp.

Do vai trò quan trọng của việc chọn các giá trị khởi tạo thỏa mãn Điều kiện (1), nhóm tác giả sẽ trình bày một phương pháp để chọn một điểm xuất phát (x^0, y^0, s^0) thỏa mãn Điều kiện (1).

Trước hết, chú ý rằng bài toán đối ngẫu của (1) là:

$$\begin{cases} \max y^T b \\ y^T A + s^T = c^T \\ s \geq 0. \end{cases}$$

Do đó, $x^0, (y^0, s^0)$ lần lượt là điểm chấp nhận được của Bài toán (1) và bài toán đối ngẫu của nó nếu:

$$\begin{cases} Ax^0 = b \\ A^T y^0 + s^0 = c \\ x^0 \geq 0, s^0 \geq 0. \end{cases}$$

Để thỏa mãn điều kiện $x^0 > 0, s^0 > 0$, xét bài toán:

$$\begin{cases} Ax^0 = b \\ A^T y^0 + s^0 = c \\ x^0 \geq \alpha \\ s^0 \geq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I_n \\ 0 & -A^T & -I_n \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ s^0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \\ c \\ -c \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (6)$$

trong đó, chọn $\alpha > 0$ là một số dương khá bé, ví dụ $\alpha = 10^{-10}$.

Dễ thấy rằng Bài toán (6) là một trường hợp cụ thể của Bài toán (2) và vì thế nghiệm của nó có thể tìm được bằng Phương pháp Ellipsoid (Giải thuật 1) hoặc phương pháp Ellipsoid cải tiến (tức là Giải thuật 1 cùng với Chú ý 2).

Cuối cùng, xem xét cách chọn μ^0 . Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\mu^0} X_0 S_0 e - e \right\| &\leq \left\| \frac{1}{\mu^0} X_0 S_0 - I \right\| \|e\| \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \left| \frac{x_i^0 s_i^0}{\mu^0} - 1 \right| \right\} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Do đó, điều kiện đủ cho $\left\| \frac{1}{\mu^0} X_0 S_0 e - e \right\| \leq \beta$ là:

$$\max_{i=1, \dots, n} \left\{ \left| \frac{x_i^0 s_i^0}{\mu^0} - 1 \right| \right\} \sqrt{n} \leq \beta,$$

hay (như đã giả sử $\beta < 1$):

$$\mu^0 \in \left[\frac{x_i^0 s_i^0 \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \beta}, \frac{x_i^0 s_i^0 \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \beta} \right] \subset \left[\frac{a \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \beta}, \frac{b \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \beta} \right],$$

với mọi $i = 1, \dots, n$. Ở đây, ký hiệu $a = \min_{i=1, \dots, n} \{x_i^0 s_i^0\}$ và $b = \max_{i=1, \dots, n} \{x_i^0 s_i^0\}$.

Điều này suy ra:

$$\mu^0 \in \left[\frac{b \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \beta}, \frac{a \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \beta} \right].$$

Do đó, Điều kiện (2) thỏa mãn khi và chỉ khi $\beta < 1$ và μ^0 tồn tại, tức là:

$$\begin{cases} \frac{b \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \beta} \leq \frac{a \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \beta} \\ \beta < 1 \end{cases}$$

Điều này tương đương với:

$$\frac{b-a}{a+b} \sqrt{n} \leq \beta < 1.$$

Bất đẳng thức này chỉ thỏa mãn khi n khá bé hoặc $a-b$ khá bé (gần bằng không). Việc chọn các điểm khởi đầu x^0 và s^0 để thỏa mãn Điều kiện (1), đồng thời $b-a$ khá bé thường rất khó. Tuy nhiên, như đã đề cập ở trên, Giải thuật 2 hội tụ

với mọi $\mu^0 > 0$ và tham số $\alpha \in (0, 1)$. Vì thế, có thể chọn:

$$\mu^0 = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \beta}, \beta = 0,5 \text{ và } \alpha = 0,5. \text{ Các ví dụ số ở phần}$$

sau xác nhận rằng với các giá trị tham số này Giải thuật 2 hội tụ rất nhanh.

