

# MÔ HÌNH BÀI TOÁN ĐIỆN TỪ VỚI SỰ DỊCH CHUYỂN CỦA CÁC MIỀN DẪN THÔNG QUA PHƯƠNG PHÁP LIÊN KẾT CÁC BÀI TOÁN NHỎ

## MODELING OF ELECTROMAGNETIC PROBLEM WITH MOVING OF CONDUCTING REGIONS VIA A SUBPROBLEM COUPLED METHOD

**Đặng Quốc Vương**

*Trường Đại học Bách khoa Hà Nội; vương.dangquoc@hust.edu.vn*

**Tóm tắt** - Trong bài báo này, tính toán và phân tích sự phân bố của từ trường, dòng điện xoáy và tổn hao công suất của bài toán điện từ với sự dịch chuyển vị trí của cuộn dây hoặc miền dẫn sẽ được thực hiện thông qua phương pháp liên kết các bài toán nhỏ (LKBTN). Trình tự của phương pháp được thực hiện như sau: Mô hình của một bài toán điện từ đầy đủ (gồm các cuộn dây, các vùng dẫn từ, các vùng không dẫn từ...) được chia thành các bài toán nhỏ, tương ứng với các cuộn dây hoặc miền dẫn. Mỗi một bài toán nhỏ được giải trên lưới và miền độc lập mà không phụ thuộc vào lưới và miền của các bài toán nhỏ khác, điều này thuận lợi cho việc chia lưới và giảm được thời gian tính toán của bài toán nghiên cứu. Sau đó, nghiệm cuối cùng của bài toán đầy đủ là tập hợp nghiệm của các bài toán nhỏ thông qua phương pháp xếp chồng.

**Từ khóa** - phương pháp liên kết các bài toán nhỏ; phương pháp phần tử hữu hạn; dòng điện xoáy; tổn hao; từ trường, véc-tơ từ thế; bài toán từ động.

### 1. Giới thiệu

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) được phát triển để phân tích và tính toán sự phân bố của từ trường, dòng điện xoáy, tổn hao công suất cũng như mô phỏng các hiện tượng vật lý của bài toán điện từ (được mô tả bởi hệ phương trình Maxwell) trong máy điện, đặc biệt là với bài toán từ tĩnh, bài toán từ động. Tuy nhiên, việc ứng dụng trực tiếp phương pháp PTHH vào các bài toán thực tế có kích thước lớn, với sự dịch chuyển vị trí của các vùng/miền dẫn từ vẫn là một thách thức lớn [1]. Đặc biệt, mô hình hóa các bài toán này càng trở nên khó khăn hơn khi giải bài toán có xét đến sự chuyển động/dịch chuyển vị trí của các vùng/miền dẫn từ so với vị trí xét trước đó, hoặc kích thước của một số bộ phận/miền nghiên cứu có cấu trúc rất nhỏ so với kích thước tổng thể của bài toán.

Để khắc phục hạn chế/ nhược điểm trên, phương pháp LKBTN đã được một số tác giả đề cập trong các nghiên cứu trước [2], [3] để “coupling” các bài toán nhỏ cho các trường hợp tĩnh mà không xét đến sự chuyển động/ dịch chuyển của các vùng/ miền dẫn. Điểm mới trong bài báo này, tác giả phát triển phương pháp LKBTN để áp dụng cho mô hình bài toán điện từ có xét đến sự dịch chuyển/chuyển động của các vùng/miền dẫn từ, với mục đích để tính chính xác sự thay đổi của các trường (hiệu ứng bề mặt, hiệu ứng gần, từ trường, dòng điện xoáy, tổn hao...) trong hệ thống điện từ. Nhờ đó, bài báo có thể phân tích các tham số điện - từ ứng với các vị trí thay đổi khác nhau của cuộn dây/miền dẫn từ trong hệ thống điện từ. Phương pháp LKBTN áp dụng cho mô hình bài toán từ động và được xây dựng cho phương trình yếu nhận với từ thế véc-tơ  $\mathbf{a}$ .

