

VỀ CHU TRÌNH HAMILTON TRONG ĐỒ THỊ TÁCH CỰC ON HAMILTON CYCLES IN SPLIT GRAPHS

Lê Xuân Hùng

Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội; Email: lxhung@hunre.edu.vn

Tóm tắt - Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đồ thị tách cực nếu tồn tại phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con của G cảm sinh trên I là đồ thị rỗng và đồ thị con của G cảm sinh trên K là đồ thị đầy đủ. Chúng ta ký hiệu đồ thị tách cực đó là $S(I \cup K, E)$. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa vào năm 1977 bởi S. Foldes và P.L. Hammer. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan nhiều đến các vấn đề về tổ hợp. Mặt khác, một trong những vấn đề cơ bản của lý thuyết đồ thị là bài toán Hamilton. Trong bài báo này chúng ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại chu trình Hamilton trong lớp đồ thị tách cực với $\delta(G) \geq \frac{3}{5}(|I| - 1)$ và chứng minh được rằng đồ thị tách cực G

có chu trình Hamilton khi và chỉ khi với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton.

Từ khóa - đồ thị tách cực; chu trình Hamilton; đường Hamilton; đồ thị tách cực phi Hamilton tối đại; bậc cực tiểu.

1. Đặt vấn đề

Tất cả các đồ thị được nói tới trong bài báo này là những đơn đồ thị hữu hạn, vô hướng, không có khuyên và không có cạnh bội. Nếu G là một đồ thị, thì $V(G)$ (hoặc V) được gọi là *tập đỉnh* và $E(G)$ (hoặc E) được gọi là *tập cạnh*. Tập hợp tất cả các đỉnh là hàng xóm của tập con $S \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $N_G(S)$ (hoặc $N(S)$). Với mỗi đỉnh $v \in V(G)$, ta gọi $|N_G(v)|$ là bậc của đỉnh v , ký hiệu là $\deg(v)$. Với đồ thị $G = (V, E)$, số $\min\{\deg(v) \mid v \in V\}$ được gọi là *bậc cực tiểu* của G , ký hiệu là $\delta(G)$. Đồ thị con của G cảm sinh trên tập $U \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $G[U]$. Ngoài ra, một số khái niệm và ký hiệu khác được định nghĩa trong [1].

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị tách cực* nếu tồn tại một phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con $G[I]$ là đồ thị rỗng và đồ thị con $G[K]$ là đồ thị đầy đủ. Chúng ta ký hiệu đồ thị tách cực là $S(I \cup K, E)$. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa đầu tiên vào năm 1977 bởi Foldes và Hammer [4]. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan nhiều đến các vấn đề về tổ hợp (xem [3], [5], [8]).

Năm 1980, Burkard và Hammer đã đưa ra một điều kiện cần nhưng không là điều kiện đủ để đồ thị tách cực $G = S(I \cup K, E)$ với $|I| < |K|$ có chu trình Hamilton [2]. Các tác giả này cũng đặt ra một câu hỏi, cần bổ sung những điều kiện gì để điều kiện cần trên cũng là điều kiện đủ. Đã có một số tác giả giải quyết được một phần câu hỏi trên, đó là Peemoller [7], Ngô Đức Tân và Lê Xuân Hùng [9], [10]. Liên quan đến giả thuyết của V.Chvatal rằng mọi đồ thị có

Abstract - A graph $G = (V, E)$ is called a split graph if there exists a partition $V = I \cup K$ such that the subgraphs of G induced by I and K are empty and complete, respectively. We will denote such a graph by $S(I \cup K, E)$. The notion of split graphs was introduced in 1977 by S. Foldes and P.L. Hammer. Attention has been paid to these graphs because of their connection with many combinatorial problems. Moreover, one of the fundamental problems in graph theory is the hamiltonian problem. In this paper, we characterize Hamiltonian graphs in the class of split graphs with $\delta(G) \geq \frac{3}{5}(|I| - 1)$. We show that G has Hamilton cycle if and only if for every $v \in K$, $G - v$ has a Hamilton path.

Key words - split graph, Hamilton cycle, Hamilton path; non-hamiltonian split graph; minimum degree.

