

THUẬT TOÁN TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRÊN MẠNG MỞ RỘNG

ALGORITHM FINDING MAXIMAL FLOWS ON EXTENDED TRAFFIC NETWORKS

Trần Quốc Chiên¹, Trần Ngọc Việt², Nguyễn Đình Lầu²

¹Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; Email: tqchien@dce.udn.vn

²Trường Cao đẳng Giao thông Vận tải II; Email: trviet01@yahoo.com, launhi@gmail.com

Tóm tắt – Đồ thị là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế. Cho đến nay, trong đồ thị mới chỉ xét đến trọng số của các cạnh, các đỉnh một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi là tổng trọng số các cạnh và các đỉnh trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong thực tế, trọng số tại một đỉnh không giống nhau với mọi đường đi qua đỉnh đó, mà còn phụ thuộc vào cạnh đi đến và cạnh đi khỏi đỉnh đó. Bài viết xây dựng mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Kết quả chính của bài báo là thuật toán Ford-Fulkerson cải biên tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng.

Từ khóa – đồ thị; mạng; luồng; luồng cực đại; thuật toán.

1. Đặt vấn đề

Mạng và luồng trên mạng là công cụ toán học hữu ích ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như giao thông, truyền thông, công nghệ thông tin, kinh tế, Cho đến nay trong mạng cổ điển mới chỉ xét đến trọng số của các tuyến và các nút một cách độc lập, trong đó độ dài đường đi chỉ đơn thuần là tổng trọng số các cạnh và các nút trên đường đi đó. Tuy nhiên, trong nhiều bài toán thực tế, trọng số tại một nút không giống nhau với mọi đường đi qua nút đó, mà còn phụ thuộc vào tuyến đi đến và tuyến đi khỏi nút đó. Ví dụ thời gian đi qua ngã tư trên mạng giao thông phụ thuộc vào hướng di chuyển của phương tiện giao thông: rẽ phải, đi thẳng hay rẽ trái, thậm chí có hướng bị cấm. Vì vậy cần xây dựng một mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả hơn. Trên cơ sở các nghiên cứu về bài toán luồng cực đại [1, 2, 3, 4, 5, 6] và đồ thị mở rộng [7, 8], bài báo phát triển thuật toán Ford-Fulkerson cải biên tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng.

2. Mạng mở rộng

Cho mạng là đồ thị hỗn hợp $G = (V, E)$ với tập nút V và tập cạnh E . Các cạnh có thể có hướng hoặc vô hướng. Có nhiều loại phương tiện lưu hành trên mạng. Những cạnh vô hướng biểu diễn tuyến hai chiều, trong đó các phương tiện trên cùng tuyến nhưng ngược hướng lưu hành chia sẻ khả năng thông hành của tuyến. Trên mạng cho các hàm sau.

Hàm khả năng thông hành cạnh $c_E : E \rightarrow \mathbb{R}^*$, với $c_E(e)$ là khả năng thông hành cạnh $e \in E$.

Hàm khả năng thông hành nút $c_V : V \rightarrow \mathbb{R}^*$, với $c_V(u)$ là khả năng thông hành nút $u \in V$.

Hàm chi phí cạnh $b_E : E \rightarrow \mathbb{R}^*$, với $b_E(e)$ là chi phí phải trả để chuyển một đơn vị phương tiện qua cạnh e . Lưu ý rằng với những tuyến hai chiều thì chi phí hai hướng có thể khác nhau. Với mỗi nút $v \in V$, ký hiệu E_v là tập các cạnh liên thuộc nút v .

Abstract – A graph is a powerful mathematical tool applied in many fields such as transportation, communication, informatics, economy. In an ordinary graph the weights of edges and vertexes are considered independently where the length of a path is the sum of weights of the edges and the vertexes on this path. However, in many practical problems, weights at a vertex are not the same for all paths passing this vertex, but depend on coming and leaving edges. The paper develops a model of extended network that can be applied to modelling many practical problems more exactly and effectively. The main contribution of this paper is the revised Ford-Fulkerson algorithm finding maximal flows on extended networks.