### 2. Phương pháp liên kết bài toán nhỏ

#### 2.1. Phương pháp luận

Phương pháp LKBTN được thực hiện theo nguyên tắc:

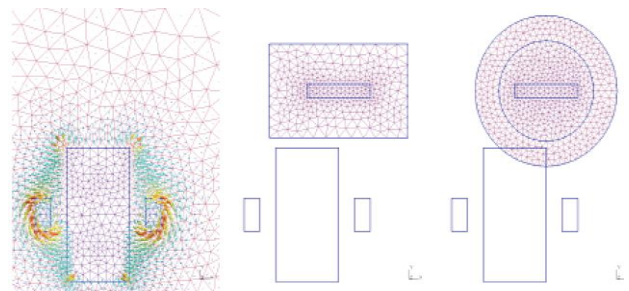
**Abstract** - In this article, computing and analysing distributions of magnetic fields, eddy currents and power losses of electromagnetic problems with moving of inductor positions or conductive regions will be performed via a subproblem coupled method. The sequence of the method is presented as follows: modeling of a full electromagnetic problem (consisting of stranded inductors, conducting regions, non-conducting regions...) is split into subproblems including stranded inductors or the magnetic regions. Each subproblem is solved on its own mesh and independent domain without depending on the meshes and domains of other subproblems. This facilitates meshing and reducing the time of computation of study problem. The solution of the full problem is then a set of subproblem solutions via a superposition method.

**Key words** - subproblem coupled method; finite element method; eddy current; power loss; magnetic field; magnetic vector; magnetodynamics.

Mô hình của một bài toán điện từ đầy đủ (gồm các cuộn dây, các vùng dẫn từ, các vùng không dẫn từ...) được chia thành các bài toán nhỏ tương ứng với các cuộn dây hoặc các miền dẫn có kích thước nhỏ hữu hạn, đó là:

$$\begin{aligned} \text{Bài toán đầy đủ (SP)} \\ &= \text{Bài toán nhỏ 1 (SP}_1\text{)} \\ &+ \text{Bài toán nhỏ 2 (SP}_2\text{)} \\ &+ \text{Bài toán nhỏ 3 (SP}_3\text{)} + \dots \end{aligned}$$

Sau đó, mỗi một bài toán nhỏ với kích thước hữu hạn được giải và thực hiện trên miền và lưới độc lập mà không ảnh hưởng và phụ thuộc vào lưới và miền của bài toán khác (Hình 1).



**Hình 1.** Miền nghiên cứu  $\Omega$  và đường biên bao quanh  $\Gamma$

Điều này sẽ giảm được kích thước của bài toán nghiên cứu, thuận lợi cho việc chia lưới trên mỗi bài toán nhỏ và tiết kiệm được thời gian tính toán, đặc biệt là với bài toán có cấu trúc phức tạp và có sự dịch chuyển của các cuộn dây hoặc các miền/vùng dẫn từ. Các bài toán nhỏ sẽ được liên kết với nhau thông qua sự ràng buộc của các nguồn mặt (SSs) và các nguồn khối (VSs). Trong đó, SSs thể hiện sự thay đổi của các điều kiện biên và điều kiện bờ của các bài toán nhỏ (SPs) thông qua các bề mặt, VSs thể hiện sự thay

đổi của đặc tính vật liệu (mật độ dẫn điện  $\sigma$  và độ từ thẩm  $\mu$ ) của các miền nhỏ, có nghĩa là thay đổi từ miền nhỏ này đến miền nhỏ khác. Nghiệm tìm được của bài toán nhỏ hiện tại sẽ là nguồn cho các bài toán kế tiếp thông qua phương pháp ánh xạ [2], [3]. Sau đó, nghiệm của bài toán đầy đủ/hoàn thành được tính toán thông qua sự xếp chồng nghiệm của các bài toán nhỏ và được xác định:

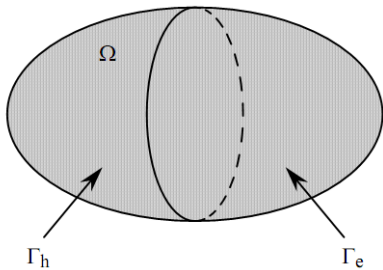
$$\mathbf{u} = \sum_{i \in P} \mathbf{u}_i, \text{ với } \mathbf{u} = \mathbf{h}, \mathbf{b}, \mathbf{j}, \mathbf{e} \dots \quad (1)$$

với  $P$  là tập hợp các bài toán nhỏ SPs. Do các bài toán nhỏ có mối liên hệ và ràng buộc với nhau, nên nghiệm tìm được trong từng bài toán nhỏ sẽ bị ảnh hưởng và phụ thuộc vào nhau, điều này sẽ dẫn đến sai số trong quá trình tính toán. Vì vậy, để đạt được nghiệm chính xác nhất, nghiệm của mỗi bài toán nhỏ  $\mathbf{u}_i$  phải được hiệu chỉnh thành  $\mathbf{u}_{i,j}$  (với  $j$  là số lần hiệu chỉnh của các bài toán nhỏ) thông qua quá trình lặp giữa các bài toán nhỏ SPs. Tiến trình hiệu chỉnh sai số được xác định:

$$\mathbf{u}_i = \sum_j \mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,1} + \mathbf{u}_{i,2} + \mathbf{u}_{i,3} + \dots \quad (2)$$

## 2.2. Mô hình bài toán từ động

Mô hình 2-D/3-D của bài toán động SP $_i$  (với  $i = 1, 2, \dots$  là số thứ tự của các bài toán nhỏ), được giải tại bước  $i$  của phương pháp LKBTN, và được xác định trong miền nghiên cứu  $\Omega_i$  ( $\Omega_i = \Omega_{c,i} \cup \Omega_{c,i}^c$ ), với biên là  $\partial\Omega_i = \Gamma_i = \Gamma_{h,i} \cup \Gamma_{e,i}$  (Hình 2).



Hình 2. Miền nghiên cứu  $\Omega$  và đường biên bao quanh  $\Gamma$

Trong đó,  $\Omega_{c,i}$  là vùng dẫn từ và  $\Omega_{c,i}^c$  là vùng không dẫn từ. Phương trình yếu nhận viết dưới dạng vi tích phân, các luật trạng thái và các điều kiện biên, điều kiện bờ của các bài toán nhỏ SP $_i$  được xác định thông qua hệ phương trình Maxwell như sau [1-6]:

$$\text{curl } \mathbf{h}_i = \mathbf{j}_i, \text{ div } \mathbf{b}_i = 0, \text{ curl } \mathbf{e}_i = -\partial_t \mathbf{b}_i, \quad (3a - b - c)$$

$$\mathbf{h}_i = \mu_i^{-1} \mathbf{b}_i + \mathbf{h}_{s,i}, \mathbf{j}_i = \sigma_i \mathbf{e}_i + \mathbf{j}_{s,i}, \quad (4a - b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_{h,i}} = \mathbf{j}_{f,i}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_{e,i}} = \mathbf{b}_{f,i}, \quad (5a - b)$$

trong đó,  $\mathbf{h}_i$  là cường độ từ trường,  $\mathbf{b}_i$  là mật độ từ cảm,  $\mathbf{e}_i$  là cường độ điện trường,  $\mathbf{j}_i$  là mật độ dòng điện,  $\mu_i$  là độ từ thẩm của vật liệu từ,  $\sigma_i$  là độ dẫn điện và  $\mathbf{n}$  là véc-tơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài của miền nghiên cứu  $\Omega_i$ . Các trường  $\mathbf{h}_{s,i}$  và  $\mathbf{j}_{s,i}$  trong (4a) và (4b) là các nguồn khối VSs biểu diễn cho sự thay đổi đặc tính vật liệu từ bài toán thứ nhất ( $i=1$ ) (với  $\mu_1$  và  $\sigma_1$ ) tới bài toán thứ hai ( $i=2$ ) (với  $\mu_2$  và  $\sigma_2$ ). Các nguồn khối VSs  $\mathbf{h}_{s,2}$  và  $\mathbf{j}_{s,2}$  cho bài toán thứ hai được xác định:

$$\mathbf{h}_{s,2} = (\mu_2^{-1} - \mu_1^{-1}) \mathbf{b}_1, \mathbf{j}_{s,2} = (\sigma_2 - \sigma_1) \mathbf{e}_1 \quad (6a - b)$$

và ta có các quan hệ:  $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mu_1^{-1} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$  và  $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \sigma_1 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ . Các điều kiện biên (các trường mặt)  $\mathbf{j}_{f,i}$ ,  $\mathbf{b}_{f,i}$  trên biên  $\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_{h,i}}$  và  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_{e,i}}$  trong công thức

(5a-b) được xem như là các nguồn mặt SSs và được xác định từ nghiệm của bài toán thứ nhất SP $_1$  (trước đó) [2-3].