độ bền bằng 2 đều có chu trình Hamilton, các tác giả Kratsch, Lehel và Muller [6] đã nghiên cứu mối quan hệ giữa độ bền với sự tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị tách cực.

Trong bài báo này chúng tôi tiếp tục nghiên cứu sự tồn tại chu trình Hamilton cho đồ thị tách cực $G = S(I \cup K, E)$

với $\delta(G) \geq \frac{3}{5}(|I| - 1)$ và đã chứng minh được rằng đồ thị tách cực G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số kết quả liên quan

Giả sử C là một chu trình trong đồ thị $G = (V, E)$. Ta sẽ ký hiệu chu trình C với một chiều xác định là $\vec{C}$ và chu trình C với chiều ngược lại là $\overleftarrow{C}$. Nếu $u, v \in V(C)$, thì ta ký hiệu các đỉnh liên tiếp của C từ u tới v theo chiều đã xác định trên $\vec{C}$ là $u\vec{C}v$ và ký hiệu các đỉnh liên tiếp của C từ u tới v theo chiều ngược lại xác định trên $\overleftarrow{C}$ là $u\overleftarrow{C}v$. Ta sẽ coi $u\vec{C}v$ và $u\overleftarrow{C}v$ như là các đường và cũng như là các tập đỉnh. Nếu $u \in V(C)$, thì ta ký hiệu u^+ và u^- lần lượt là các đỉnh đứng ngay sau và ngay trước đỉnh u trên $\vec{C}$. Các khái niệm tương tự như đã mô tả ở trên cho các chu trình cũng sẽ được sử dụng cho các đường. Nếu $U \subseteq V(G)$, thì ta ký hiệu tập $U \cap N_G(u)$ là $N_U(u)$.

Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực và G^* là đồ thị 2 phần thu được từ đồ thị G bằng cách xóa đi tất cả các cạnh có cả hai đỉnh đầu mút đều thuộc K . Trong đồ thị G^* , các đỉnh thuộc tập I ta tô màu trắng, các đỉnh thuộc tập K

ta tô màu đen. Các đường của đồ thị G^* có cả hai đỉnh đầu mút đều thuộc K ta gọi là B -đường.

Bổ đề 1 ([6]). Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|I| < |K|$. Khi đó G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi tập đỉnh của G^* có thể phân hoạch thành các B -đường.

Bổ đề 2 ([6]). Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực. Nếu với mọi tập con $I' \subseteq I$ ta đều có $|N(I')| \geq \frac{3}{2}|I'|$, thì tập đỉnh của G^* có thể phân hoạch thành các B -đường.

Bổ đề 3. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|I| = m, |K| = n$ và với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton. Khi đó với mọi $\varphi \neq I' \subseteq I$ thỏa mãn $|I'| \leq \min\{m, n-1\}$ ta luôn có $|N(I')| > |I'|$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại tập con $\varphi \neq I' \subseteq I$ thỏa mãn $|I'| \leq \min\{m, n-1\}$ nhưng $|N(I')| \leq |I'|$. Giả sử $v_1, v_2, \dots, v_k$ là các đỉnh của $N(I')$ và giả sử P là đường Hamilton của $G - v_1$. Khi đó $P - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ có thể được phủ bởi $k = |N(I')|$ đường rời nhau. Do đó $G - N(I')$ cũng có thể được phủ bởi $k = |N(I')|$ đường rời nhau. Nhưng ta biết rằng số ít nhất các đường rời nhau của $G - N(I')$ phủ được $V(G - N(I'))$ lớn hơn $k = |N(I')|$. Từ đó dẫn tới điều mâu thuẫn. ■

Bổ đề 4 ([9]). Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực phi-Hamilton tối đại. Khi đó với mỗi $v \in K$, hoặc $|N_I(v)| \leq |I| - \delta(G)$ hoặc $N_I(v) = I$.

