HẠNG NHÂN TỬ ỔN ĐỊNH CỦA MA TRẬN TRÊN NỬA VÀNH

STABLE FACTOR RANK OF MATRICES ON SEMIRINGS

Hà Chí Công[1*]

[1]*Trường Đại học Tài chính – Kế toán*

[*]Tác giả liên hệ: hachicong@tckt.edu.vn

(Nhận bài: 11/01/2021; Chấp nhận đăng: 21/5/2021)

Tóm tắt - Trong lý thuyết vành, hạng nhân tử ổn định của ma trận đóng vai trò quan trọng trong bài toán phân loại vành và phân tích cấu trúc vành. Điều kiện để hạng nhân tử ổn định của một ma trận tùy ý trên vành tồn tại cũng như các tính chất của nó đã được nghiên cứu bởi P.M. Cohn và đã có nhiều kết quả thú vị. Tuy nhiên, khi xem xét hạng nhân tử ổn định của ma trận trên nửa vành thì vẫn chưa có nhiều kết quả nghiên cứu về vấn đề này. Trong bài báo này, nhóm tác giả chứng minh điều kiện cần và đủ để một ma trận tùy ý tồn tại hạng nhân tử ổn định, chỉ ra một lớp nửa vành thỏa mãn điều kiện này và chứng minh một số tính chất cơ bản của hạng nhân tử ổn định của ma trận trên nửa vành.

Từ khóa - Nửa vành; ma trận; hạng nhân tử; hạng nhân tử ổn định; ma trận ổn định đầy

Abstract - In Ring theory, the stable factor rank of matrices play an important role in the problems of rings classification and rings structure analysis. The conditions for existence of stable factor rank of matrices on rings and its properties have been studied by P.M. Cohn, and there were many interesting results about these problems. However, there are not many research results about stable factor rank of matrices on semirings. In this paper, we prove the necessary and sufficient conditions for an arbitrary matrix having stable factor rank, indicate a semiring class satisfying this conditions and prove some basic properties of stable factor rank of matrices on semirings.

Key words - Semiring; matrix; factor rank; stable factor rank; stably full matrix

1. Đặt vấn đề

Hạng ổn định của ma trận trên vành đóng một vai trò quan trọng trong phân loại vành (xem [1], [2]), Trong [2], P.M.Cohn đã chứng minh được rằng: Điều kiện cần và đủ để hạng ổn định của một ma trận trên vành cho trước tồn tại là vành đó có số phần tử sinh không bị chặn hay còn gọi là vành có UGN. Xét trên nửa vành, câu hỏi đặt ra là: *Với lớp nửa vành nào thì tồn tại hạng nhân tử ổn định của ma trận? Hơn nữa, hạng nhân tử ổn định của ma trận trên nửa vành có những tính chất đặc trưng nào?*

Trong khoảng ba thập niên trở lại đây, việc nghiên cứu về hạng ma trận trên nửa vành được nhiều nhà toán học quan tâm và đã đưa ra được nhiều kết quả thú vị trong phân tích nửa vành, đặc biệt là trên nửa vành Max-plus cũng như một số lớp nửa vành phi khả đối khác (xem [3]). Nhằm làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu về nửa vành, cũng như giải quyết phần nào các câu hỏi được nêu ra ở trên, trong bài báo này, nhóm tác giả chỉ ra điều kiện cần và đủ để tồn tại hạng nhân tử ổn định không âm của một ma trận tùy ý trên nửa vành, chỉ ra một lớp nửa vành khá rộng thỏa mãn điều kiện này. Ngoài ra, cũng chứng minh được một số tính chất đặc trưng cơ bản của hạng nhân tử ổn định trên nửa vành cho trước.

2. Một số định nghĩa và kết quả liên quan

Trong bài viết này, nhóm tác giả chỉ xét cho nửa vành có đơn vị và để thuận tiện cho việc trình bày, một ma trận *A* cấp $m\times n$ trên nửa vành *R* được ký hiệu $A_{m\times n}$, nếu *A* là ma trận vuông cấp *n* thì ta viết A_n. Tập hợp các ma trận cấp $m\times n$ trên nửa vành *R* thì được viết $M_{m\times n}(R)$.

