

THUẬT TOÁN ĐẨY LUỒNG TRƯỚC TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRÊN MẠNG HỖN HỢP MỞ RỘNG

PUSH-PREFLOW MAXFLOW ALGORITHM ON EXTENDED MIXED NETWORKS

Trần Quốc Chiến¹, Trần Ngọc Việt², Nguyễn Đình Lầu²

¹Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; Email: tqchien@dce.udn.vn

²Trường Cao đẳng Giao thông Vận tải II; Email: trviet01@yahoo.com, launhi@gmail.com

Tóm tắt - Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, Cho đến nay, trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, mà còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi đỉnh đó. Bài viết giới thiệu mô hình mạng hỗn hợp mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác, hiệu quả hơn và định lý luồng cực đại lát cắt cực tiểu tương ứng trên mạng hỗn hợp mở rộng [10,11]. Kết quả chính của bài viết là thuật toán đẩy luồng trước tìm luồng cực đại.

Từ khóa - đồ thị; mạng; luồng; luồng cực đại; thuật toán.

1. Đặt vấn đề

Mạng và luồng trên mạng là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, Cho đến nay trong mạng cổ điển mới chỉ xét đến trọng số của các tuyến và các nút một cách độc lập. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một nút không giống nhau với mọi đường đi qua nút đó, mà còn phụ thuộc vào tuyến đi đến và tuyến đi khỏi nút đó. Vì vậy cần xây dựng một mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Trên cơ sở các nghiên cứu về bài toán luồng cực đại [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] và đồ thị mở rộng [8, 9, 10,11], bài báo phát triển thuật toán đường đi tăng luồng tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng.

2. Mạng hỗn hợp mở rộng

Cho đồ thị hỗn hợp $G=(V, E)$ với tập nút V và tập cạnh E . Các cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Ký hiệu R^* là tập số thực dương. Trên đồ thị cho các hàm sau.

Hàm khả năng thông hành cạnh $ce: E \rightarrow R^*$, với $ce(e)$ là khả năng thông hành cạnh $e \in E$.

Hàm khả năng thông hành nút $cv: V \rightarrow R^*$, với $cv(u)$ là khả năng thông hành nút $u \in V$.

Hàm chi phí cạnh $be: E \rightarrow R^*$, với $be(e)$ là chi phí phải trả để chuyển một đơn vị phương tiện qua cạnh e .

Với mỗi nút $v \in V$, ký hiệu E_v là tập các cạnh liên thuộc nút v .

Hàm chi phí nút $bv: V \times E_v \times E_v \rightarrow R^*$, với $bv(u, e, e')$ là chi phí phải trả để chuyển một đơn vị phương tiện từ tuyến e qua nút u sang tuyến e' .

Bộ (V, E, ce, cv, be, bv) gọi là *mạng hỗn hợp mở rộng*.

3. Luồng cạnh trên mạng hỗn hợp mở rộng

Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$.

Abstract - Graph is a powerful mathematical tool applied in many fields as transportation, communication, informatics, economy... In an ordinary graph the weights of edges and vertexes are considered independently where the length of a path is the sum of weights of the edges and the vertexes on this path. However, in many practical problems, weights at a vertex are not the same for all paths passing this vertex, but depend on coming and leaving edges. The paper introduces a model of mixed extended network that can be applied to modeling many practical problems more exactly and effectively, and the Maxflow-Mincut theorem on extended mixed networks. The main contribution of this paper is the Push-Preflow maxflow algorithm.

Key words - graph; network; flow; maximal flow; algorithm

Giả thiết G có đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . Tập các giá trị $\{f(x,y) \mid (x,y) \in E\}$ gọi là *luồng cạnh* trên mạng G nếu thỏa mãn:

$$(i) \quad 0 \leq f(x,y) \leq ce(x,y) \quad \forall (x,y) \in E$$

(ii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích:

$$\sum_{(v,z) \in E} f(v,z) = \sum_{(z,v) \in E} f(z,v)$$

(iii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích:

$$\sum_{(v,z) \in E} f(v,z) \leq cv(z)$$

• **Định lý 3.1.** Cho $f = \{f(x,y) \mid (x,y) \in E\}$ là luồng cạnh trên mạng G với nguồn s và đích t . Khi đó:

$$\sum_{(s,v) \in E} f(s,v) - \sum_{(v,s) \in E} f(v,s) = \sum_{(v,t) \in E} f(v,t) - \sum_{(t,v) \in E} f(t,v)$$

Tức là tổng luồng đi khỏi đỉnh nguồn bằng tổng luồng đi đến đỉnh đích.