3. Ví dụ số

Trong phần này, nhóm tác giả xem xét hai ví dụ cụ thể và sẽ trình bày kết quả nghiệm số khi áp dụng Giải thuật 2 với điểm khởi tạo đưa ra trong Mục 2.3. Ở đây, nhóm tác giả chọn $2\delta = 10^{-4}$ cho giải thuật Ellipsoid cải tiến, chọn $\varepsilon = 10^{-10}$ cho Giải thuật 2 và $\sigma = 10^{-10}$ trong Bài toán (6). Các giải thuật và chương trình giải hai ví dụ ở đây được viết bằng ngôn ngữ lập trình Matlab và được trình bày trong phần tiếp theo.

Ví dụ 1: Xét bài toán: Tìm min $_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + 3x_2$ với điều kiện (x_1, x_2) thỏa mãn: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1, x_2 \geq 0$.

Bài toán này có duy nhất một nghiệm tối ưu là $(1, 0)$. Áp dụng phương pháp Ellipsoid cải tiến, nhóm tác giả tìm được điểm khởi đầu cho Giải thuật 2:

$$x^0 = (0,500, 0,500), y^0 = 1,667, s^0 = (0,333, 1,333) \text{ và } \mu^0 = 2,030.$$

Giải thuật 2 cho ví dụ này dừng chỉ sau một vòng lặp. Kết quả được trình bày ở Bảng 1. Chú ý rằng, các giá trị ở đây được làm tròn đến ba chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Bảng 1. Giải thuật 2 cho Ví dụ 1

t	x_t	$c^T x_t$
0	(0,500, 0,500)	2,500
1	(1,000, 2,092e-12)	2,000

Ví dụ 2: Xét bài toán: Tìm min $_{x \in \mathbb{R}^n} - \sum_{i=1}^n x_i$ với điều kiện $0 \leq x_i \leq 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

Phương án tối ưu chấp nhận được của bài toán là $x = (1, \dots, 1)$. Trước hết là viết lại bài toán dưới dạng (1). Đặt $x_{i+n} = 1 - x_i, i = 1, \dots, n$, bài toán đã cho tương đương với bài toán: Tìm min $_{x \in \mathbb{R}^{2n}} - \sum_{i=1}^n x_i$ với điều kiện $x_i + x_{i+n} = 1, i = 1, \dots, n$ và $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 2n$.

Chọn $n = 15$ và áp dụng Giải thuật 2 với điểm khởi đầu nhận được như trong Mục 2.3, thì thu được kết quả ở Bảng 2. Một lần nữa, lại thấy rằng với điểm khởi tạo nhận được từ phương pháp mà nhóm tác giả đề xuất, thì Giải thuật 2 hội tụ chỉ sau 1 vòng lặp.

Bảng 2. Giải thuật 2 cho Ví dụ 2

t	x_t	$c^T x_t$
0	(0,500, ..., 0,500)	-7,500
1	(1,000, ..., 1,000)	-15,000

4. Chương trình Matlab

Phần này nhóm tác giả đưa ra các chương trình Matlab của Giải thuật Ellipsoid cải tiến, Giải thuật 2 và hai ví dụ đã trình bày ở phần trước.

4.1. Chương trình Matlab cho giải thuật Ellipsoid cải tiến

```
function [x0 i Ax0
Amin]=modified_ellipsoid_method(A,b,x0,R,Nmax)
% Giải thuật 1 cùng với Chú ý 2
if nargin==3
    R=1e2;
    Nmax=100;
end
[m n]=size(A);
D0=R^2*eye(n,n);
m_min=min(A*x0-b);
Ax0=[x0];
Amin=[m_min];
for i=0:Nmax
    check=find(A*x0-b<-1e-4);
    if size(check,1)==0
        break;
    else
        k=check(1);
        ak=A(k,:);
        x1=x0+D0*ak/((1+n)*(sqrt(ak'*D0*ak)));
        x0=x1;
        tg1=n^2/(n^2-1);
        tg2=2/(n+1);
        D0=tg1*(D0-tg2*(D0*ak)*(ak'*D0)/(ak'*D0*ak));
        m_min=min(A*x0-b);
        Ax0=[Ax0 x0];
        Amin=[Amin m_min];
    end
end
Amin=Amin';
Ax0=Ax0';
end
```