Định nghĩa 2.1 ([4]). *Nửa vành* là một đại số $(R,+,1,.,0)$ sao cho $(R,+,0)$ là một vị nhóm giao hoán với phần tử đơn vị là *0*, $(R,.,1)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị là *1*, phép nhân phân phối hai phía đối với phép cộng và $0.r = r.0 = 0$ với mọi $r \in R$.

Nửa vành *R* được gọi là *phi khả đối* nếu $a+b=0 \Rightarrow a=b=0, \forall a,b \in R$.

Nửa vành *R* được gọi là *nguyên* nếu $a.b=0 \Rightarrow a=0$ hoặc $b=0, \forall a,b \in R$.

Định nghĩa 2.2 ([4]). Một nửa môđun phải trên nửa vành *R* là một vị nhóm giao hoán $(M, +, 0_M)$ cùng với phép nhân ngoài $(m,r)\to mr$ từ $M\times R$ đến *M* thỏa mãn các điều kiện: $m(rr') = (mr)r'$, $(m + m')r = mr + m'r$, $m(r + r') = mr + mr'$, $m1 = m$, $0_Mr = 0_M = m0$ với mọi $m,m'\in M$ và $r,r'\in R$. Định nghĩa nửa môđun trái được phát biểu tương tự.

Định nghĩa 2.3 ([5]). Cho *M* là một nửa môđun trên nửa vành *R*, *N* là tập con của *M*. Ta nói *M* được *sinh* bởi *N* nếu mọi phần tử của *M* đều biểu thị tuyến tính được qua các phần tử của *N*. Ký hiệu $<N> = M$. Hơn nữa, nếu *N* có hữu hạn phần tử thì ta nói *M* là *nửa môđun hữu hạn sinh*.

Định nghĩa 2.4 ([4]). Cho *M*, *N* là các nửa môđun trên nửa vành *R*, một ánh xạ $f: M\to N$ được gọi là *R*-đồng cấu nếu $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(xr)=f(x)r$ với mọi $x,y\in M$ và với mọi $r\in R$.

Đồng cấu *f* được gọi là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu nếu *f* là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Nếu $f: M\to N$ là đẳng cấu thì ta ký hiệu $M\cong N$.

Định nghĩa 2.5 ([5]). Cho *R* là nửa vành, *P* là nửa môđun trên *R*, *P* được gọi là *nửa môđun xạ ảnh* nếu với mọi *R*-toàn cấu $\alpha: M\to N$ và mọi *R*-đồng cấu $\beta: P\to N$

[1] University of Finance and Accountancy (Ha Chi Cong)

luôn tồn tại R-đồng cấu $\gamma : P \to M$ sao cho $\alpha \circ \gamma = \beta$.

Nhắc lại trong [5, Lemma 4.3] rằng, cho P là một nửa môđun (phải) trên nửa vành R. Khi đó, P là nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh khi và chỉ khi tồn tại một ma trận lũy đẳng A cấp n lấy hệ số trên R sao cho P đẳng cấu với $A(R^n)$, ở đây $A(R^n)$ là nửa môđun con của R^n được sinh bởi các vectơ cột của ma trận A.

Định nghĩa 2.6 ([2]). Cho R là nửa vành, $E \in M_{m\times m}(R), F \in M_{n\times n}(R)$ là các ma trận lũy đẳng. Ta nói E và F là *tương đương* với nhau nếu tồn tại các ma trận $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times m}(R)$ sao cho $E = AB$ và $F = BA$. Ký hiệu $E \cong F$.

Mệnh đề 2.7 ([6, Mệnh đề 3.8]). Cho P và Q là các nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên nửa vành R, P được sinh từ các vectơ cột của ma trận lũy đẳng E và Q được sinh từ các vectơ cột của ma trận lũy đẳng F. Khi đó, $P \cong Q \Leftrightarrow E \cong F$.