Chứng minh [11]

• **Giá trị của luồng**

Biểu thức:

$$val(f) = \sum_{(s,u) \in E} f(s,u) - \sum_{(u,s) \in E} f(u,s)$$

Gọi là *giá trị của luồng* f .

• **Bài toán luồng cực đại:**

Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t .

Nhiệm vụ của bài toán là tìm luồng cạnh có giá trị lớn nhất.

Bài toán luồng cực đại là bài toán quy hoạch tuyến tính. Giá trị của luồng bị giới hạn bởi tổng khả năng thông hành của các cung đi ra từ đỉnh nguồn, vì vậy ta có thể khẳng định định lý sau:

• **Định lý 3.2.** Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . Khi đó tồn tại luồng cực đại.

4. Luồng cực đại lát cắt cực tiểu

Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . Với mọi tập $S, T \subset V$, ký hiệu tập các cạnh có hướng và các cạnh vô hướng đi từ S vào T là (S, T) , tức $(S, T) = \{(x, y) \in E \mid x \in S \text{ \& } y \in T\}$

Nếu $S, T \subset V$ là phân hoạch của V , tức $S \cup T = V$ & $S \cap T = \emptyset$, và $s \in S, t \in T$, thì tập (S, T) gọi là lát cắt (nguồn–đích) của G .

Cho $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ là luồng cạnh trên mạng G .

Ký hiệu:
$$f(S, T) = \sum_{(x, y) \in (S, T)} f(x, y)$$

• **Định lý 4.1.** Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . Cho $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ là luồng cạnh trên mạng G và (S, T) là lát cắt của G .

Khi đó: $val(f) = f(S, T) - f(T, S)$

Chứng minh [11]

Cho lát cắt (S, T)

Ký hiệu $S(T) = \{u \in S \mid \exists v \in T, (u, v) \in (S, T)\}$

• **Định lý 4.2.** Cho $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ là luồng cạnh trên mạng G và (S, T) là lát cắt của G . Khi đó, với mọi $S' \subset S(T)$ ta có:

$$f(S, T) \leq \sum_{v \in S'} c_v(v) + \sum_{(x, y) \in (S, T) \setminus (S', T)} c_E(x, y)$$

Chứng minh [11]

• **Khả năng thông qua của lát cắt**

Cho (S, T) là lát cắt của mạng mở rộng G .

Giá trị $cap(S, T)$

$$= \min \left\{ \sum_{v \in S'} c_v(v) + \sum_{(x, y) \in (S, T) \setminus (S', T)} ce(x, y) \mid S' \subset S(T) \right\}$$

Gọi là khả năng thông qua của lát cắt (S, T) .

Từ định lý 4.1 và định lý 4.2 suy ra

• **Định lý 4.3.** Cho $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ là luồng cạnh trên mạng G và (S, T) là lát cắt của G .

Khi đó: $val(f) \leq cap(S, T)$, tức là giá trị luồng luôn nhỏ hơn khả năng thông qua của lát cắt.

5. Mạng thẳng dư

Cho luồng cạnh $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ trên mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . Ta định nghĩa *mạng thẳng dư thông qua*, ký hiệu G_f , là mạng có tập đỉnh V và tập cung E_f cùng hàm khả năng thông qua cạnh ce_f và hàm khả năng thông qua đỉnh cv_f như sau:

Với mọi cạnh hoặc cung $(u, v) \in E$, nếu $f(u, v) > 0$ thì $(v, u) \in E_f$ với khả năng thông qua $ce_f(v, u) = f(u, v)$

Với mọi cạnh hoặc cung $(u, v) \in E$, nếu $ce(u, v) - f(u, v) > 0$ thì $(u, v) \in E_f$ với khả năng thông qua $ce_f(u, v) = ce(u, v) - f(u, v)$

Với mọi đỉnh $v \in V$, khả năng thông qua

$$cv_f(v) = cv(v) - \sum_{(x, v) \in E} f(x, v).$$

• **Đường đi tăng luồng**

Đường đi tăng luồng là đường đi có hướng trong mạng

thẳng dư thông qua G_f từ đỉnh nguồn s đến đỉnh đích t , sao cho ta có thể gửi luồng dương $\delta(t)$ từ s đến t .

