

PHÂN TÍCH HỆ SỐ ĐỘNG LỰC CỦA CẦU SÔNG HÀN CÓ XÉT ĐẾN SỰ THAY ĐỔI TẢI TRỌNG XE

DYNAMIC IMPACT FACTOR ANALYSIS FOR HAN RIVER BRIDGE CONSIDERING CHANGE OF MOVING LOADS

Nguyễn Xuân Toàn¹, Đặng Công Thuật¹, Nguyễn Thị Kim Loan¹, Nguyễn Duy Thảo¹, Trần Văn Đức²

¹Trường Đại học Bách khoa - Đại học Đà Nẵng

toan_nguyenxuan@dut.udn.vn; dangcongthuat@dut.udn.vn; ntkloan@dut.udn.vn; ndthao@dut.udn.vn

²Trường Đại học Duy Tân; tranvanduc1@dtu.edu.vn

(Nhận bài: 09/10/2020; Chấp nhận đăng: 15/11/2020)

Tóm tắt - Bài báo giới thiệu một số kết quả phân tích hệ số động lực của chuyển vị trong cầu Sông Hàn có xét đến sự thay đổi của tải trọng xe hai trục. Một hệ số điều chỉnh được xác định dựa trên các kết quả phân tích lý thuyết và đo đạc thực nghiệm tương ứng với tốc độ xe chạy khác nhau trên cầu. Hệ số điều chỉnh này được sử dụng để giúp cho kết quả phân tích lý thuyết gần với thực tế hơn. Nghiên cứu lý thuyết được thực hiện trên mô hình số với loại xe hai trục có tải trọng thay đổi theo qui luật phân bố chuẩn. Kết quả nghiên cứu cho thấy, hệ số động lực của chuyển vị lớn hơn đáng kể so với qui trình thiết kế hiện nay. Kết quả nghiên cứu này là tài liệu tham khảo giúp cho các kỹ sư có thêm thông tin để phân tích kiểm tra an toàn trong quá trình khai thác công trình cầu.

Từ khóa - Hệ số động lực; cầu Sông Hàn; tải trọng xe hai trục; mô hình phân tích số; đo đạc thực nghiệm; hệ số điều chỉnh.

1. Đặt vấn đề

Bài toán dao động của kết cấu cầu chịu tải trọng di động đã được quan tâm nghiên cứu từ giữa thế kỷ 19. Công trình nghiên cứu sớm nhất đã được công bố bởi R. Willis [1]. Đến nay, có nhiều công trình nghiên cứu của các tác giả trên thế giới và trong nước đã được công bố với mô hình tương tác động lực giữa công trình cầu và tải trọng xe di động ngày càng gần với thực tế hơn. Hầu hết các quy trình thiết kế cầu đều có quy định mức độ ảnh hưởng của tải trọng xe di động đến kết cấu cầu thông qua hệ số động lực [2, 3]. Các kết quả đã công bố cho thấy, hệ số động lực có sự thay đổi đáng kể phụ thuộc vào loại kết cấu, tải trọng và tốc độ xe chạy [4] [11].

Công trình cầu thường dao động mạnh dưới tác dụng của hoạt tải xe di động và trong số các tải trọng tác dụng lên công trình cầu thì tải trọng xe rất quan trọng. Các nghiên cứu về dao động của công trình cầu do tải trọng xe di động gây ra, thường xem xét ảnh hưởng của các yếu tố như: Tốc độ xe chạy, tình trạng mặt cầu, mô hình tải trọng, mô hình kết cấu cầu, tương tác của cầu với nền móng công trình... Trong đó, hoạt tải xe là một quá trình động và có tính ngẫu nhiên. Cho đến nay, do tính phức tạp của bài toán, tác động ngẫu nhiên của hoạt tải trong các quy trình thiết kế công trình cầu vẫn chưa được xem xét một cách đầy đủ, các

Abstract - The paper introduces some analysis results of dynamic impact factor by displacement in Han River bridge considered varies in weight of two-axle vehicle. An adjustment coefficient is determined based on the results of theoretical analysis and experimental measurements corresponding to different vehicle speeds on the bridge. This adjustment coefficient is used to help the theoretical analysis results closer to reality. The paper shows the results of research on the model of interaction between cable-stayed bridge under the effect of 2-axle vehicle load with the weight changes according to the standard distribution function. The research results shown that dynamic impact factor of displacement is significantly larger than the current bridge design codes. The research results are references enables engineers to analyze more information check the safety of the process using bridge.