## 3. Phương trình yếu nhận

### 3.1. Phương trình yếu nhận cho từ thế véc-tơ $\mathbf{a}$

Phương trình (3b-c) đã được biểu diễn cho từ thế véc-tơ  $\mathbf{a}_i$  và điện thế vô hướng  $v_i$  thông qua biểu thức:

$$\text{curl } \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i, \mathbf{e}_i = -\partial_t \mathbf{a}_i - \text{grad } v_i, \text{ với } \mathbf{u}_i = \text{grad } v_i. \quad (7a - b - c)$$

Dựa vào định luật Ampere (3a) [1] - [6], phương trình yếu nhận cho từ thế véc-tơ  $\mathbf{a}_i$  được viết như sau

$$(\mu_i^{-1} \text{curl } \mathbf{a}_i, \text{curl } \mathbf{a}')_{\Omega_i} + (\mathbf{h}_{s,i}, \text{curl } \mathbf{a}')_{\Omega_i} - (\mathbf{j}_{s,i}, \mathbf{a}')_{\Omega_i} + (\sigma_i \partial_t \mathbf{a}_i, \mathbf{a}')_{\Omega_{c,i}} + (\sigma_i \mathbf{u}_i, \mathbf{a}')_{\Omega_{c,i}} = 0, \forall \mathbf{a}' \in F_i^1(\Omega_i), \quad (8)$$

trong đó,  $F_i^1(\Omega_i)$  là không gian hàm được xác định miền nghiên cứu  $\Omega_i$  (bao gồm  $\Omega_c$  và  $\Omega_c^c$ ), và bao gồm các hàm nội suy (hàm dạng) cho trường  $\mathbf{a}_i$  và hàm thử "test function"  $\mathbf{a}'$  (tại miền rời rạc, không gian hàm này được xác định thông qua các phần tử hữu hạn cạnh [6]). Các ký hiệu  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  và  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  lần lượt là các tích phân khối được xác định trong miền  $\Omega$ , và tích phân mặt được xác định trên biên  $\partial\Omega = \Gamma$  (với  $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_e$ ). Trong đó, tích phân mặt trên biên  $\Gamma_h$  kể đến điều kiện biên (5a-b), được xác định bằng không. Trường  $\mathbf{h}_{s,i}$  là trường nguồn, và  $\mathbf{j}_{s,i}$  là mật độ dòng điện được đặt vào cuộn dây.

Trường hợp khi xét đến sự dịch chuyển/chuyển động của một miền/vùng nào đó trong bài toán nghiên cứu, phương trình yếu nhận liên quan đến dòng điện  $I_1$  và điện áp  $U_1$  (là các giá trị được cho trước hoặc được xác định từ bài toán trước) được viết lại như sau:

$$(\partial_t \mathbf{a}_1, \mathbf{j}')_{\Omega_{s,2}} + (\partial_t \mathbf{a}_1, \mathbf{j}')_{\Omega_{s,1}} + R_1 I_1 = -U, \quad (9)$$

trong đó,  $R_1$  là điện trở của cuộn dây và  $\mathbf{j}'$  là một hàm thử dòng điện được xác định cho cuộn dây, đó là:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}_{s,2} = N_s/S_s \mathbf{t}, \quad (10)$$

với  $N_s$  là số vòng của cuộn dây,  $S_s$  là diện tích bề mặt của toàn bộ cuộn dây, và  $\mathbf{t}$  là thành phần véc-tơ tiếp tuyến theo hướng của cuộn dây [8], [9]. Giải phương trình (8) kết hợp phương trình (9), ta tìm được nghiệm của bài toán.