Gọi $V(R)$ là tập các lớp đẳng cấu của các nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên nửa vành R. Khi đó, $V(R)$ là một vị nhóm giao hoán với phép toán cộng được định nghĩa bởi:

$$[P]+[Q] = [P \oplus Q], \forall\ [P],[Q] \in V(R)$$

Do mọi nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh P ứng với một ma trận lũy đẳng A sao cho P đẳng cấu với $A(R^n)$ nên để thuận tiện cho việc trình bày các chứng minh, ta có thể xem $V(R)$ là tập các lớp tương đương (theo quan hệ tương đương như trong Định nghĩa 2.6) của các ma trận lũy đẳng trên nửa vành R. Khi đó, $V(R)$ là một vị nhóm giao hoán với phép toán cộng được xác định bởi:

$$[A] \oplus [B] = [A \oplus B], \forall\ [A],[B] \in V(R)$$

với $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 2.8 ([1]). Cho M là một vị nhóm giao hoán, một *phiếm hàm* trên vị nhóm M là một ánh xạ g từ M đến vị nhóm cộng các số thực không âm $\mathbb{R}^+$.

Phiếm hàm g được gọi là *tuyến tính* nếu g là đồng cấu vị nhóm. g được gọi là *phiếm hàm lồi* nếu $f(x) \le f(x+y) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in M$.

Phiếm hàm g được gọi là *dưới tuyến tính* nếu nó lồi và $f(nx) = nf(x), \forall x \in M, n \in \mathbb{N}$.

Nhắc lại trong [1] rằng, cho g là một phiếm hàm lồi trên vị nhóm giao hoán M, khi đó, *chính qui hóa* của g được xác định bởi $g^*(x) = \lim \frac{1}{n} g(nx), \forall x \in M$ là một phiếm hàm dưới tuyến tính trên M và $g^*(x) \le g(x), \forall x \in M$. Chú ý rằng, nếu g tuyến tính thì g^* cũng tuyến tính.

Định lý 2.9 ([1, Theorem 2.2]). Cho M là vị nhóm giao hoán, p là một phiếm hàm dưới tuyến tính trên M và tuyến tính trên vị nhóm con T của M. Khi đó, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính λ trên M sao cho $\lambda|_T = p|_T$ và $\lambda(x) \le p(x), \forall x \in M$.

Định nghĩa 2.10 ([7]). Cho A là ma trận cấp $m \times n$ trên nửa vành R, *hạng nhân tử* của A là số nguyên không âm k bé nhất sao cho tồn tại các ma trận $B \in M_{m\times k}(R)$, $C \in M_{k\times n}(R)$ và $A = B.C$. Ký hiệu là $f(A)$.

Qui ước hạng nhân tử của ma trận không thì bằng 0.

Mệnh đề 2.11 ([6]). Cho R là nửa vành, $E \in M_{m\times m}(R), F \in M_{n\times n}(R)$ là các ma trận lũy đẳng tương đương với nhau. Khi đó, $f(E) = f(F)$.

Định nghĩa 2.12 ([2]). Cho A_n là ma trận vuông cấp $n \times n$ trên nửa vành R, A được gọi là ma trận *đầy* nếu $f(A) = n$.

Dưới đây là một số bất đẳng thức về hạng nhân tử của ma trận được chứng minh hoặc được suy ra từ các kết quả trong [6] và [7].

Mệnh đề 2.13 ([7]). Cho R là nửa vành, $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times p}(R)$. Khi đó,

$$f(AB) \le \min\{f(A), f(B)\}.$$

Hệ quả 2.14. Trên nửa vành R cho các ma trận $A \in M_{m\times n}(R), P \in M_{m\times m}(R), Q \in M_{n\times n}(R)$, với P và Q là các ma trận khả nghịch. Khi đó,

$$f(A) = f(PA) = f(AQ) = f(PAQ).$$

Mệnh đề 2.15 ([7]). Cho A và B là các ma trận cùng cấp $m \times n$ trên nửa vành R. Khi đó,

$$f(A+B) \le \min\{f(A), f(B), m, n\}.$$

Mệnh đề 2.16 ([6]). Cho R là nửa vành, $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{p\times n}(R)$. Khi đó,

$$\max\{f(A), f(B)\} \le f\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le f(A) + f(B).$$