Key words - Dynamic impact factor; Han River bridge; two-axle vehicle; numerical methods; experimental measurements; adjustment coefficient.

nghiên cứu dao động của công trình cầu chịu tác động của tải trọng di động ngẫu nhiên vẫn còn rất hạn chế.

Bài báo giới thiệu một số kết quả phân tích hệ số động lực của chuyển vị trong cầu Sông Hàn có xét đến sự thay đổi của tải trọng xe bằng phương pháp số và đo đạc thực nghiệm. Trong phạm vi của nghiên cứu này, các tác giả xem xét đến sự biến thiên của tải trọng theo quy luật phân bố chuẩn. Kết quả nghiên cứu được thực hiện trên mô hình phân tích số của cầu Sông Hàn - TP Đà Nẵng dưới tác dụng của tải trọng xe hai trục theo mô hình tương tác động lực.

2. Mô hình phân tích tương tác động lực giữa xe – cầu và phương trình vi phân dao động

2.1. Mô hình phân tích tương tác giữa xe và cầu

Kết cấu cầu dây văng (CDV) được mô hình hóa bởi các phần tử dầm, tháp và dây treo theo phương pháp phần tử hữu hạn. Sơ đồ tải trọng xe di chuyển trên cầu được thể hiện như trên Hình 1.

Trong mô hình kết cấu được xét đến khối lượng phân bố, hệ số cản, dao động ngang, dao động dọc trục của dầm, tháp và các dây văng. Phần tử dầm và tháp khi chịu uốn được phân tích theo mô hình Euler-Bernoulli. Phần tử cáp xiên được phân tích theo mô hình biến dạng có xét tới độ cứng chống uốn của cáp. Mô hình tương tác động lực

¹ The University of Danang - University of Sciences and Technology (Nguyen Xuan Toan, Cong-Thuat DANG, Nguyen Thi Kim Loan, Nguyen Duy Thao)

² Duy Tan University (Tran Van Duc)

giữa phần tử dầm chịu uốn và tải trọng xe 2 trục di động được thể hiện như Hình 2.

độ tuyệt đối của khối lượng m.

\bar{u}_i - chuyển vị tuyệt đối của khung xe tại vị trí trục i .

u_i - chuyển vị tuyệt đối của trục xe thứ i , tọa độ tuyệt đối của khối lượng m_i .

y_{si} - chuyển vị tương đối giữa khung và trục xe thứ i .

y_{ti} - chuyển vị tương đối giữa trục xe i và phần tử dầm.

h_i - khoảng cách tính từ trọng tâm các khối lượng m_i đến trục của phần tử dầm đang xét.

T_{ti} - lực ma sát hãm giữa lốp xe thứ i với mặt cầu.

w_i - chuyển vị của phần tử dầm tại vị trí trục xe thứ i .

2.2. Phương trình vi phân dao động phần tử dầm và tải trọng di động

Phương trình vi phân dao động của phần tử dầm và tải trọng xe viết dưới dạng ma trận như sau:

$$M_e \ddot{q} + C_e \dot{q} + K_e q = f_e \tag{2}$$

Trong đó, $\ddot{q}, \dot{q}, q, f_e$ - lần lượt là véctơ gia tốc, vận tốc, chuyển vị, lực hỗn hợp:

$$\ddot{q} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_e \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_e \\ \dot{z} \end{Bmatrix}; \quad q = \begin{Bmatrix} w_e \\ z \end{Bmatrix}; \quad f_e = \begin{Bmatrix} f_w \\ f_z \end{Bmatrix};$$

$$w_e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}; \quad z = \begin{Bmatrix} u \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \tag{3}$$

w_1, φ_1 - Độ võng và góc xoay đầu trái của phần tử dầm;

w_2, φ_2 - Độ võng và góc xoay đầu phải của phần tử dầm;