Định lý 5 ([9]). Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|I| = m, |K| = n$ và $\delta(G) \geq m - 2$. Khi đó G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi $m \leq n$ và $|N(I')| > |I'|$ với mọi $\varphi \neq I' \subseteq I$ thỏa mãn $|I'| \leq \min\{m, n-1\}$, ngoại trừ các đồ thị dưới đây mà đối với chúng điều kiện đủ không đúng:

- (i) $m = 3 < n$ và G là đồ thị G_n^3 ;
 - (ii) $m = 4 < n$ và G là đồ thị con bao trùm của đồ thị D_n^4 hoặc đồ thị G_n^4 ;
 - (iii) $m = 4 \leq n$ và $G - u$ là đồ thị G_n^3 với mỗi $u \in I$;
 - (iv) $m = 5 < n$ và G là đồ thị F_n^5 hoặc là đồ thị con bao trùm của đồ thị G_n^5 ;
 - (v) $6 \leq m < n$ và G là đồ thị con bao trùm của đồ thị G_n^m .
- Các đồ thị G_n^m, D_n^4 và F_n^5 được định nghĩa trong Bảng 1. Từ Định lý 5 ta suy ra hệ quả sau đây.

Hệ quả 6. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $\delta(G) \geq |I| - 2$. Khi đó G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton.

Chứng minh. Nếu G có chu trình Hamilton và giả sử v là một đỉnh thuộc K , thì $v^+ \bar{C} v^-$ là đường Hamilton của đồ

thị $G - v$.

Bây giờ giả sử rằng $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $\delta(G) \geq |I| - 2$ và với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton. Từ Bổ đề 3 ta có $|N(I')| > |I'|$ với mọi $\varphi \neq I' \subseteq I$ thỏa mãn $|I'| \leq \min\{|I|, |K| - 1\}$. Do đó theo Định lý 5, hoặc G có chu trình Hamilton hoặc G là một trong các đồ thị ngoại lệ liệt kê trong định lý. Nhưng dễ dàng thấy rằng các đồ thị ngoại lệ này không thỏa mãn điều kiện với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton. Như vậy, chỉ xảy ra trường hợp G có chu trình Hamilton. ■

Bảng 1. Các đồ thị G_n^m, D_n^4 và F_n^5

Đồ thị $G = (V, E)$	Tập đỉnh $V = I \cup K$	Tập cạnh $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$
G_n^m $3 \leq m < n$	$I = \{u_1, \dots, u_m\}$ $K = \{v_1, \dots, v_n\}$	$E_1 = \{u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3\}$ $E_2 = \{u_i v_j \mid i = 1, \dots, m;$ $j = 4, \dots, m+1\}$ $E_3 = \{v_i v_j \mid i \neq j;$ $i, j = 1, \dots, n\}$
D_n^4 $4 < n$	$I = \{u_1, \dots, u_4\}$ $K = \{v_1, \dots, v_n\}$	$E_1 = \{u_1 v_2, u_2 v_1, u_i v_i \mid$ $i, j = 1, 2, 3, 4\}$ $E_2 = \{u_i v_5 \mid i = 1, \dots, 4\}$ $E_3 = \{v_i v_j \mid i \neq j;$ $i, j = 1, \dots, n\}$
F_n^5 $6 < n$	$I = \{u_1, \dots, u_5\}$ $K = \{v_1, \dots, v_n\}$	$E_1 = \{u_i v_i \mid i = 1, \dots, 5\}$ $E_2 = \{u_i v_j \mid i = 1, \dots, 5;$ $j = 6, 7\}$ $E_3 = \{v_i v_j \mid i \neq j;$ $i, j = 1, \dots, n\}$

3. Kết quả chính

Trong mục này chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh định lý dưới đây.

Định lý 7. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $\delta(G) \geq \frac{3}{5}(|I| - 1)$. Khi đó G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton.

Chứng minh. Nếu G có chu trình Hamilton và giả sử v là một đỉnh thuộc K , thì $v^+ \bar{C} v^-$ là đường Hamilton của đồ thị $G - v$.