• **Định lý 5.1.** Cho $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ là luồng cạnh trên mạng G . Khi đó:

(i) Nếu tồn tại đường đi tăng luồng từ s đến t trong mạng thẳng dư G_f , thì tồn tại luồng $g = \{g(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ có $val(g) = val(f) + \delta(t)$.

(ii) Nếu không tồn tại đường đi tăng luồng từ s đến t trong mạng thẳng dư G_f , thì luồng f là luồng cực đại.

Chứng minh [11]

6. Phương pháp đẩy luồng trước

6.1. Các khái niệm cơ bản

• **Luồng trước (pre-flow)**

Cho mạng hỗn hợp mở rộng $G = (V, E, ce, cv, be, bv)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t . *Luồng trước* là tập hợp các luồng trên cung $f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ thỏa mãn:

(i) $0 \leq f(x, y) \leq ce(x, y) \quad \forall (x, y) \in E$

(ii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích:

$$\sum_{(v, z) \in E} f(v, z) \leq cv(z)$$

(iii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích, luồng vào không nhỏ hơn luồng ra, tức là:

$$\sum_{(v, z) \in E} f(v, z) \geq \sum_{(z, v) \in E} f(z, v)$$

Những đỉnh có luồng vào lớn hơn luồng ra gọi là *đỉnh lệch (unbalanced)*. Hiệu luồng vào và luồng ra tại các đỉnh lệch gọi là *độ lệch luồng (excess)*. Khái niệm *mạng thẳng dư* G_f của luồng trước cũng định nghĩa tương tự như đối với luồng.

Ý tưởng của phương pháp này là cân bằng hóa luồng vào và luồng ra tại các đỉnh lệch bằng cách luồng dư được đẩy xuôi theo các cung ra hoặc đẩy ngược trên các cung vào. Quá trình cân bằng hóa đỉnh lệch được lặp lại cho đến khi không còn đỉnh lệch thì ta nhận được luồng cực đại. Các đỉnh lệch được lưu trong hàng đợi. Một công cụ gọi là *hàm độ cao* được sử dụng để giúp chọn cung trong mạng thẳng dư để loại đỉnh lệch. Bây giờ ta giả thiết tập đỉnh của mạng được ký hiệu $V = \{0, 1, \dots, |V| - 1\}$

◊ *Hàm độ cao (height function)* của luồng trước trong mạng G là tập hợp các trọng số đỉnh không âm $h(0), \dots, h(|V| - 1)$ thỏa $h(t) = 0$ với đỉnh đích t và $h(u) \leq h(v) + 1$ với mọi cung (u, v) trong mạng thẳng dư G_f . Những cung (u, v) thỏa điều kiện $h(u) = h(v) + 1$ gọi là các *cung ưu tiên*.

Một hàm độ cao tầm thường là $h(0) = h(1) = \dots = h(|V| - 1) = 0$. Sau đó nếu đặt $h(u) = 1$, thì mọi cung luồng dương đi từ u là ưu tiên.

Ta xây dựng hàm độ cao thú vị hơn: $h(v)$ là khoảng cách ngắn nhất tính theo số cung từ v đến đỉnh đích t trong G_f . Ta có thể xác định hàm độ cao này bằng phương pháp duyệt đồ thị ngược của G_f theo chiều rộng xuất phát từ đỉnh đích t . Hàm này thực sự là hàm độ cao vì $h(t) = 0$ và với mỗi cung (u, v) trong mạng thẳng dư G_f , $h(u) \leq h(v) + 1$, vì đường đi từ u đến t bắt đầu bởi cung (u, v) và đi theo đường đi ngắn nhất từ v đến t ($h(v) + 1$) phải không ngắn hơn đường

đi ngắn nhất từ u đến t ($h(u)$).

• **Định lý 6.1:** Cho luồng trước f trong mạng hỗn hợp mở rộng G và hàm độ cao h tương ứng. Khi đó độ cao $h(v)$ của mỗi đỉnh v không lớn hơn độ dài đường đi ngắn nhất tính theo số cung từ v đến đỉnh đích t trong mạng thẳng dư.