M_e, C_e, K_e - lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận cản, ma trận độ cứng hỗn hợp của hệ:

$$M_e = \begin{bmatrix} M_{ww} & M_{wz} \\ M_{zw} & M_{zz} \end{bmatrix}; \quad C_e = \begin{bmatrix} C_{ww} & C_{wz} \\ C_{zw} & C_{zz} \end{bmatrix};$$

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wz} \\ K_{zw} & K_{zz} \end{bmatrix}; \tag{4}$$

Trong đó, M_{ww}, C_{ww}, K_{ww} là ma trận khối lượng, ma trận cản, ma trận độ cứng cơ bản của phần tử dầm chịu uốn, có thể tìm thấy trong tài liệu [12] ÷ [15]. Các ma trận và véc tơ còn lại có thể tham khảo trong tài liệu [6] và [9].

2.3. Phương trình vi phân dao động của phần tử cáp

Phương trình vi phân dao động của phần tử cáp cũng tương tự phương trình (2)

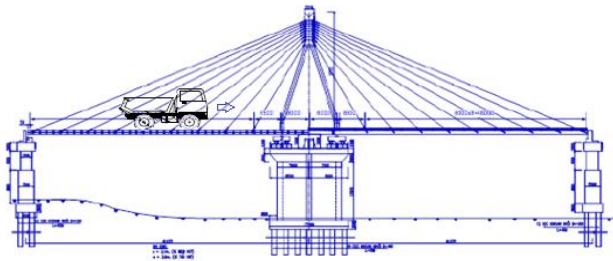
Khi đó, M_e, C_e, K_e - lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận cản, ma trận độ cứng của phần tử cáp.

Với $K_e = K_f + K_n$; K_f ma trận độ cứng cơ bản của phần tử cáp, K_n ma trận độ cứng xét đến lực căng và độ võng của cáp phi tuyến có thể tìm thấy trong tài liệu [5].

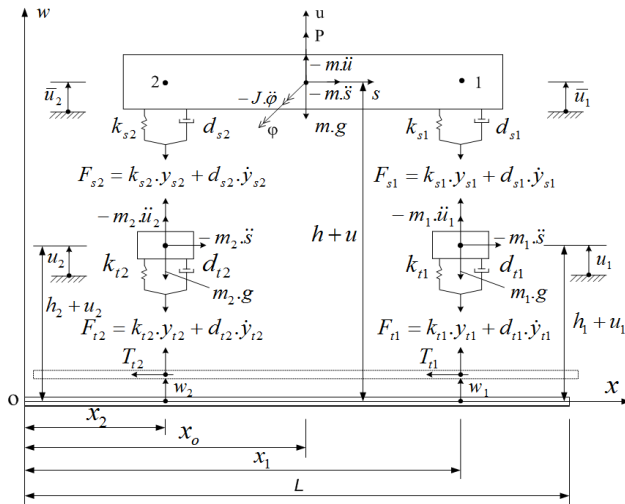
2.4. Xác định hệ số động lực trong cầu do hoạt tải

Hệ số động lực (1+IM) được xác định theo công thức (5):

$$(1 + IM) = \frac{S_d}{S_t} \tag{5}$$



Hình 1. Sơ đồ tải trọng xe di chuyển trên cầu



Hình 2. Mô hình tương tác giữa xe và phần tử dầm

Trong đó:

L - chiều dài của phần tử dầm;

x_o - tọa độ trọng tâm của xe và hàng trừ trục xe;

x_i - tọa độ của trục xe thứ i tại thời điểm đang xét.

$$x_i = \begin{cases} v_i(t-t_i) - x_{elf} & \text{khi } t_i \leq t \leq t_{bi} \\ v_i(t_{bi}-t_i) + \left[\frac{a_i(t-t_{bi})}{2} + v_i \right] \cdot (t-t_{bi}) - x_{elf} & \text{khi } t_{bi} < t \leq t_{ei} \end{cases} \tag{1}$$

x_{elf} - khoảng cách từ đầu cầu đến đầu trái của phần tử dầm đang xét.