Bây giờ giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị phi Hamilton tối đại thỏa mãn $|I| = m, |K| = n, \delta(G) \geq \frac{3}{5}(m-1)$ và với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton. Đặt

$$K_i = \{v \in K \mid N_I(v) = i\}, t = \left\lceil \frac{2m+3}{5} \right\rceil.$$

(Trong đó $[a]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a). Theo Bổ đề 4 dễ dàng thấy rằng

$$K_{t+1} = \dots = K_{m-1} = \varnothing.$$

Nếu tồn tại đỉnh $v \in K_m$ và giả sử P là đường Hamilton của $G - v$. Khi đó $v\bar{P}v$ là chu trình Hamilton của G , mâu thuẫn với việc G là đồ thị phi Hamilton. Do đó $K_m = \varnothing$.

Ta xét hai trường hợp có thể xảy ra.

Trường hợp 1: $K_t = \varnothing$

Trong trường hợp này, $K_t = K_{t+1} = \dots = K_m = \varnothing$. Với mọi $\varphi \neq I' \subseteq I$ ta có

$$|N(I')| \geq \frac{\sum_{u \in I'} \deg(u)}{t-1} \geq \frac{\frac{3}{5}(m-1)|I'|}{\frac{2m+3}{5}-1} = \frac{3}{2}|I'|.$$

Theo Bổ đề 1 và Bổ đề 2, G có chu trình Hamilton, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $K_t \neq \varnothing$

Theo Bổ đề 3, với mọi $u \in I$ ta có $\deg(u) = |N(u)| > |\{u\}| = 1$, do đó $\deg(u) \geq 2$. Hơn nữa, nếu $m \leq 4$ thì $\delta(G) \geq 2 \geq m-2$. Theo Hệ quả 6, G có chu trình Hamilton, mâu thuẫn. Do vậy $m \geq 5$.

Giả sử v_n là một đỉnh của K_t . Vì $|I| = m \geq 5$ và $|N_I(v_n)| = t = \left\lfloor \frac{2m+3}{5} \right\rfloor < m$, tồn tại đỉnh $u_1 \in I$ sao cho u_1 không kề với v_n . Vì G là đồ thị tách cực phi Hamilton tối đại nên $G + u_1v_n$ có chu trình Hamilton D . Do đó $P = D - u_1v_n$ là đường Hamilton của G với các đỉnh đầu mút là u_1 và v_n . Chú ý rằng $u_1 \in I, v_n \in K$ và u_1 không kề với v_n . Giả sử $\bar{P} = u_1 \dots v_n$. Nếu $v_n^- \in K$ và $u \in N_I(v_n)$, thì $\bar{P}' = u_1 \bar{P}u^- v_n^- \bar{P}uv_n$ là đường Hamilton của G với các đỉnh đầu mút là u_1 và v_n . Nhưng trong $\bar{P}'$, $v_n^- = u \in I$. Bằng việc xét $\bar{P}'$ thay cho $\bar{P}$ nếu cần thiết, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng v_n^- trong $\bar{P}$ là đỉnh $u_m \in I$.

Giả sử $v_1, v_2, \dots, v_k$ là các đỉnh của $N(u_1)$ xuất hiện lần lượt trên $\bar{P}$ theo thứ tự của các chỉ số của chúng. Nếu tồn tại đỉnh $u_j \in N(u_1)$ sao cho $v_j^- \in N(v_n)$, thì $C' = u_1 \bar{P}v_j^- v_n \bar{P}v_j u_1$ là chu trình Hamilton của G , mâu thuẫn. Do vậy $v_j^- \notin N(v_n)$ với mọi $j = 1, 2, \dots, k$. Suy ra $v_j^- \in I$ với mọi $j = 1, 2, \dots, k$. Dễ dàng thấy rằng $u_1 = v_1^-$. Đặt $u_j = v_j^- \in I$ với mọi $j = 2, \dots, k$ và $\overline{N_I(v_n)} = I \setminus N_I(v_n)$. Khi đó

$$|\overline{N_I(v_n)}| = |I| - |N_I(v_n)| = m - t.$$

Nhưng $\deg(u_1) \geq \frac{3}{5}(m-1) = m - \frac{2m+3}{5}$, suy ra $\deg(u_1) \geq m-t$ (vì $\deg(u_1)$ là số nguyên dương) và

$u_j = v_j^- \in \overline{N_I(v_n)}$ với mọi $j = 1, 2, \dots, k = \deg(u_1)$. Từ đó suy ra rằng

Khẳng định 3.1. $\deg(u_1) = m-t$ và $u_1, u_2, \dots, u_{m-t}$ là tất cả các đỉnh của $V(G)$ không kề với v_n .