Key words – Graph; Network; Flow; Maximal Flow; Algorithm.

Hàm chi phí nút $b_V : V \times E_v \times E_v \times \mathbb{R}^*$, với $b_V(u, e, e')$ là chi phí phải trả để chuyển một đơn vị phương tiện từ tuyến e qua nút u sang tuyến e' .

Bộ $(V, E, c_E, c_V, b_E, b_V)$ gọi là mạng mở rộng.

Cho p là đường đi từ nút u đến nút v qua các cạnh e_i , $i = 1, \dots, h+1$, và các nút u_i , $i = 1, \dots, h$, như sau:

$$p = [u, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, e_h, u_h, e_{h+1}, v]$$

Định nghĩa chi phí lưu hành một đơn vị phương tiện qua đường đi p , ký hiệu $b(p)$, theo công thức sau:

$$b(p) = \sum_{i=1}^{h+1} b_E(e_i) + \sum_{i=1}^h b_V(u_i, e_i, e_{i+1}) \quad (1)$$

3. Luồng trên mạng mở rộng

Cho mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V, b_E, b_V)$. Giả thiết G có đỉnh nguồn s và đỉnh đích t .

Tập các giá trị

$$f(x, y) | (x, y) \in G$$

gọi là luồng trên mạng G nếu thỏa mãn

- (i) $0 \leq f(x, y) \leq c_E(x, y) \quad \forall (x, y) \in G$
- (ii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(v, z) \in G} f(v, z) = \sum_{(z, v) \in G} f(z, v)$$

- (iii) Với mọi đỉnh z không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(v, z) \in G} f(v, z) \leq c_V(z)$$

Biểu thức

$$v(F) = \sum_{(s, v) \in G} f(s, v)$$

gọi là giá trị của luồng F .

• Bài toán luồng cực đại:

Cho mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V, b_E, b_V)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t .

Nhiệm vụ của bài toán là tìm luồng có giá trị lớn nhất.

Bài toán luồng cực đại là bài toán quy hoạch tuyến tính. Giá trị của luồng bị giới hạn bởi tổng khả năng thông hành của các cung đi ra từ đỉnh nguồn, vì vậy ta có thể khẳng định định lý sau:

Định lý 1. Với mỗi mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V, b_E, b_V)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t , luôn luôn tồn tại luồng cực đại.

4. Thuật toán Ford-Fulkerson mở rộng

+ *Đầu vào.* Mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V, b_E, b_V)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t .

Các đỉnh trong G được sắp xếp theo thứ tự nào đó.

+ *Đầu ra.* Luồng cực đại $F = f(x, y) | (x, y) \in G$

+ *Các bước.*

(1) Khởi tạo

Luồng xuất phát: $f(x, y) := 0, \forall (x, y) \in G$.

Các đỉnh, xuất phát từ đỉnh nguồn, sẽ được lần lượt gán nhãn lần thứ nhất L_1 gồm 4 thành phần $L_1(v) = [\text{prev}_1(v), c_1(v), d_1(v), \text{bit}_1(v)]$ và có thể được gán nhãn lần hai $L_2(v) = [\text{prev}_2(v), c_2(v), d_2(v), \text{bit}_2(v)]$

Đặt nhãn cho đỉnh nguồn là

$$L_1(s) = [\emptyset, \infty, \infty, 1]$$

Tạo lập tập S gồm các đỉnh đã có nhãn nhưng chưa được dùng để sinh nhãn, S' là tập đỉnh được gán nhãn nhờ các đỉnh của tập S . Khởi đầu

$$S' = \{s\}, S' := \emptyset$$

(2) Sinh nhãn

(2.1) Chọn đỉnh sinh nhãn

- Trường hợp $S \neq \emptyset$: Chọn đỉnh $u \in S$ nhỏ nhất (theo thứ tự nào đó). Loại u khỏi S , $S := S \setminus \{u\}$. Giả sử nhãn cuối của u là $[\text{prev}_i(u), c_i(u), d_i(u), \text{bit}_i(u)]$, $i = 1$ hoặc 2 . Ký hiệu A là tập các đỉnh chưa có nhãn lần 2 và kề đỉnh sinh nhãn u . Qua bước (2.2).
- Trường hợp $S = \emptyset$ và $S' \neq \emptyset$: Gán $S := S'$ và $S' := \emptyset$. Quay lại bước (2.1).
- Trường hợp $S = \emptyset$ và $S' = \emptyset$: luồng F là cực đại.