v_i - vận tốc của trục xe thứ i trước khi hãm phanh.

a_i - gia tốc của trục xe thứ i khi hãm phanh ($a_i < 0$).

t_i - thời điểm trục xe thứ i bắt đầu vào phần tử dầm.

t_{bi} - thời điểm trục xe thứ i bắt đầu hãm phanh.

t_{ei} - thời điểm trục xe thứ i ở điểm cuối của phần tử.

t - thời điểm đang xét.

$P = G \cdot \sin(\Omega t + \alpha)$ - lực kích thích điều hoà. Với Ω là vận tốc góc, α là góc pha ban đầu, G là biên độ.

m - khối lượng của xe trừ khối lượng của các trục xe, (m được giả thuyết thay đổi theo qui luật phân bố chuẩn).

m_i - khối lượng của trục xe thứ i .

k_{s_i}, d_{s_i} - độ cứng và độ giảm chấn của nhíp xe thứ i .

k_{t_i}, d_{t_i} - độ cứng và độ giảm chấn của lốp xe thứ i .

s - quãng đường xe di chuyển.

φ - góc quay của khung xe (rad).

u - chuyển vị tuyệt đối của khung xe tại khối tâm, tọa

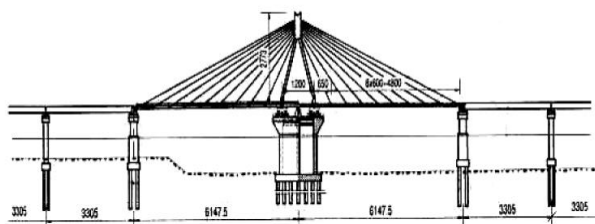
Trong đó, S_d - giá trị chuyển vị hoặc nội lực động lớn nhất do tải trọng xe đi động gây ra; S_t - giá trị chuyển vị hoặc nội lực tĩnh lớn nhất do tải trọng xe đi động gây ra

3. Phân tích hệ số động lực của cầu Sông Hàn

3.1. Mô hình kết cấu, tải trọng và các số liệu cơ bản

Rời rạc kết cấu CDV thành hệ dầm cứng, tháp cầu và các dây văng. Trong đó, tháp cầu là tập hợp hữu hạn các phần tử dầm cơ bản chịu nén uốn. Dây văng là tập hợp hữu hạn các phần tử cáp chịu kéo uốn. Dầm cứng là tập hợp hữu hạn các phần tử dầm tương tác với tải trọng xe hai trục.

Sơ đồ cầu sông Hàn thành phố Đà Nẵng như Hình 3, bao gồm 2 nhịp chính $2 \times 60.5\text{m}$ kết cấu dây văng. Phần kết cấu cầu dây văng có thể quay quanh trụ chính để đóng mở cho tàu thuyền qua lại.



Hình 3. Sơ đồ cầu Sông Hàn

Các tham số cơ bản của cầu như sau: $E=2,1.10^7 \text{ T/m}^2$, $J_d=0,0048 \text{ m}^4$, $F_d=0,045 \text{ m}^2$, $\rho F_d=4,068 \text{ T/m}$, $J_{th}=0,0063 \text{ m}^4$, $F_{th}=0,068 \text{ m}^4$, $\rho F_{th}=0,53 \text{ T/m}$, $\theta=0,027$ (hệ số ma sát trong), $\beta=0,01$ (hệ số ma sát ngoài), 9 cặp dây cáp tính từ ngoài vào trong có tiết diện 9,8, 1,6, 12,6, 16,8, 16,8, 12,6, 12,6, 9,8, 9,8 cm^2 .

Xe đi động là loại xe IFA-L60 có hai trục, có các tham số cơ bản được thể hiện trên Bảng 1.