Chứng minh

Cho đỉnh v . Giả sử d là độ dài đường đi ngắn nhất từ v đến đỉnh đích t trong G_f . Khi đó sẽ tồn tại đường đi $(v=v_1, v_2, \dots, v_d, t)$ từ v đến t . Ta có:

$$\begin{aligned} h(v) = h(v_1) &\leq h(v_2) + 1 \\ &\leq h(v_3) + 2 \\ &\vdots \\ &\leq h(v_d) + d - 1 \\ &\leq h(t) + d = d \end{aligned}$$

Vai trò của hàm độ cao như sau: Nếu độ cao của đỉnh lệch nhỏ hơn độ cao của đỉnh nguồn thì có thể đẩy luồng về hướng đỉnh đích. Ngược lại, nếu độ cao của đỉnh lệch lớn hơn độ cao của đỉnh nguồn thì cần phải đẩy luồng ngược về đỉnh nguồn.

• **Định lý 6.2:** Nếu độ cao của một đỉnh lớn hơn $|V|$ thì không tồn tại đường đi từ đỉnh đó đến đỉnh đích trong mạng thẳng dư G_f .

6.2. Phương pháp đẩy luồng trước

Bây giờ ta có thể mô tả phương pháp đẩy luồng trước tổng quát như sau:

(1) *Khởi tạo:* Xây dựng luồng trước xuất phát với các cung (s, v) đi từ đỉnh nguồn s có luồng $f(s, v) = \min\{ce(s, v), cv(v)\}$, còn các cung khác có luồng bằng 0. Chọn hàm độ cao h nào đó trong mạng G .

(2) *Tiêu chuẩn dừng:* Nếu không có đỉnh lệch, thì luồng trước f trở thành luồng cực đại. Kết thúc.

Ngược lại, chọn đỉnh lệch u theo thứ tự nào đó. Nếu tồn tại cung ưu tiên $(u, v) \in G_f$, thì sang bước (3), ngược lại sang bước (4)

(3) *Đẩy luồng:*

Ký hiệu δ là độ lệch luồng của đỉnh u .

- Trường hợp $f(u, v) > 0$: Đẩy trên cung (u, v) một luồng có giá trị $\min\{\delta, ce(u, v)\}$ (tức là giảm $f(u, v)$).

- Trường hợp $(u, v) \in E$ và $cv(v) > 0$: Đẩy trên cung (u, v) một luồng có giá trị $\min\{\delta, ce(u, v), cv(v)\}$ (tức là tăng $f(u, v)$).

(4) *Tăng độ cao:*

Tăng độ cao của đỉnh u như sau:

$$h(u) = 1 + \min\{h(v) \mid (u, v) \in G_f\}$$

Quay lại bước (2).

• **Định lý 6.3:** Phương pháp đẩy luồng trước luôn bảo toàn tính chất của hàm độ cao.

Chứng minh

(i) Trường hợp tồn tại cung ưu tiên $(u, v) \in G_f$: Ta có $h(u) = h(v) + 1$. Sau khi đẩy trên cung (u, v) một luồng, thì nếu $(v, u) \in G_f$ ta vẫn có $h(v) = h(u) - 1 \leq h(u) + 1$.

(ii) Trường hợp không tồn tại cung ưu tiên đi từ u : Ta có $\forall v: (u, v) \in G_f \Rightarrow h(u) < h(v) + 1$

Sau khi tăng $h(u) := 1 + \min\{h(v) \mid (u, v) \in G_f\}$ thì $h(u)$ vẫn thỏa mãn $\forall v, (u, v) \in G_f: h(u) \leq h(v) + 1$

• **Định lý 6.4:** Trong quá trình thực hiện thuật toán đẩy luồng trước, luôn tồn tại đường đi định hướng từ mỗi đỉnh lệch đến đỉnh nguồn trong mạng thẳng dư G_f , và không tồn tại đường đi tăng luồng từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích trong mạng thẳng dư.

Chứng minh. Chứng minh quy nạp theo các lần hiệu chỉnh luồng trước.

Luồng trước xuất phát có các cung (s, v) đi từ đỉnh nguồn s có luồng $f(s, v) = \min\{ce(s, v), cv(v)\}$, còn các cung khác có luồng bằng 0. Khi đó các đỉnh cuối của các cung đi từ đỉnh nguồn là lệch. Với mọi đỉnh lệch v ta có $(v, s) \in G_f$ và không gửi được luồng dương trên (s, v) , suy ra tồn tại đường đi có hướng từ v đến s , và không tồn tại đường đi tăng luồng từ đỉnh nguồn s đến đỉnh đích trong mạng thẳng dư G_f . Như vậy mệnh đề đúng với luồng xuất phát.