Kết thúc.

(2.2) Gán nhãn cho đỉnh chưa có nhãn và kề đỉnh sinh nhãn

- Trường hợp $A = \emptyset$: Quay lại bước (2.1).
- Trường hợp $A \neq \emptyset$: Chọn $v \in A$ nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại v khỏi A , $A := A \setminus \{v\}$. Ký hiệu j là chỉ số lần gán nhãn, $j = 1$ hoặc 2 tương ứng với nhãn lần 1 hoặc nhãn lần 2. Ta thiết lập nhãn $L_j(v)$ của đỉnh v theo từng trường hợp sau:

(i) (u, v) là cạnh có hướng từ u đến v .

Nếu $\text{bit}_i(u) = 1$ và $f(u, v) < c_E(u, v)$, đặt nhãn đỉnh v như sau:

$$\text{prev}_j(v) := u;$$

$$c_j(v) := \min\{c_i(u), c_E(u, v) - f(u, v)\}, \text{ nếu } d_i(u) = 0,$$

$$c_j(v) := \min\{c_i(u), c_E(u, v) - f(u, v), d_i(u)\},$$

$$\text{nếu } d_i(u) > 0;$$

$$d_j(v) := c_V(v) - \sum_{(i,v) \in G} f(i, v);$$

$$\text{bit}_j(v) := 1, \text{ nếu } d_j(v) > 0,$$

$$\text{bit}_j(v) := 0, \text{ nếu } d_j(v) = 0.$$

(ii) (v, u) là cạnh có hướng từ v đến u . Nếu $f(v, u) > 0$, đặt nhãn đỉnh v như sau:

$$\text{prev}_j(v) := u; c_j(v) := \min\{c_i(u), f(v, u)\},$$

$$d_j(v) := c_V(v) - \sum_{(i,v) \in G} f(i, v); \text{bit}_j(v) := 1.$$

(iii) (u, v) là cạnh vô hướng.

Nếu $f(v, u) > 0$, đặt nhãn đỉnh v giống trường hợp (ii).

Nếu $f(v, u) = 0$ và $f(u, v) \geq 0$, đặt nhãn đỉnh v giống trường hợp (i).

Nếu v không được gán nhãn thì, quay lại bước (2.2).

Nếu v được gán nhãn và $v = t$, thì sang bước hiệu chỉnh tăng luồng (3).

Nếu v được gán nhãn và $v \neq t$, thì thêm v vào S' , $S' := S' \cup \{v\}$, và quay lại bước (2.2).

(3) Hiệu chỉnh tăng luồng

Giả sử t có nhãn $[\text{prev}_1(t), c_1(t), d_1(t), \text{bit}_1(t)]$. Ta hiệu chỉnh luồng F như sau:

(3.1) Khởi tạo

$$y := t, x := \text{prev}_1(t), \delta := c_1(t).$$

(3.2) Hiệu chỉnh

(i) Trường hợp (x, y) là cạnh có hướng từ x đến y : đặt

$$f(x, y) := f(x, y) + \delta.$$

(ii) Trường hợp (y, x) là cạnh có hướng từ y đến x : đặt

$$f(y, x) := f(y, x) - \delta.$$

(iii) Trường hợp (x, y) là cạnh vô hướng:

Nếu $f(x, y) \geq 0$ và $f(y, x) = 0$, thì đặt

$$f(x, y) := f(x, y) + \delta.$$

Nếu $f(y, x) > 0$, thì đặt:

$$f(y, x) := f(y, x) - \delta.$$

(3.3) Tĩnh tiến lùi

(i) Trường hợp $x = s$: Xoá tất cả nhãn của các đỉnh trên mạng, trừ đỉnh nguồn s , và quay lại bước (2).