Bảng 1. Các tham số kỹ thuật của xe IFA-L60

TT	Tham số	Ký hiệu	Đơn vị	Loại xe IFA-L60
1	Khối lượng toàn bộ xe (kể cả hàng chất lên xe)	m	kG	10560
2	Khoảng cách trục trước và sau	l	m	3.25
	Các tham số của trục trước			
3	Khối lượng toàn bộ	m^T	kG	3068
4	Khối lượng thùng và hàng	m^T_1	kG	3013
5	Khối lượng trục	m^T_2	kG	55
6	Hệ số độ cứng của nhíp xe	k^T_1	N/m	302000
7	Hệ số độ cứng của lớp xe	k^T_2	N/m	1200000
8	Hệ số giảm chấn của nhíp xe	d^T_1	Ns/m	7344
9	Hệ số giảm chấn của lớp xe	d^T_2	Ns/m	4000
	Các tham số của trục sau			
10	Khối lượng toàn bộ	m^S	kG	7492
11	Khối lượng thùng và hàng	m^S_1	kG	7385
12	Khối lượng trục	m^S_2	kG	107
13	Hệ số độ cứng của nhíp xe	k^S_1	N/m	2000000
14	Hệ số độ cứng của lớp xe	k^S_2	N/m	2600000
15	Hệ số giảm chấn của nhíp xe	d^S_1	Ns/m	3672
16	Hệ số giảm chấn của lớp xe	d^S_2	Ns/m	8000

3.2. Xác định hệ số điều chỉnh β

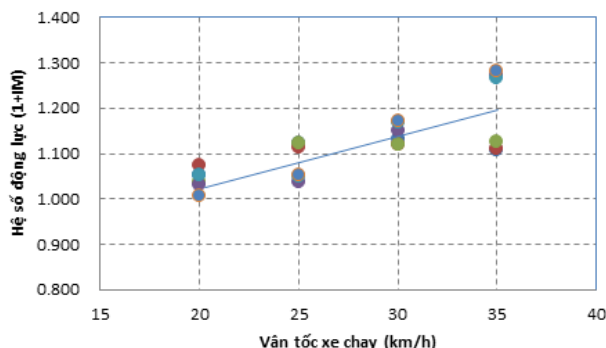
Thông thường kết quả phân tích lý thuyết và thực nghiệm có sự chênh lệch, để áp dụng các mô hình số xác định hệ số động lực của chuyển vị do tải trọng xe thay đổi đi chuyển trên cầu, các tác giả xác định hệ số điều chỉnh β

theo công thức (6) dựa trên một số kết quả đo đạc thực nghiệm và kết quả phân tích trên mô hình số tương ứng:

$$\beta = \frac{(1+IM)_{TT}}{(1+IM)_{LT}} \quad (6)$$

Trong đó, β là hệ số điều chỉnh, $(1+IM)_{LT}$ là hệ số động lực theo lý thuyết, $(1+IM)_{TT}$ là hệ số động lực theo đo đạc thực nghiệm.

Kết quả phân tích lý thuyết và đo đạc hệ số động lực $(1+IM)$ khi vận tốc xe chạy trong khoảng 20km/h đến 35km/h trên cầu Sông Hàn được thể hiện trên Hình 4 và Bảng 2. Đường xu hướng của hệ số động lực $(1+IM)$ tăng khi vận tốc xe chạy tăng.



Hình 4. Hệ số động lực tại các vị trí đo khi xe chạy với $v=20-35\text{km/h}$

Bảng 2. Hệ số động lực theo lý thuyết và đo đạc thực nghiệm cầu Sông Hàn

Tốc độ xe chạy (km/h)	Hệ số $(1+IM)$ trung bình theo thực nghiệm	Hệ số $(1+IM)$ trung bình theo lý thuyết	Sai khác giữa lý thuyết và thực nghiệm (%)
20	1,042	1,10	5,4
25	1,083	1,13	3,9
30	1,144	1,22	6,5
35	1,195	1,29	6,8

Nếu tính trung bình chung cho tất cả các điểm đo, với tốc độ từ 20 km/h đến 35 km/h theo lý thuyết và đo đạc thực nghiệm, kết quả theo lý thuyết cao hơn đo đạc thực nghiệm 5,65%.