Mệnh đề 2.17. Cho A, B là các ma trận tùy ý trên nửa vành R. Khi đó,

$$\max\{f(A), f(B)\} \le f\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \le f(A) + f(B).$$

3. Kết quả nghiên cứu

Để thuận tiện cho việc trình bày, ta ký hiệu ma trận $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ là $A \oplus B$ với A, B là các ma trận tùy ý trên nửa vành cho trước. Ta có nhận xét sau: Cho A là ma trận tùy ý trên nửa vành R và mọi số nguyên dương r. Khi đó, $f(A \oplus I_r) \le f(A) + r$ suy ra $f(A \oplus I_r) - r \le f(A)$. Từ kết quả này ta thu được dãy số sau:

$$f(A) \ge f(A \oplus I_1) - 1 \ge f(A \oplus I_2) - 2 \ge \cdots \qquad \text{(I)}$$

Định nghĩa 3.1 ([2]). Nếu dãy số (I) tồn tại giới hạn hữu hạn thì nó được gọi là *hạng nhân tử ổn định* của ma trận A và được ký hiệu là $\overline{f}(A)$.

Định lý sau sẽ cho ta một điều kiện cần và đủ để một ma trận tùy ý trên nửa vành cho trước tồn tại hạng nhân tử ổn định không âm.

Định lý 3.2. Cho R là nửa vành, điều kiện cần và đủ để mọi ma trận trên R tồn tại hạng nhân tử ổn định không âm là mọi ma trận đơn vị đều là ma trận đầy.

Chứng minh.

Giả sử mọi ma trận đơn vị đều là ma trận đầy và *A* là một ma trận tùy ý cho trước, với mọi số nguyên dương *r* ta có $f(A\oplus I_r)\geq \max\{f(A),f(I_r)\}\geq f(I_r)=r$ suy ra $f(A\oplus I_r)-r\geq 0$. Vậy dãy số $\{f(A\oplus I_r)-r\}$ là giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên giới hạn $\lim[f(A\oplus I_n)-n]$ tồn tại. Nghĩa là $\overline{f}(A)$ tồn tại và không âm.

Ngược lại, nếu mọi ma trận trên *R* đều có hạng nhân tử ổn định không âm thì chọn một ma trận *A* tùy ý trên *R* và giả sử $\overline{f}(A)=\lim[f(A\oplus I_n)-n]=k$. Theo định nghĩa giới hạn dãy số ta có: Với mọi $\varepsilon\in(0;1)$, tồn tại số nguyên dương *n* sao cho với mọi số nguyên dương $s\geq n$ thì $0\leq f(A\oplus I_s)-s-k<\varepsilon$ (do dãy số $\{f(A\oplus I_r)-r\}$ giảm) suy ra $k\leq f(A\oplus I_s)-s<k+\varepsilon$. Do $f(A\oplus I_s)-s$ là số nguyên nên $f(A\oplus I_s)-s=k$ hay $f(A\oplus I_s)=s+k$ (*).

Bây giờ, ta sẽ chứng minh mọi ma trận đơn vị đều là ma trận đầy. Thật vậy, với mọi số nguyên dương *m*, do $s+m>s\geq n,$ nên theo (*) ta có:

$$f(A\oplus I_s\oplus I_m)=f(A\oplus I_{s+m})=k+s+m.$$

Mặt khác,

$$f(A\oplus I_s\oplus I_m)\leq f(A\oplus I_s)+f(I_m)=k+s+f(I_m).$$

Vậy $f(I_m)+k+s\geq k+s+m$ suy ra $f(I_m)\geq m$, do đó, $f(I_m)=m$.

Mệnh đề sau cho ta một ví dụ về sự tồn tại của lớp các nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều là ma trận đầy.

Mệnh đề 3.3. Cho *R* là nửa vành nguyên phi khả đối, khi đó mọi ma trận đơn vị trên *R* đều là ma trận đầy.

Chứng minh.