Tiếp theo, đỉnh lệch mới v chỉ xuất hiện khi một luồng được đẩy từ một đỉnh lệch cũ u trên cung ưu tiên (u, v) . Khi đó mạng thẳng dư sẽ có thêm cung (v, u) . Do tồn tại đường đi có hướng từ u đến s trong mạng thẳng dư theo giả thiết quy nạp, nên cũng tồn tại đường đi có hướng từ v đến s trong mạng thẳng dư.

Để chứng minh không tồn tại đường đi tăng luồng từ đỉnh nguồn s đến đỉnh đích t trong mạng thẳng dư G_f ta lập luận như sau.

Trước tiên, với các đỉnh v kề đỉnh nguồn s , $(s, v) \in G$, do luồng xuất phát trên cung (s, v) bằng $f(s, v) = \min\{ce(s, v), cv(v)\}$, nên muốn $(s, v) \in G_f$, thì ở bước nào đó phải thực hiện thao tác đẩy luồng ngược từ v về s . Khi đó (v, s) là cung ưu tiên, tức $h(v) = h(s) + 1 > h(s)$. Còn với những đỉnh u kề đỉnh nguồn s , $(u, s) \in G$, muốn $(s, u) \in G_f$ thì ở bước nào đó phải thực hiện thao tác đẩy luồng xuôi từ u về s . Khi đó (u, s) là cung ưu tiên, tức $h(u) = h(s) + 1 > h(s)$. Như vậy mọi đỉnh kề s có thể đạt được từ s trong mạng thẳng dư phải có độ cao lớn hơn độ cao của s .

Cho đỉnh bất kỳ u đạt được từ s trong mạng thẳng dư. Tồn tại đường đi có hướng từ s đến u trong mạng thẳng dư:

$$(s \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u)$$

Lập luận tương tự như trên ta có:

$$h(u) > h(u_k) > \dots > h(u_2) > h(u_1) > h(s)$$

Như vậy mọi đỉnh đạt được từ s phải có độ cao lớn hơn độ cao của s . Mặt khác độ cao của đỉnh đích là 0, nên nó không thể đạt được từ s .

• **Định lý 6.5:** Độ cao các đỉnh luôn nhỏ hơn $2 \cdot |V|$.

Chứng minh. Ta chỉ cần xét các đỉnh lệch, vì độ cao đỉnh không lệch hoặc không thay đổi, hoặc chỉ tăng 1 so với độ cao khi nó là đỉnh lệch ở thời điểm gần nhất. Lập luận tương tự như chứng minh mệnh đề 6.1, đường đi từ đỉnh lệch đến đỉnh nguồn đảm bảo rằng độ cao của đỉnh lệch không lớn hơn độ cao đỉnh nguồn cộng $|V| - 2$ (đỉnh đích không thể nằm trên đường đi). Do độ cao của đỉnh nguồn không thay đổi, và không lớn hơn $|V|$, nên độ cao đỉnh lệch không lớn hơn $2 \cdot |V| - 2$. Suy ra độ cao đỉnh bất kỳ không lớn hơn $2 \cdot |V|$.

• **Định lý 6.6.** Phương pháp đẩy luồng trước là đúng.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh phương pháp dừng sau hữu hạn bước. Ta khẳng định rằng sau hữu hạn bước sẽ không còn đỉnh lệch nữa. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử dãy các đỉnh lệch là vô hạn thì sẽ tồn tại đỉnh u nào đó xuất hiện vô hạn lần trong dãy đó. Vì số đỉnh của mạng là hữu hạn nên sẽ tồn tại đỉnh $v \neq u$ sao cho có luồng được đẩy trên cung (u,v) và (v,u) vô hạn lần. Do (u,v) và (v,u) là các cung ưu tiên trong mạng thẳng dư vô hạn lần nên từ quan hệ $h(u) = h(v) + 1$ và $h(v) = h(u) + 1$ suy ra độ cao của u và v sẽ tăng vô hạn, và điều đó mâu thuẫn với hệ quả trên.