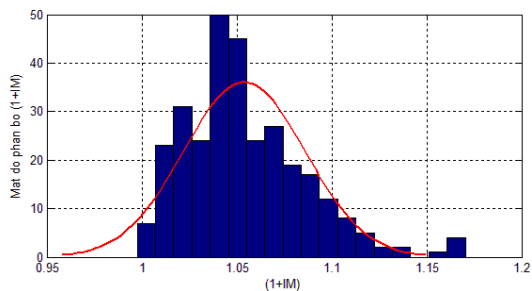
Ta xác định được hệ số điều chỉnh $\beta=0,9435$.

3.3. Xác định hệ số động lực $(1+IM)$ của cầu Sông Hàn

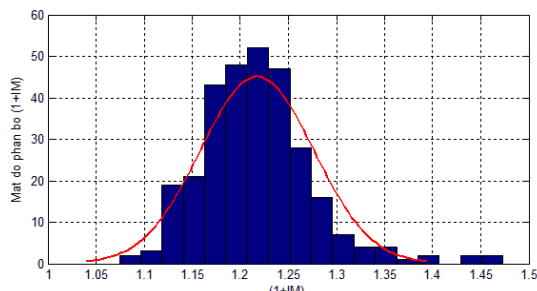
Tiến hành phân tích dao động CDV Sông Hàn dưới tác động của xe IFA-L60 có tải trọng (khối lượng m của toàn bộ xe) thay đổi ngẫu nhiên trong phạm vi từ 1 đến 2 lần giá trị ghi trong Bảng 1, kết quả hệ số động lực trong kết cấu cầu Sông Hàn như Bảng 3 và Hình 5 ÷ 13

Bảng 3. Hệ số động lực của chuyển vị do xe IFA-L60 gây ra

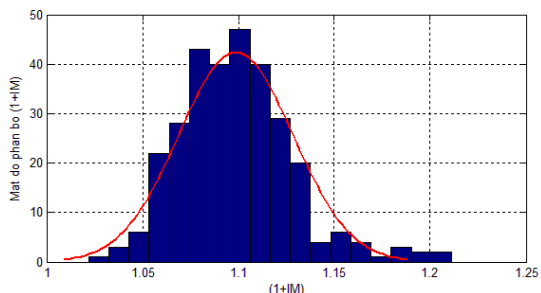
Đặc trưng ngẫu nhiên	$1+IM_x$			$1+IM_y$			$1+IM_z$		
	5m/s	10m/s	15m/s	5m/s	10m/s	15m/s	5m/s	10m/s	15m/s
Giá trị min	0.93	0.88	0.82	0.91	0.89	0.86	0.92	0.84	0.81
Giá trị max	1.26	1.64	1.94	1.46	1.57	1.76	1.40	1.80	2.03
Kỳ vọng	1.10	1.26	1.38	1.18	1.23	1.31	1.16	1.32	1.42
Kỳ vọng β	1.04	1.20	1.31	1.12	1.17	1.24	1.10	1.25	1.35
Độ lệch	0.10	0.22	0.33	0.16	0.20	0.26	0.14	0.28	0.36



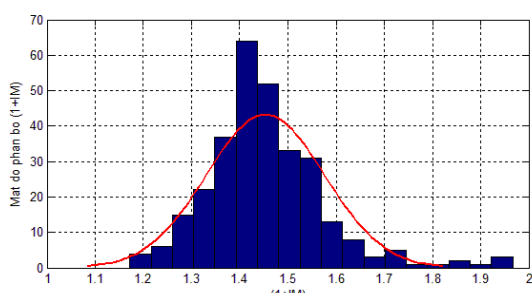
Hình 5. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_x , do xe IFA L60, $v=5m/s$



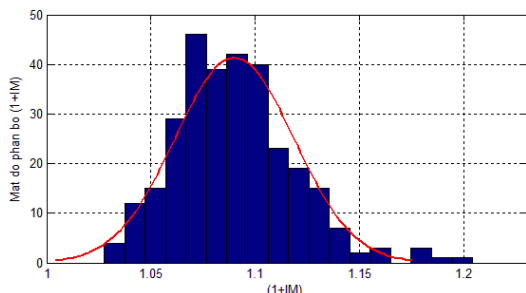
Hình 10. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_z , do xe IFA L60, $v=10m/s$