Với mọi số nguyên dương *m*, do ma trận (1) là ma trận lũy đẳng nên theo [6, Định lý 3.3] ta có $f(I_m)=mf(1)$. Mặt khác, $f(1)=1$ nên $f(I_m)=m$.□

Tiếp theo, nhóm tác giả sẽ chứng minh một số tính chất đặc trưng của hạng nhân tử ổn định của ma trận trên lớp các nửa vành được đề cập trong Định lý 3.2.

Định nghĩa 3.4 ([2]). Cho *A* là ma trận vuông cấp *n* trên nửa vành *R*, *A* được gọi là *ổn định đầy* nếu *A* có hạng nhân tử ổn định và $\overline{f}(A)=n$.

Nhận xét 3.5. Cho *R* là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều là ma trận đầy. Khi đó,

i) $\overline{f}(A)\leq f(A),\forall A\in M(R).$

ii) Mọi ma trận vuông ổn định đầy đều là ma trận đầy.

Mệnh đề 3.6. Cho *R* là nửa vành, khi đó, mọi ma trận đơn vị đều là ma trận đầy khi và chỉ khi chúng đều là ma trận ổn định đầy.

Chứng minh.

Nếu mọi ma trận đơn vị trên *R* đều là ma trận đầy thì với mọi số nguyên dương *m* ta có:

$$\overline{f}(I_m)=\lim\left(f(I_m\oplus I_r)-r\right)=\lim\left(f(I_{m+r})-r\right).$$

Do $f(I_{m+r})=m+r$ nên

$$\lim\left(f(I_{m+r})-r\right)=\lim(m+r-r)=m.$$

Vậy $\overline{f}(I_m)=m$. Điều ngược lại là hiển nhiên.

Mệnh đề 3.7. Cho *R* là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy. Khi đó, mọi ma trận vuông khả nghịch đều ổn định đầy.

Chứng minh.

Giả sử A là ma trận vuông khả nghịch cấp *n*. Khi đó, với mọi số nguyên dương *m*, $A\oplus I_m$ cũng là ma trận khả nghịch. Nếu $f\left(A\oplus I_m\right)=k<n+m$ thì tồn tại các ma trận $B_{(n+m)\times k},C_{k\times(n+m)}$ sao cho $A\oplus I_m=BC$ suy ra $I_{n+m}=\left(\left(A\oplus I_m\right)^{-1}B\right)C$ suy ra $f\left(I_{n+m}\right)\leq k<n+m$, điều này mâu thuẫn với giả thiết nên $f(A\oplus I_m)=n+m$. Như vậy, $f\left(A\oplus I_m\right)-m=n,\forall m\in\mathbb{N}^*$ suy ra $\overline{f}(A)=\lim\left[f\left(A\oplus I_m\right)-m\right]=n$.

Mệnh đề 3.8. Cho *R* là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy, ma trận vuông A_n là ổn định đầy khi và chỉ khi ma trận $A\oplus I_r$ là ma trận đầy với mọi số nguyên dương *r*.

Chứng minh.

Giả sử ma trận vuông *A* cấp *n* là ổn định đầy và với mọi số nguyên dương *r*. Khi đó, $\overline{f}(A)=n$ suy ra $n\geq f(A)\geq f(A\oplus I_r)-r\geq n$ hay $f(A\oplus I_r)=n+r$. Ngược lại, nếu ma trận $A\oplus I_r$ là ma trận đầy với mọi số nguyên dương *r* thì

$$f\left(A\oplus I_r\right)=n+r\Leftrightarrow f\left(A\oplus I_r\right)-r=n,\forall r\in\mathbb{N}^*$$

suy ra $n=\lim[f(A\oplus I_r)-r]=\overline{f}(A)$.□

Mệnh đề 3.9. Cho *R* là nửa vành thỏa mãn điều kiện: Với mọi ma trận vuông A_n, B_n, nếu $AB=I_n$ thì $BA=I_n$. Khi đó, mọi ma trận khác không đều có hạng nhân tử ổn định dương.

Chứng minh.