Đặt:

$$P_1 = u_1 \bar{P}u_2^-, P_2 = u_2 \bar{P}u_3^-, \dots, P_{m-t} = u_{m-t} \bar{P}v_n$$

Khi đó các khẳng định sau là đúng.

Khẳng định 3.2. $|N(u_j) \cap V(P_i)| \leq 1$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$.

Giả sử ngược lại rằng tồn tại $i, j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$ sao cho $|N(u_j) \cap V(P_i)| \geq 2$. Giả sử v_i và v_{i+1} là hai đỉnh khác nhau của $N(u_j) \cap V(P_i)$, xuất hiện trên $\bar{P}$ theo thứ tự của các chỉ số của chúng. Trước hết giả sử rằng $j \leq i$. Khi đó $v_{i+1}^- \notin \{u_1, u_2, \dots, u_{m-t}\}$. Theo Khẳng định 3.1, $v_{i+1}^- \in N(v_n)$. Do đó

$C' = u_j \bar{P}u_1 v_j \bar{P}v_{i+1}^- v_n \bar{P}v_{i+1} u_j$ là chu trình Hamilton của G , mâu thuẫn. Bây giờ ta giả sử rằng $j > i$. Khi đó $v_i^+ \notin \{u_1, u_2, \dots, u_{m-t}\}$ và tiếp tục theo Khẳng định 3.1 ta có $v_i^+ \in N(v_n)$. Do đó $C' = u_j \bar{P}v_i^+ v_n \bar{P}v_j u_1 \bar{P}v_i u_j$ là chu trình Hamilton của G , mâu thuẫn.

Khẳng định 3.3. Nếu $v \in N(u_j) \cap V(P_i)$ và $j \leq i$ với $i, j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$, thì $v^- \notin N(v_n)$.

Nếu $v = v_j$, thì ta đã chứng tỏ trong Khẳng định 3.1 rằng $v^- = v_j^- = u_j \notin N(v_n)$. Nếu $v \neq v_j$ và $v^- \in N(v_n)$, thì $C' = u_j \bar{P}u_1 v_j \bar{P}v^- v_n \bar{P}vu_j$ là chu trình Hamilton của G , mâu thuẫn.

Khẳng định 3.4. Nếu $v \in N(u_j) \cap V(P_i)$ và $j > i$ với $i, j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$, thì $v^+ \notin N(v_n)$.

Giả sử $v^+ \in N(v_n)$. Khi đó

$C' = u_j v \bar{P}u_1 v_j \bar{P}v_n v^+ \bar{P}vu_j$ là chu trình Hamilton của G , mâu thuẫn.

Từ Khẳng định 3.2 ta có $\deg(u_j) \leq m-t$ với $j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$. Nhưng trong đồ thị G , theo giả thiết ta có $\deg(u_j) \geq m-t$. Do đó $\deg(u_j) = m-t$ với mọi $j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$. Hơn nữa, theo Khẳng định 3.1, Khẳng định 3.3 và Khẳng định 3.4 ta có

$$N(u_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-t}\},$$

$$N(u_j) = \{u_2^-, u_3^-, \dots, u_j^-, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{m-t}\}$$

Với $j = 2, 3, \dots, m-t$.

Giả sử rằng $u_j^- = v_{j-1}$ với mọi $j \in \{2, 3, \dots, m-t\}$. Khi

đó với $I' = \{u_1, u_2, \dots, u_{m-t}\}$ ta có

$$N(I') = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-t}\}.$$

Do đó $|N(I')| = m - t = |I'|$, mâu thuẫn với Bổ đề 3.

Như vậy, phải tồn tại $j \in \{2, 3, \dots, m-t\}$ sao cho $u_j^- \neq v_{j-1}$.