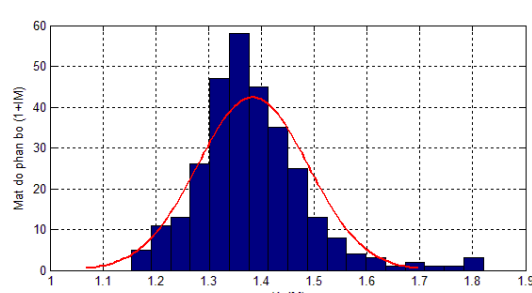
Hình 6. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_y , do xe IFA L60, $v=5m/s$



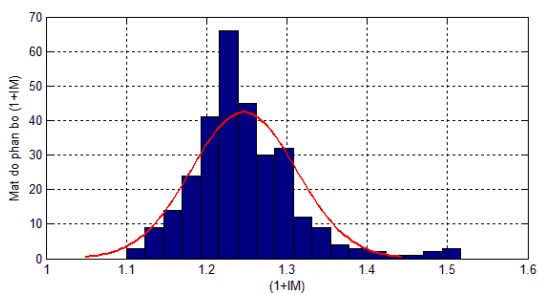
Hình 11. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_x , do xe IFA L60, $v=15m/s$



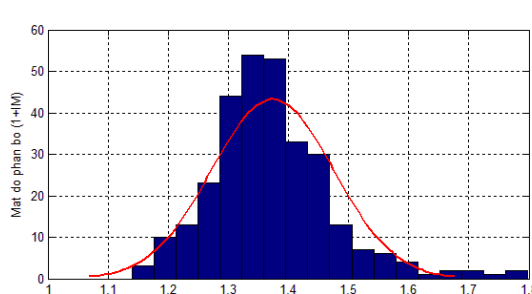
Hình 7. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_z , do xe IFA L60, $v=5m/s$



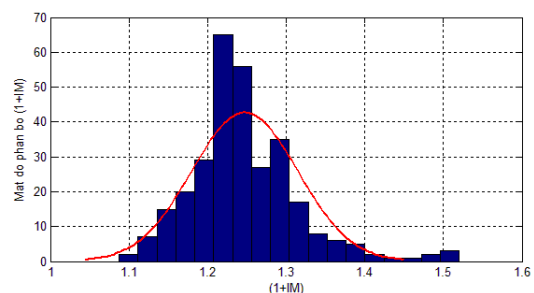
Hình 12. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_y , do xe IFA L60, $v=15m/s$



Hình 8. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_x , do xe IFA L60, $v=10m/s$



Hình 13. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_z , do xe IFA L60, $v=15m/s$



Hình 9. Mật độ phân bố $(1+IM)$ của chuyển vị U_y , do xe IFA L60, $v=10m/s$

Trong phạm vi nghiên cứu với miền vận tốc xe chạy $5m/s \div 15m/s$, kết quả phân tích hệ số động lực $(1+IM)_{TT}$ trong kết cấu cầu Sông Hàn có xu hướng tăng khi vận tốc xe chạy tăng. So với tiêu chuẩn 22TCN 272-05 [3] giá trị cực đại được tìm thấy khá lớn, điều này cần lưu ý để phân tích kiểm tra an toàn trong quá trình khai thác công trình cầu Sông Hàn.

4. Kết luận

Bài báo giới thiệu một số kết quả phân tích hệ số động lực của chuyển vị trong Sông Hàn có xét đến sự thay đổi

của tải trọng xe. Hệ số điều chỉnh β dựa trên kết quả phân tích lý thuyết kết hợp với đo đạc thực nghiệm được áp dụng để xác định hệ số động lực tính toán $(1+IM)_{TT}$ thông qua hệ số động lực $(1+IM)_{LT}$ được phân tích tổng thể mô hình số của cầu trên máy tính với tải trọng thay đổi.