(ii) Trường hợp $x \neq s$: Đặt $y := x$.

Nếu y có nhãn $L_2(y)$, thì đặt $x := \text{prev}_2(y)$ và xóa nhãn $L_2(y)$;

Nếu y không có nhãn $L_2(y)$, thì đặt $x := \text{prev}_1(y)$.

Sau đó quay lại bước (3.2).

Chúng minh tương tự như trong tài liệu [1] ta nhận được các định lý sau.

Định lý 2. Nếu các khả năng thông qua cạnh và khả năng thông qua đỉnh là số nguyên, thì sau hữu hạn bước quá trình giải kết thúc.

Định lý 3. Nếu các khả năng thông qua cạnh và khả năng thông qua đỉnh là số hữu tỉ, thì sau hữu hạn bước quá trình giải kết thúc.

Định lý 4. (tính đúng của thuật toán Ford-Fulkerson cải biên). Cho mạng mở rộng $G = (V, E, c_E, c_V, b_E, b_V)$ với đỉnh nguồn s và đỉnh đích t , $F = f(x, y) | (x, y) \in G$ là luồng nhận được khi kết thúc thuật toán tìm luồng cực đại. Khi đó, F là luồng cực đại.

• Độ phức tạp của thuật toán.

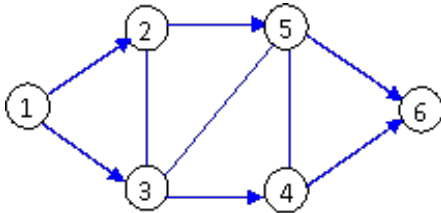
Giả thiết khả năng thông qua cạnh và khả năng thông qua đỉnh là số nguyên. Ở mỗi bước lặp tìm đường đi tăng luồng ta phải duyệt qua nhiều nhất là $|E|$ cung và để hiệu chỉnh luồng ta phải duyệt qua nhiều nhất là $2 \cdot |V|$ cung trên đường đi tăng luồng. Như vậy độ phức tạp mỗi lần tăng luồng là $O(|E| + 2 \cdot |V|)$. Ký hiệu v^* là trị của luồng cực đại. Số lần tăng luồng nhiều nhất là v^* . Vì vậy độ phức tạp của thuật toán là $O(v^*(|E| + 2 \cdot |V|))$.

5. Ví dụ

Cho sơ đồ mạng mở rộng ở Hình 1.

Mạng có 6 nút, 6 cạnh có hướng và 3 cạnh vô hướng. Khả năng thông hành cạnh c_E cho ở Bảng 1 và khả năng thông hành nút c_V cho ở Bảng 2. Đỉnh nguồn là 1, đỉnh đích là 6.

Trong bài toán tìm luồng cực đại, tạm thời chưa sử dụng chi phí cạnh b_E và chi phí đỉnh b_V .



Hình 1: Sơ đồ mạng mở rộng

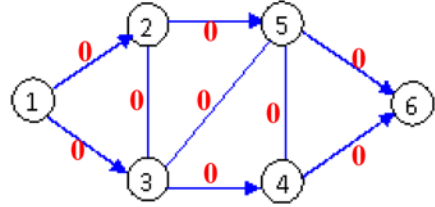
Bảng 1: Khả năng thông hành cạnh

Cạnh	c_E
(1,2)	10
(1,3)	9
(2,3)	5
(2,5)	7
(3,4)	7
(3,5)	6
(4,6)	10
(4,5)	5
(5,6)	9

Bảng 2: Khả năng thông nút

Đỉnh	1	2	3	4	5	6
c_V	∞	10	9	10	9	∞

Xuất phát từ luồng 0 cho ở hình 2:



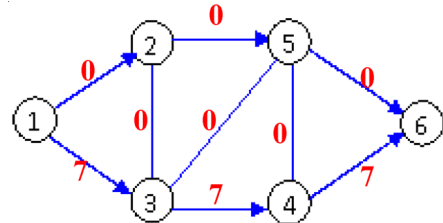
Hình 2: Luồng giá trị 0

Kết quả sinh nhãn cho ở Bảng 3:

Bảng 3: Kết quả sinh nhãn lần 1

Đỉnh	L1	L2
1	$[\emptyset, \infty, \infty, 1]$	
2	$[1, 10, 10, 1]$	
3	$[1, 9, 9, 1]$	
4	$[3, 7, 10, 1]$	
5	$[2, 7, 9, 1]$	
6	$[4, 7, \infty, 1]$	

Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở Hình 3 và giá trị luồng $v(F) = 7$.