Vì $m \geq 5$ nên $\deg(u_j) \geq \frac{3(m-1)}{5} \geq \frac{12}{5}$ với mọi

$j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$, từ đó suy ra rằng $\deg(u_j) \geq 3$ với mọi

$j \in \{1, 2, \dots, m-t\}$. Nếu $u_{m-t}^- \neq v_{m-t-1}$, thì

$$C' = u_{m-t} u_{m-t-1}^- \bar{P} u_1 v_{m-t-1} u_{m-t-1}^- v_{m-t} \bar{P} v_n v_{m-t-1}^+ \bar{P} u_{m-t}$$

là chu trình Hamilton của G, mâu thuẫn. Tiếp theo, nếu $u_2^- \neq v_1$, thì

$$C' = u_1 v_2 \bar{P} u_{m-t} u_2^- u_2 v_{m-t} \bar{P} v_n u_2^- \bar{P} u_1$$

là chu trình Hamilton của G, mâu thuẫn. Cuối cùng, nếu $u_j^- \neq v_{j-1}$ với $j \in \{2, m-t\}$, thì

$$C' = u_{j-1} v_j \bar{P} u_{m-t} u_j^- u_j v_{m-t} \bar{P} v_n u_j^- \bar{P} v_{j-1} u_1 \bar{P} u_{j-1}$$

là chu trình Hamilton của G, mâu thuẫn.

Như vậy, ta đã suy ra mâu thuẫn trong tất cả các trường hợp. Định lý 7 được chứng minh đầy đủ. ■

4. Kết luận

Vấn đề tồn tại hay không tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị nói chung và lớp đồ thị tách cực nói riêng là một bài toán khó và luôn là vấn đề thời sự của toán học. Việc tìm điều kiện để một đồ thị tách cực có chu trình Hamilton đã được một số nhà toán học quan tâm nghiên cứu và đã đạt được một số kết quả nhất định. Tuy vậy vẫn

đề này vẫn chưa giải quyết được triệt để và rất cần được tiếp tục nghiên cứu. Chính vì vậy, bài báo tiếp tục đề cập tới vấn đề tồn tại chu trình Hamilton cho một số lớp đồ thị tách cực và đã đạt được một số kết quả mới, trong đó kết quả chính là Định lý 7 (định lý đã chỉ ra một điều kiện cần và đủ cho một lớp đồ thị tách cực có chu trình Hamilton).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Behazad and G. Chartrand, 1971. *Introduction to the Theory of graphs*, Allyn and Bacon, Boston.
- [2] R.E. Burkard and P.L. Hammer, 1980. "A note on Hamiltonian split graphs". *J. Combin. Theory B28*, pp. 245 – 248.
- [3] V. Chvatal and P.L. Hammer, 1977. "Aggregation of inequalities in integer programming". *Ann. Discrete Math.* 1, pp. 145 – 162.
- [4] S. Foldes and P.L. Hammer, 1977. "Split graphs". In: *Proceeding of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1977), Congressus Numerantium, vol. XIX, Utilitas Mathematics, Winnipeg, Man., pp. 311 – 315.
- [5] S. Foldes and P.L. Hammer, 1978. "On a class of matroid-producing graphs". In: *Combinatorics (Proceeding of the Fifth Hungarian Colloquium, Keszthely, 1976)*, vol. 1, Colloquium Mathematical Society, Janos's Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, New York, pp. 331 - 352.
- [6] D. Kratsch, J. Lehel, H. muller, 1996. "Toughness, hamiltonicity and split graphs", *Discrete Math.* 150, pp. 231 - 245.
- [7] J. Peemoller, 1985. "Necessary conditions for Hamiltonian split graphs". *Discrete Math.* 54, pp. 39 – 47.
- [8] U.N. Peled, 1975. *Regular Boolean function and their polytope*, Ph.D. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Chapter VI.
- [9] Ngo Dac Tan, Le Xuan Hung, 2004. "Hamilton cycles in split graphs with large minimum degree". *Discussiones Math. Graph Theory* 24, pp. 23 – 40.
- [10] Ngo Dac Tan, Le Xuan Hung, 2005. "On the Burkard-Hammer condition for hamiltonian split graphs". *Discrete Math.* 296, pp. 59–72.

(BBT nhận bài: 13/05/2014, phản biện xong: 03/06/2014)