Kết quả phân tích cho thấy, hệ số động lực $(1+IM)$ của cầu Sông Hàn theo lý thuyết và thực nghiệm có xu hướng tăng khi tốc độ tăng trong phạm vi khai thác và có một số giá trị lớn hơn giá trị được quy định trong tiêu chuẩn 22TCN 272-05 [3]. Do vậy, cần lưu ý khi phân tích kiểm tra an toàn trong quá trình khai thác công trình cầu Sông Hàn thành phố Đà Nẵng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Willis, R. (1849). The effect produced by causing weights to travel over elastic bars. *Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures*, Appendix B, Stationery office, London, England.
- [2] AASHTO LRFD (2012), Bridge Design Specifications, 6th edition, *American Association of State Highway and Transportation Officials*, Washington, DC.
- [3] Bộ Giao thông Vận tải (2005). *Tiêu chuẩn thiết kế cầu 22TCN 272-05*, Nhà xuất bản Giao thông Vận tải, Hà Nội.
- [4] Đỗ Anh Cường, Tạ Hữu Vinh, "Tương tác giữa kết cấu hệ thanh và tải trọng xe di động". *TTCT. Hội nghị Khoa học Toàn Quốc về Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ 7*, NXB. Đại học Quốc gia Hà Nội, tr. 92-101, 2004.
- [5] Nguyễn Xuân Toàn, *Phân tích dao động của cầu dây văng dưới tác dụng của tải trọng di động. Luận án TS. Kỹ thuật*, Hà Nội, 2007.
- [6] Nguyễn Xuân Toàn, Trần Văn Đức (2012), "Tương tác động lực giữa xe ba trục và cầu dầm liên tục có xét đến lực hãm xe", *Tuyển tập Công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ IX, Hà Nội 8-9/12/2012*, tập 1, trang 628-637.
- [7] Nguyễn Xuân Toàn, "Phân tích hệ số động lực của chuyển vị và lực cắt trong cầu dầm liên tục do tải trọng di động gây ra bằng phương pháp số", *TTCT Hội nghị Khoa học toàn quốc lần thứ 2 về Cơ kỹ thuật và Tự động hóa*, NXB BKHN, 10/2016, trang 196-202.
- [8] Nguyễn Xuân Toàn, Nguyễn Duy Thảo, Kuriyama Yukihisa, "Phân tích hệ số động lực của chuyển vị, mô men uốn và lực cắt trong cầu dầm SuperT có bản mặt cầu liên tục nhiệt do tải trọng di động gây ra bằng phương pháp số", *Tạp chí Giao thông Vận tải*, số 03/2017, trang 42-45, ISSN: 2354-0818.
- [9] Toan X. N., Duc V. T., "A finite element model of vehicle - cable stayed bridge interaction considering braking and acceleration", *The 2014 World Congress on Advances in Civil, Environmental, and Materials Research*. Busan, Korea, p.109, (20p.)
- [10] Xuan-Toan Nguyen, Van-Duc Tran, "Determination of dynamic impact factor for continuous girder bridge due to vehicle braking force with finite element method analysis and experimental investigation", *Vietnam Journal of Mechanics, VAST*, Vol. 39, No. 2 (2017), pp. 149 – 164. ISSN 0866-7136.
- [11] Xuân-Toan Nguyen, Van-Duc Tran, and Nhat-Duc Hoang, "A Study on the Dynamic Interaction between Three-Axle Vehicle and Continuous Girder Bridge with Consideration of Braking Effects". *Journal of Construction Engineering*, Volume 2017, Article ID 9293239, 12 pages. ISSN: 2314-5986.
- [12] Ray W. Clough and Joseph Penzien (1993). *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, Inc. Singapore.
- [13] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000), *The Finite Element Method*, 5th edition, Butterworth-Heinemann, Vol 1&2, Oxford.
- [14] Reddy J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Inc. Singapore, 1991.
- [15] S mith I. M., Griffith D. V., *Programming the finite element method*. Jonh Wiley & Sons, Singapore, 1988.