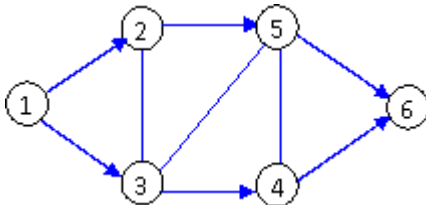
Khi phương pháp dừng ta nhận được luồng. Theo mệnh đề 6.4, không tồn tại đường đi tăng luồng từ nguồn đến đích trong mạng thẳng dư. Theo thuật toán đường đi tăng luồng, đây là luồng cực đại.

• **Độ phức tạp** của phương pháp đẩy luồng trước là $O(|V|^2|E|)$ [10, tr.402].

7. Ví dụ

Cho sơ đồ mạng mở rộng ở Hình 1.

Mạng có 6 nút, 6 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng. Khả năng thông hành cạnh ce cho ở Bảng 1, khả năng thông hành nút cv cho ở Bảng 2, và chi phí qua đỉnh cho ở Bảng 3. Đỉnh nguồn là 1, đỉnh đích là 6.



Hình 1. Sơ đồ mạng mở rộng

Bảng 1. Khả năng thông hành cạnh

Cạnh	ce
(1,2)	10
(1,3)	9
(2,3)	5
(2,5)	7
(3,4)	7
(3,5)	6
(4,6)	10
(4,5)	5
(5,6)	9

Bảng 2. Khả năng thông hành nút

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
cv	∞	10	9	10	9	∞

Trong bài toán tìm luồng cực đại, tạm thời chưa sử dụng chi phí cạnh và nút. Chi phí nút và cạnh sẽ được sử dụng trong “Bài toán luồng cực đại chi phí cực tiểu” tiếp theo.

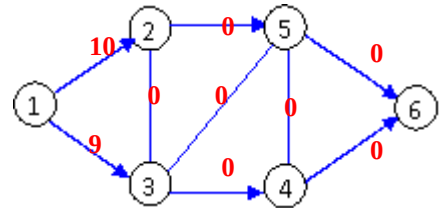
Thứ tự các đỉnh sử dụng trong thuật toán là 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Hàm độ cao xuất phát $h(v)$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ v đến đỉnh đích 6 cho ở Bảng 3.

Bảng 3. Hàm độ cao xuất phát

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
h	3	2	2	1	1	0

Luồng trước xuất phát cho ở Hình 2

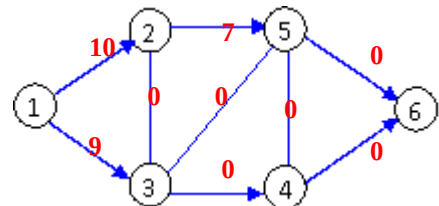


Hình 2. Luồng trước xuất phát

Hàng đợi đỉnh lệch: $> 3 \mid 2 >$

- Xét đỉnh lệch 2:

Đẩy trên cung ưu tiên (2,5) luồng giá trị 7 ta có luồng trước cho ở Hình 3.



Hình 3. Luồng trước

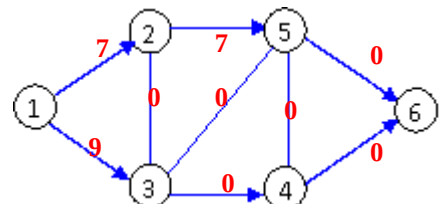
Trong mạng thẳng dư xuất phát từ 2 chỉ còn cung (2,1) (đỉnh 3 đã bão hòa) đặt $h(2) = 1 + 3 = 4$

Hàm độ cao thay đổi cho ở Bảng 4

Bảng 4. Hàm độ cao

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
h	3	4	2	1	1	0

Đẩy trên cung ưu tiên (2,1) luồng giá trị 3 ta có luồng trước cho ở Hình 4.



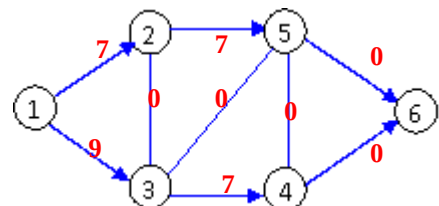
Hình 4. Luồng trước

Đẩy đỉnh lệch 5 vào hàng đợi.