Giả sử *M* là một ma trận khác không có cấp $m\times n$. Trước hết, ta chứng minh *M* có hạng nhân tử ổn định. Thật vậy, giả sử I_r là một ma trận đơn vị cấp *r* cho trước và $f\left(I_r\right)=k<r$. Khi đó, tồn tại các ma trận $C_{r\times k},D_{k\times r}$ sao cho $I_r=CD$.

Đặt $C=\begin{pmatrix}C^1_{k\times k}\\ C^2_{(r-k)\times k}\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}D^1_{k\times k} & D^2_{k\times(r-k)}\end{pmatrix}$ suy ra $I_r=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & I_{r-k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C^1D^1 & C^1D^2\\ C^2D^1 & C^2D^2\end{pmatrix}$. Như vậy, $I_k=C^1D^1;I_{r-k}=C^2D^2;C^2D^1=0;C^1D^2=0$. Theo giả thiết ta có $I_k=D^1C^1$ suy ra $I_{r-k}=C^2I_kD^2=(C^2D^1)(C^1D^2)=0,$

điều này vô lý. Vậy $f(I_r)=r$ suy ra ma trận M luôn có hạng nhân tử ổn định không âm.

Giả sử $\overline{f}(M)=0=\lim\left[f\left(M\oplus I_r\right)-r\right]$, do $\left\{f(M\oplus I_r)-r\right\}$ là dãy số nguyên nên theo định nghĩa giới hạn của dãy số, tồn tại số tự nhiên r đủ lớn để $f\left(M\oplus I_r\right)=r$, suy ra tồn tại các ma trận:

$$E_{(m+r)\times r}=\begin{pmatrix}E^1_{m\times r}\\ E^2_{r\times r}\end{pmatrix};F_{r\times(n+r)}=\begin{pmatrix}F^1_{r\times n} & F^2_{r\times r}\end{pmatrix}$$

sao cho $M\oplus I_r=\mathrm{EF}=\begin{pmatrix}E^1F^1 & E^1F^2\\ E^2F^1 & E^2F^2\end{pmatrix}$.

Khi đó, $E^1F^1=M;E^2F^2=I_r;E^1F^2=0;E^2F^1=0$.

Theo giả thiết, ta có $I_r=F^2E^2$ suy ra $M=E^1I_rF^1=(E^1F^2)(E^2F^1)=0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết M là ma trận khác không. Vậy $\overline{f}(M)>0$.□

Mệnh đề 3.10. Cho R là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy. Khi đó, với mọi ma trận A, B ta có:

$$\max\{\overline{f}(A),\overline{f}(B)\}\le\overline{f}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\le\overline{f}(A)+\overline{f}(B).$$

Chứng minh.

Ta có $f\left(A\oplus B\oplus I_r\right)-r\ge f\left(A\oplus I_r\right)-r,\forall r\in\mathbb{N}^*$, lấy giới hạn hai vế khi r dần ra vô cùng ta được bất đẳng thức $\overline{f}\left(A\oplus B\right)\ge\overline{f}(A)$. Chứng minh tương tự ta được:

$$\overline{f}\left(A\oplus B\right)\ge\overline{f}(B),$$

suy ra, $\max\{\overline{f}(A),\overline{f}(B)\}\le\overline{f}\left(A\oplus B\right)$ (1).

Mặt khác,

$f\left(A\oplus B\oplus I_{2r}\right)-2\mathrm{r}\le f(A\oplus I_r)-r+f(B\oplus I_r)-r,\forall r\in\mathbb{N}^*.$

Lấy giới hạn hai vế khi r dần ra vô cùng ta được

$$\overline{f}\left(A\oplus B\right)\le\overline{f}(A)+\overline{f}(B) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\max\{\overline{f}(A),\overline{f}(B)\}\le\overline{f}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\le\overline{f}(A)+\overline{f}(B).\ \square$$

Mệnh đề 3.11. Cho R là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy, $A\in M_{m\times n}(R),B\in M_{n\times p}(R)$. Khi đó, $\overline{f}(AB)\le\min\{\overline{f}(A),\overline{f}(B)\}$.

Chứng minh.