Trường hợp khi vị trí của cuộn dây/miền dẫn được dịch chuyển/thay đổi, tức là nghiệm tìm được từ phương trình (8) và (9) sẽ không còn chính xác nữa, vì miền nghiên cứu đã thay đổi  $\Omega_{c,2,1}$ . Vì vậy, một tiến trình lặp sẽ được thực hiện để tìm được nghiệm chính xác của bài toán, đó là:

$$U = -(\partial_t \mathbf{a}_1, \mathbf{j}_{s,2})_{\Omega_{c,2,1}}. \quad (11)$$

Trong phương trình (12), nghiệm  $\mathbf{a}_1$  của bài toán nhỏ SP $_1$  được thể hiện thông qua đại lượng  $(\partial_t \mathbf{a}_1, \mathbf{j}')_{\Omega_{s,2,1}}$  sẽ được ánh xạ lên lưới của bài toán SP $_2$ . Vì vậy, nghiệm của bài toán nhỏ SP $_1$  sẽ là nguồn cho bài toán nhỏ SP $_2$  và phương trình (8) được viết lại như sau:

$$(\mu_2^{-1} \text{curl } \mathbf{a}_2, \text{curl } \mathbf{a}_1)_{\Omega_2} + (\mathbf{h}_{s,2}, \text{curl } \mathbf{a}_1)_{\Omega_2} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_1^{-1} \text{curl } \mathbf{a}_1, \text{curl } \mathbf{a}_2)_{\Omega_1} + (\mathbf{h}_{s,1}, \text{curl } \mathbf{a}_2)_{\Omega_1} - (\mathbf{j}_{s,1}, \mathbf{a}_2)_{\Omega_1} \\
& + (\sigma_1 \hat{\epsilon}_i \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_{\Omega_{c,1}} + (\sigma_1 \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2)_{\Omega_{c,1}} = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Các trường nguồn  $\mathbf{h}_{s,1}$  và  $\mathbf{j}_{s,1}$  trong phương trình (12) và (13) đã được xác định từ phương trình (4a-b).

### 3.2. Phương pháp ánh xạ (lưới-tới-lưới)

Như đã đề cập ở Phần 2, nghiệm  $\mathbf{a}_i$  đạt được từ bài toán nhỏ thứ nhất ( $i=1$ ) với miền nghiên cứu  $\Omega_i \subset \Omega$ , sẽ được xem như là các nguồn mặt SSs và các nguồn khối VSs để cấp cho bài toán nhỏ hiện tại/kế tiếp ( $i=2$ ) với miền nghiên cứu  $\Omega_2 \subset \Omega$ . Tại miền rời rạc nghiệm  $\mathbf{a}_i$  được xác định trong lưới của bài toán nhỏ SP<sub>1</sub> (miền  $\Omega_1$ ) sẽ được ánh xạ trên lưới của bài toán nhỏ SP<sub>2</sub> (miền  $\Omega_2$ ). Quá trình này được thực hiện thông qua phương pháp ánh xạ [2-3], đó là:

$$\begin{aligned}
& (\text{curl } \mathbf{a}_{1-2}(\text{ánh xạ}), \text{curl } \mathbf{a}')_{\Omega_2} = (\text{curl } \mathbf{a}_1, \text{curl } \mathbf{a}')_{\Omega_2}, \\
& \forall \mathbf{a}' \in F_2^1(\Omega_2), \quad (14)
\end{aligned}$$

trong đó,  $F_2^1(\Omega_2)$  là không gian hàm được xác định cho nguồn ánh xạ  $\mathbf{a}_{1-2}(\text{ánh xạ})$  và hàm thử  $\mathbf{a}'$ .