Hàng đợi đỉnh lệch: $> 5 \mid 3 >$

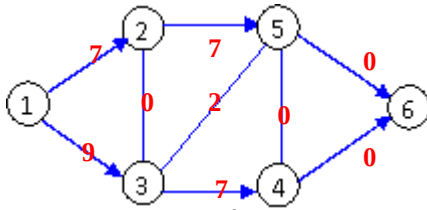
- Xét đỉnh lệch 3:

Đẩy trên cung ưu tiên (3,4) luồng giá trị 7 ta có luồng trước cho ở Hình 5.



Hình 5. Luồng trước

Đẩy trên cung ưu tiên (3,5) luồng giá trị 2 ta có luồng trước cho ở Hình 6.



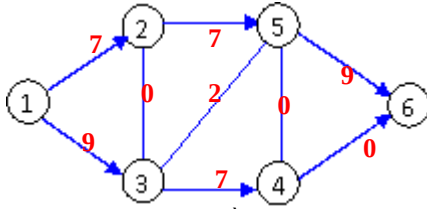
Hình 6. Luồng trước

Đẩy đỉnh lệch 4 vào hàng đợi.

Hàng đợi đỉnh lệch: $> 4 \mid 5 >$

- Xét đỉnh lệch 5:

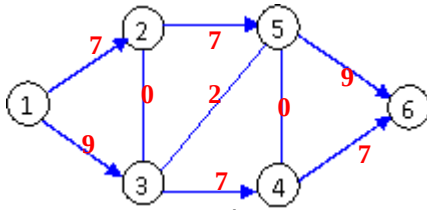
Đẩy trên cung ưu tiên (5,6) luồng giá trị 9 ta có luồng trước cho ở Hình 7.



Hình 7. Luồng trước

- Xét đỉnh lệch 4:

Đẩy trên cung ưu tiên (6,6) luồng giá trị 7 ta có luồng trước cho ở Hình 8.



Hình 8. Luồng trước

Đến đây không còn đỉnh lệch nữa. Luồng trước ở Hình 8 trở thành luồng cực đại với giá trị là 16.

8. Kết luận

Bài viết xây dựng mô hình mạng hỗn hợp mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác

và hiệu quả hơn. Sau đó, thuật toán đẩy luồng trước tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng được xây dựng. Một ví dụ cụ thể được trình bày để minh họa thuật toán đẩy luồng trước tìm luồng cực đại.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Robert Sedgewick, *Algorithms in C, Part 5: Graph Algorithms*. Addison-Wesley 8-2001.
- [2] Trần Quốc Chiển, *Bài toán tìm luồng cực đại trên mạng*, Đề tài NCKH cấp Bộ, mã số B2005-16-34.
- [3] Trần Quốc Chiển, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (1)", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 1(13)/2006, 53-58.
- [4] Trần Quốc Chiển, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (2)", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(15)-4(16)/2006, 77-82.
- [5] Trần Quốc Chiển, "Thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 4(21)/2007, 1-6.
- [6] Trần Quốc Chiển, Hồ Xuân Bình, "Thuật toán song song tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 5(22)/2007, 37-42.
- [7] Trần Quốc Chiển, "Thuật toán hoán chuyển nguồn đích có trọng số tìm luồng cực đại", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(26)/2008, 99-105.
- [8] Trần Quốc Chiển, "Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát", *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 12(61)/2012, 16-21.
- [9] Trần Quốc Chiển, Nguyễn Mậu Tuệ, Trần Ngọc Việt, "Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mờ rộng". *Proceeding of the 6th National Conference on Fundamental and Applied Information Technology Research (FAIR)*, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VI "Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT", Huế, 20-21/6/2013. NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ. Hà Nội 2013. 522-527.
- [10] Trần Quốc Chiển, Trần Ngọc Việt, Nguyễn Đình Lâu, "Thuật toán tìm luồng cực đại trên mạng mờ rộng". *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 1(74)/2014, Quyển II, 1-4. (Số đặc biệt dành cho hội nghị RAIT 2014).
- [11] Trần Quốc Chiển, Trần Ngọc Việt, Nguyễn Đình Lâu, "Thuật toán đường đi tăng luồng tìm luồng cực đại trên mạng hỗn hợp mở rộng". accepted.
- [12] Goldberg, A. V. (2008). "The partial augment-relabel algorithm for the maximum flow problem". *Algorithms — ESA 2008. Lecture Notes in Computer Science* 5193. pp. 466–477.

(BBT nhận bài: 27/03/2014, phản biện xong: 17/06/2014)