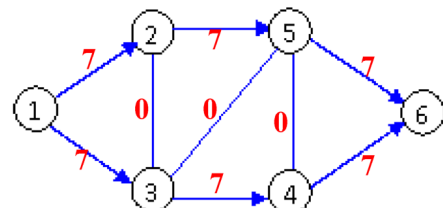


Hình 3: Luồng giá trị 7

Bảng 4: Kết quả sinh nhãn lần 2

Đỉnh	L1	L2
1	$[\emptyset, \infty, \infty, 1]$	
2	$[1, 10, 10, 1]$	
3	$[1, 2, 2, 1]$	
4		
5	$[2, 7, 9, 1]$	
6	$[5, 7, \infty, 1]$	

Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở Hình 4 và giá trị luồng $v(F) = 14$.



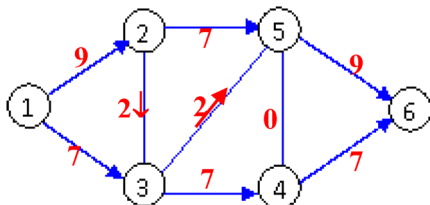
Hình 4: Luồng giá trị 14

Kết quả sinh nhân cho ở Bảng 5:

Bảng 5: Kết quả sinh nhân lần 2

Đỉnh	L1	L2
1	$\emptyset, \infty, \infty 1$	
2	[1,3,3,1]	
3	[1,2,2,1]	[2,2,2,1]
4		
5	[3,2,2,1]	
6	[5,2, ∞ ,1]	

Kết quả hiệu chỉnh tăng luồng cho ở Hình 5 và giá trị luồng $v(F) = 16$.



Hình 5: Luồng giá trị 16

Đây cũng là luồng cực đại, vì trong lần sinh nhân tiếp theo, đỉnh 6 không được gán nhãn.

6. Kết luận

Bài viết xây dựng mô hình mạng mở rộng để có thể áp dụng mô hình hóa các bài toán thực tế chính xác và hiệu quả

hơn. Tiếp theo, thuật toán Ford-Fulkerson cải biên tìm luồng cực đại trên mạng mở rộng được xây dựng. Cuối cùng, một ví dụ cụ thể được trình bày để minh họa thuật toán Ford-Fulkerson cải biên.

Tài liệu tham khảo

- [1] Trần Quốc Chiến, *Bài toán tìm luồng cực đại trên mạng*, Đề tài NCKH cấp Bộ, mã số B2005-16-34.
- [2] Trần Quốc Chiến, “Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (1)”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 1(13)/2006, 53-58.
- [3] Trần Quốc Chiến, “Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (2)”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(15)-4(16)/2006, 77-82.
- [4] Trần Quốc Chiến, “Thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 4(21)/2007, 1-6.
- [5] Trần Quốc Chiến, Hồ Xuân Bình, “Thuật toán song song tìm luồng cực đại”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 5(22)/2007, 37-42.
- [6] Trần Quốc Chiến, “Thuật toán hoán chuyển nguồn đích có trọng số tìm luồng cực đại”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 3(26)/2008, 99-105.
- [7] Trần Quốc Chiến, “Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị tổng quát”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng*, 12(61)/2012, 16-21.
- [8] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Mậu Tuệ, Trần Ngọc Việt, “Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mở rộng”, *Proceeding of the 6th National Conference on Fundamental and Applied Information Technology Research (FAIR)*, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Quốc gia lần thứ VI “Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng CNTT”, Huế, 20-21/6/2013. NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ. Hà Nội 2013. 522-527.

(BBT nhận bài: 25/12/2013, phản biện xong: 02/01/2014)