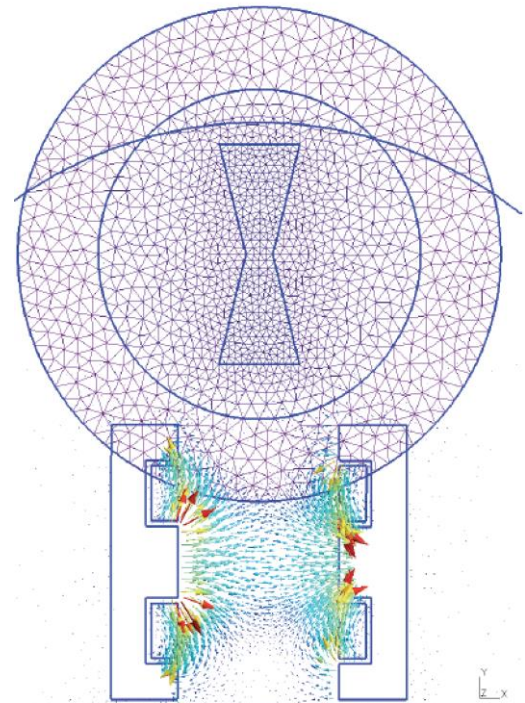
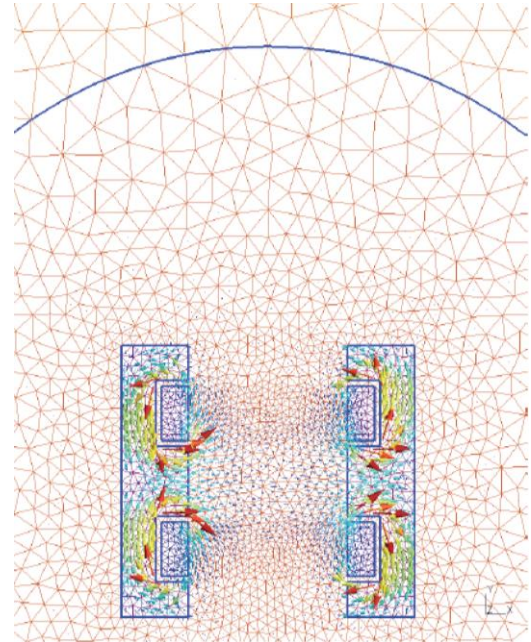
### 4. Bài toán ứng dụng

Trên cơ sở phương trình yếu nhận xây dựng cho công thức từ thế véc-tơ  $\mathbf{a}$  ở phần 3, tác giả sử dụng phần mềm **Gmsh** [7] để xây dựng mô hình với kích thước hình học thực tế của bài toán, và phần mềm **GetDP** [8] để xây dựng mô hình toán với các phương trình yếu nhận.