4.2. Chương trình Matlab cho Giải thuật 2

```
function [x0 fmin Ax0
Amin]=interior_point_method(A,b,c,epsilon)
if nargin==3
    epsilon=1e-10;
end
[m n]=size(A);
% Choose starting point
B1=[A zeros(m,m) zeros(m,n)];
B2=[-A zeros(m,m) zeros(m,n)];
B3=[zeros(n,n) A' eye(n)];
B4=[zeros(n,n) -A' -eye(n)];
B5=[eye(n) zeros(n,m) zeros(n,n)];
B6=[zeros(n,n) zeros(n,m) eye(n)];
B=[B1;B2;B3;B4;B5;B6];
u=[b;-b;-c;-c;1e-10*ones(2*n,1)];
k=size(B,2);
u0=zeros(k,1);
[u0 i Au0 Amin]=modified_ellipsoid_method(B,u,u0);
% input
x0=u0(1:n);
s0=u0(n+m+1:end);
e=ones(n,1);
alpha=0.5;
tg=x0.*s0;
tg2=max(tg)
```

```

nu0=(2*sqrt(n)*tg2)/(2*sqrt(n)+1);
Ax0=[x0];
fmin=c'*x0;
Amin=[fmin];
while s0'*x0>=epsilon
nu0=alpha*nu0;
tg=1./(x0.^2);
tg1=1./x0;
BB=[nu0*diag(tg) -A';A zeros(m,m)];
R=nu0*diag(tg1)*c-c;
R=[R;zeros(m,1)];
u=BB\R;
d=u(1:n);
y=u(n+1:end);
% Update
x0=x0+d;
y0=y;
s0=c-A'*y;
end
fmin=c'*x0;
Ax0=[Ax0 x0];
Amin=[Amin fmin];
End

```

4.3. Chương trình Matlab cho Ví dụ 1

```

clear all
%Ví dụ 1
A=[1 1];
b=[1];
c=[2 3]';
%Giải thuật 2 (PP điểm trong)
epsilon=1e-10;
[u0 fmin Au0
Aumin]=interior_point_method(A,b,c,epsilon);

```

4.4. Chương trình Matlab cho Ví dụ 2

```

%EXAMPLE 2
n=15;
X=eye(n);
A=[X X];
b=ones(n,1);
c=[-ones(n,1);zeros(n,1)];
%Giải thuật 2 (PP điểm trong)
epsilon=1e-10;
[u0 fmin Au0
Aumin]=interior_point_method(A,b,c,epsilon);

```

5. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã đề xuất một phương pháp mới cho việc chọn điểm khởi đầu trong phương pháp điểm trong để giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Lý thuyết cũng như các ví dụ số cụ thể chứng tỏ rằng, phương pháp mà nhóm tác giả đã trình bày hoạt động tốt và đảm bảo sự hội tụ của phương pháp điểm trong. Hai ví dụ số cũng cho thấy rằng phương pháp điểm trong có tốc độ hội tụ rất nhanh với các giá trị khởi tạo nhận được từ phương pháp mà nhóm tác giả đã đề xuất trong bài báo này. Vì thế, phương pháp chọn điểm khởi đầu trong bài báo này có tính ứng dụng thực tế cao và có thể dùng kết hợp với phương pháp điểm trong cho bài toán quy hoạch tuyến tính có kích thước lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] D. G. Luenberger & Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*, Springer Science & Business Media, 2008.
 - [2] Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương, *Quy hoạch tuyến tính*, NXB Giáo dục, 1999.
- Phạm Quý Mười, Phan Thị Như Quỳnh, “Phương pháp Ellipsoid cải tiến và ứng dụng giải bài toán quy hoạch tuyến tính”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ*, Đại học Đà Nẵng, Số 9(94).2015.

(BBT nhận bài: 23/10/2015, phản biện xong: 22/11/2015)