Với mọi $r\in\mathbb{N}^*$, $AB\oplus I_r=\left(A\oplus I_r\right)\left(B\oplus I_r\right)$ suy ra

$$\begin{cases}f\left(AB\oplus I_r\right)\le f(A\oplus I_r)\\ f\left(AB\oplus I_r\right)\le f(B\oplus I_r)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(AB\oplus I_r\right)-r\le f(A\oplus I_r)-r\\ f\left(AB\oplus I_r\right)-r\le f(B\oplus I_r)-r\end{cases}.$$

Lấy giới hạn hai vế của các bất đẳng thức trên khi r tiến ra vô cùng ta đươc, $\begin{cases}\overline{f}(AB)\le\overline{f}(A)\\ \overline{f}(AB)\le\overline{f}(B)\end{cases}$.

Vậy $\overline{f}(AB)\le\min\{\overline{f}(A),\overline{f}(B)\}$. □

Mệnh đề 3.12. Cho R là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy, A và B là các ma trận cùng cấp $m\times n$. Khi đó, $\overline{f}(A+B)\le\min\{\overline{f}(A),\overline{f}(B),m,n\}$.

Chứng minh.

Rõ ràng $\overline{f}(A+B)\le\min\{m,n\}$. Với mọi số nguyên dương r ta có $(A+B)\oplus I_r=\left(A\oplus I_r\right)+\left(B\oplus 0\right)$ suy ra $f\left((A+B)\oplus I_r\right)\le f(A\oplus I_r)$. Do đó,

$$\begin{aligned}\overline{f}(A+B)&=\lim\left[f\left((A+B)\oplus I_r\right)-r\right]\\ &\le\lim\left[f(A\oplus I_r)-r\right]=\overline{f}(A).\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được $\overline{f}(A+B)\le\overline{f}(B)$. Vậy $\overline{f}(A+B)\le\min\{\overline{f}(A),\overline{f}(B),m,n\}$. □

Mệnh đề 3.13. Cho R là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy, A và B là hai ma trận lũy đẳng, nếu $A\cong B$ thì $\overline{f}(A)=\overline{f}(B)$.

Chứng minh.

Do $A\cong B$ nên $A\oplus I_r\cong B\oplus I_r,\forall r\in\mathbb{N}^*$. theo Mệnh đề 2.11 ta có $f(A\oplus I_r)=f(B\oplus I_r),\forall r\in\mathbb{N}^*$ hay $f(A\oplus I_r)-r=f(B\oplus I_r)-r,\forall r\in\mathbb{N}^*$ (1). Do R là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy nên $\overline{f}(A)$ và $\overline{f}(B)$ đều tồn tại. Do đó, lấy giới hạn hai vế của (1) khi r tiến ra vô cùng ta được $\overline{f}(A)=\overline{f}(B)$. □

Kết quả sau đây cho ta một đặc trưng khác của hạng nhân tử ổn định, nhờ vào sự thác triển của phiếm hàm tuyến tính trên vị nhóm *V(R)* các lớp tương đương của các ma trận lũy đẳng trên nửa vành *R*. Ta biết rằng, trên nửa vành *R* mà mọi ma trận đơn vị đều đầy, hai ma trận lũy đẳng tương đương nhau thì hạng nhân tử ổn định của chúng bằng nhau nên ánh xạ $\rho:V(R)\to\mathbb{R}^+$ được xác định bởi $\rho([A])=\overline{f}(A)$ là một phiếm hàm trên vị nhóm *V(R)* (với *[A]* là lớp tương đương của ma trận lũy đẳng A). Để thuận tiện cho việc trình bày, ta gọi ρ là *phiếm hàm hạng nhân tử ổn định* trên *V(R)* và cũng viết là $\overline{f}$.

Định lý 3.14. Cho R là nửa vành mà trên đó mọi ma trận đơn vị đều đầy. Khi đó, $\overline{f}(I_n)=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ khi và chỉ khi tồn tại một phiếm hàm tuyến tính λ trên vị nhóm *V(R)* sao cho $\lambda([A])\le\overline{f}([A]),\forall\ [A]\in V(R)$ và $\lambda([(1)])=1$.

Chứng minh.

Nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính λ trên vị nhóm *V(R)* sao cho $\lambda([A])\le\overline{f}([A]),\forall\ [A]\in V(R)$ và $\lambda([(1)])=1$. Khi đó, với mọi số nguyên dương m ta có $m=\lambda([I_m])\le\overline{f}([I_m])=\overline{f}(I_m)\le m$ suy ra $\overline{f}(I_m)=m$.

Ngược lại, giả sử $\overline{f}(I_n)=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Theo Mệnh đề 3.10 ta có $\overline{f}$ là phiếm hàm lồi trên vị nhóm *V(R)*, do đó, chính quy hóa của nó $\overline{f}^*$ là một phiếm hàm dưới tuyến tính trên *V(R)*. Đặt $\mathrm{U}=\langle[(1)]\rangle$ là vị nhóm con của *V(R)* được sinh bởi phần tử *[(1)]*. Với mọi phần tử *n[(1)], m[(1)]* của U ta có:

$$\overline{f}(m[(1)]+n[(1)]) = \overline{f}([I_m]+[I_n]) = \overline{f}([I_{m+n}])$$
$$= \overline{f}(I_{m+n}) = m+n = \overline{f}(m[1]) + \overline{f}(n[1]).$$

Vậy $\overline{f}$ là phiếm hàm tuyến tính trên vị nhóm con U suy ra $\overline{f}^*$ cũng là phiếm hàm tuyến tính trên U. Áp dụng Định lý 2.9, tồn tại phiếm hàm tuyến tính λ trên *V(R)* thỏa mãn:

$$\lambda|_U = \overline{f}^*|_U$$

và $\lambda([A]) \le \overline{f}^*([A]) \le \overline{f}([A]), \forall\ [A] \in V(R).$

Mặt khác, do $[(1)] \in$ U nên

$$\lambda([(1)]) = \overline{f}^*([(1)]) = \lim \frac{1}{n}\overline{f}(n[(1)])$$
$$= \lim \frac{1}{n}\overline{f}([I_n]) = \lim \frac{1}{n}\overline{f}(I_n) = \lim \frac{1}{n} n = 1. \ \square$$

4. Kết luận

Bài báo đã đạt được một số kết quả sau đây:

+ Chứng minh được điều kiện cần và đủ của nửa vành mà trên đó mọi ma trận đều có hạng nhân tử ổn định không âm, được thể hiện ở Định lý 3.2, và chỉ ra một lớp nửa vành khá rộng thỏa mãn điều kiện này, thể hiện ở Mệnh đề 3.3.

+ Chứng minh một số tính chất đặc trưng về hạng nhân tử ổn định của ma trận trên nửa vành, được thể hiện qua các mệnh đề: Mệnh đề 3.6, Mệnh đề 3.7, Mệnh đề 3.8, Mệnh đề 3.9, Mệnh đề 3.10, Mệnh đề 3.11, Mệnh đề 3.12, Mệnh đề 3.13 và Định lý 3.14.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. M. Cohn, "Rank functions on rings", *J. Algebra.*, vol. 133, no. 3, 1990, pp. 373–385.

[2] P. M. Cohn, *Free ideal rings and localization in general rings*. Cambridge university press., 2006.

[3] M. Akian, S. Gaubert and A. Guterman, "Linear independence over tropical semirings and beyond", *Trop. idempotent Math. Contemp. Math.*, vol. 495, 2009, pp. 1–38.

[4] J. S. Golan, *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.

[5] Y. Katsov, T. G. Nam, and J. Zumbrägel, "On congruence-semisimple semirings and the K0-group characterization of ultramatricial algebras over semifields", *J. Algebra.*, vol. 508(2), 2018, pp. 157–195.

[6] H. C. Công, "Hạng nhân tử của ma trận lũy đẳng trên nửa vành nguyên phi khả đối", *Tạp chí khoa học Tài chính Kế toán*, vol. 14, 2018, pp. 98–102.

[7] L. R. B. Beasley and A. E. Guterman, "Rank inequalities over semirings", *J. Korean Math. Soc.*, vol. 42, no. 2, 2005, pp. 223–241.