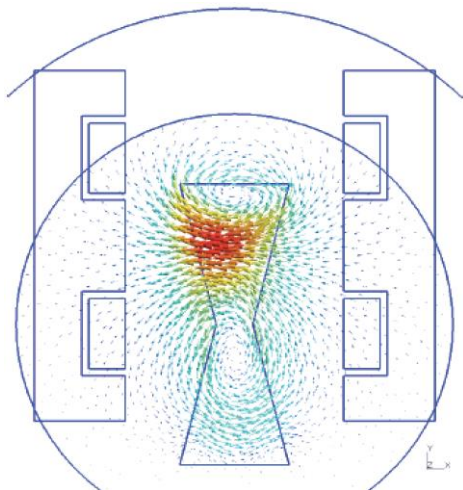
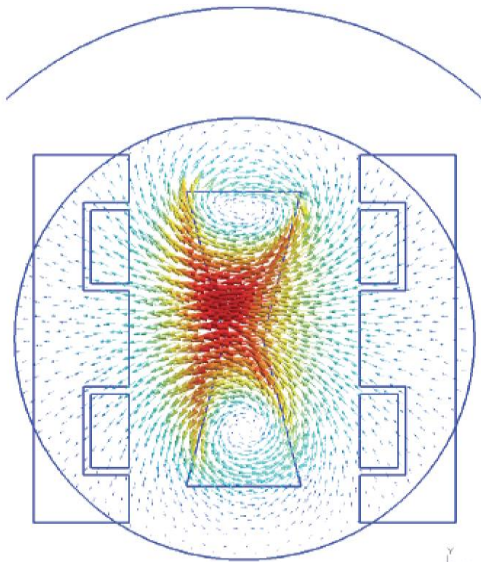
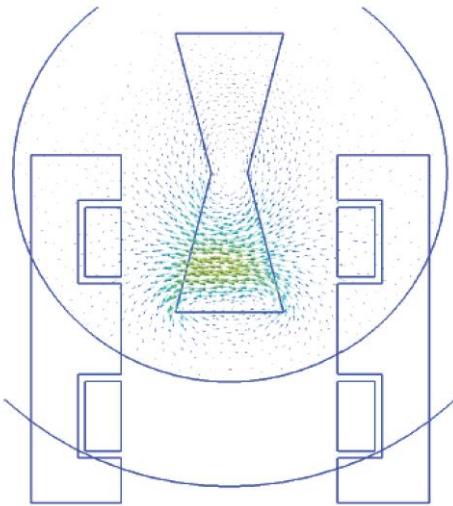
Xét bài toán ứng dụng với mô hình 2-D như thể hiện trong Hình 3. Mô hình gồm hai cuộn dây (phía trên và phía dưới), mỗi cuộn dây được quấn 1.000 vòng, dòng điện kích thích trực tiếp là 2,5A, hai lõi thép kỹ thuật điện (bên trái và bên phải) có độ từ thẩm tương đối  $\mu_r = \mu / \mu_0 = 100$ . Miền (lõi) dẫn từ ở giữa hai lõi thép và cuộn dây, có mật độ dẫn điện và độ từ thẩm tương đối lần lượt là  $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 / \Omega \cdot m$  và  $\mu_r = 1$  (kích thước ngoài của lõi giữa là 75 mm x 200 mm, chiều rộng tại vị trí giữa theo chiều cao là 25 mm), và có thể dịch chuyển lên trên hoặc xuống dưới. Mô hình chia lưới 2-D của các bài toán được thể hiện trong Hình 3, với các kích thước lưới khác nhau. Sự phân bố của mật độ từ cảm  $\mathbf{b}_1$  (trên) trong mô hình lưới không bao gồm miền dẫn ở giữa, và cường độ từ trường  $\mathbf{h}_1$  (dưới) ứng với sự dịch chuyển của miền dẫn được thể hiện trong Hình 3. Kết quả cho thấy, khi áp dụng phương pháp LKBTN thì lưới của bài toán hiện tại không phụ thuộc vào lưới của bài toán trước đó hoặc lưới của bài toán kế tiếp, đặc biệt là với sự dịch/thay đổi vị trí của các miền dẫn. Điều này làm cho việc tính toán trở nên đơn giản hơn, tiết kiệm được thời gian tính toán vì không phải chia lại lưới của các bài toán trước hoặc sau đó. Hình 4 biểu diễn nghiệm của từng bài toán nhỏ SP<sub>1</sub> (trái), SP<sub>2</sub> (giữa) và SP<sub>3</sub> (phải) với sự chuyển động/dịch chuyển của miền dẫn từ trên xuống dưới với vận tốc dịch chuyển là 28 m/s. Khi miền dẫn ở vị trí phía trên, mật độ từ cảm như chỉ bị ảnh hưởng của từ trường sinh ra của cuộn dây phía trên. Khi miền dẫn dịch chuyển xuống vị trí chính giữa hai cuộn dây và lõi thép, mật độ từ cảm phân bố trong miền dẫn là lớn nhất, do chịu ảnh hưởng của từ trường sinh ra của cả hai cuộn dây phía trên và phía dưới. Tương tự, khi miền dẫn dịch chuyển

xuống phía dưới và xa dần cuộn dây phía trên, mật độ từ cảm trên miền dẫn lại tiếp tục giảm như trường hợp ban đầu.

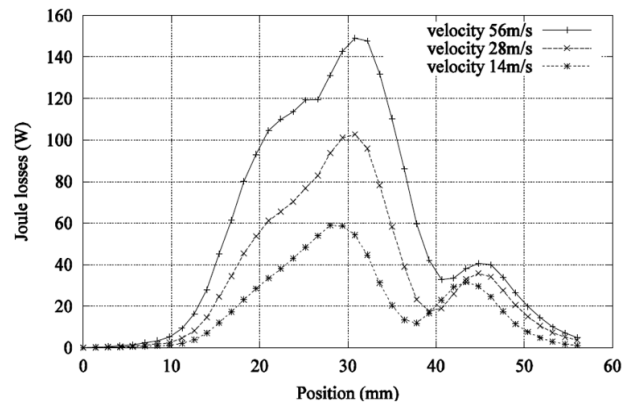
Tồn hao công suất trên miền dẫn dịch chuyển với các tốc độ khác nhau cũng được chỉ ra trong Hình 5. Giá trị của tồn hao công suất sẽ thay đổi với các vị trí khác nhau của miền dẫn. Cụ thể, khi miền dẫn ở vị trí chính giữa hai cuộn dây và lõi thép, tồn hao sẽ có giá trị lớn nhất ứng với vận tốc chuyển động của miền dẫn là 56 m/s. Khi vận tốc chuyển động của miền dẫn không đổi, giá trị tồn hao sẽ giảm dần khi miền dẫn từ được dịch chuyển lên trên hoặc xuống dưới, xa khu vực chính giữa hai cuộn dây.



**Hình 3.** Sự phân bố của mật độ từ cảm  $\mathbf{b}_1$  (trên) trong lưới mô hình (không bao gồm miền dẫn ở giữa) và cường độ từ trường  $\mathbf{h}_1$  (dưới) ứng với sự dịch chuyển của miền dẫn



**Hình 4.** Sự phân bố của mật độ từ cảm ứng với mỗi sự dịch chuyển của miền dẫn là một bài toán nhỏ, cụ thể:  $\mathbf{b}_1$  (SP<sub>1</sub>, trên),  $\mathbf{b}_2$  (SP<sub>2</sub>, giữa) và  $\mathbf{b}_3$  (SP<sub>3</sub>, dưới)



**Hình 5.** Tổn hao công suất trên các miền dẫn dịch chuyển với các tốc độ khác nhau

## 5. Kết luận

Phương pháp LKBTN đã được phát triển cho bài toán với mô hình từ động có xét đến sự chuyển động/dịch chuyển của hệ thống. Đầu tiên bài toán được giải khi không kể đến bất kỳ sự dịch chuyển/chuyển động của các phần dẫn, nghiệm tìm được sau đó được xem như là nguồn đề cấp cho bài toán mà có kể đến sự chuyển động của các vùng dẫn. Ứng với mỗi vị trí dịch chuyển khác nhau của miền dẫn, sẽ có một hệ lưới và kích thước mô hình phù hợp, và mỗi một bài toán sẽ được giải trên lưới độc lập mà không phụ thuộc vào lưới của bài toán khác, điều này thuận lợi cho việc chia lưới cũng như giảm được thời gian tính toán như đã trình bày trong nội dung của bài báo.

Kết quả đạt được từ việc áp dụng công thức từ thế véc-tơ  $\mathbf{a}$  sẽ giúp cho các nhà nghiên cứu có cơ sở phân tích về sự phân bố từ trường, dòng điện xoáy và tổn hao công suất trong miền dẫn khi kể đến sự chuyển động của hệ thống. Đây cũng là cơ sở để phát triển cho công thức véc-tơ cường độ từ trường  $\mathbf{h}$ , và sẽ được phát triển/mở rộng ở nghiên cứu tiếp theo.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Geuzaine, P. Dular, and W. Legros, "Dual formulations for the modeling of thin electromagnetic shells using edge elements", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 36, No. 4, 2000, pp. 799-802.
- [2] Vương Q. Dang, P. Dular, R. V. Sabariego, L. Krähenbühl, C. Geuzaine, "Subproblem approach for Thin Shell Dual Finite Element Formulations", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 48, No. 2, 2012, pp. 407-410.
- [3] P. Dular, Vương Q. Dang, R. V. Sabariego, L. Krähenbühl and C. Geuzaine, "Correction of thin shell finite element magnetic models via a subproblem method", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 47, No. 5, 2011, pp. 158-161.
- [4] Gerard Meunier, *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*, John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [5] S. V. Kulkarni, J. C. Olivares, R. Escarela-Perez, V. K. Lakhiani, and J. Tur-owski, "Evaluation of eddy currents losses in the cover plates of distribution transformers", *IET Sci., Meas. Technol* 151, No. 5, 2004, pp. 313-318.
- [6] C. Geuzaine, *High order hybrid finite element schemes for Maxwell's equations taking thin structures and global quantities into account*, Ph.D. thesis, University of Liege, Belgium, 2001.
- [7] Christophe Geuzaine, Jean-François Remacle, *Gmsh Reference Manual*, University of Liege, Belgium, 2015.
- [8] Patrick Dular, Christophe Geuzaine, *GetDP Reference Manual*, University of Liege, Belgium, 2014.