# TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ĐẶT CHỈNH LEVITIN-POLYAK CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI MỨC VECTƠ YẾU

# STABILITY AND LEVITIN-POLYAK WELL-POSEDNESS FOR BILEVEL WEAK VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS

**Hà Anh Tuấn**[1], **Nguyễn Thị Kiến Trúc**[2], **Nguyễn Văn Hưng**[3*]

[1]*Trường Đại học Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh*

[2]*Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh*

[3]*Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông TP. Hồ Chí Minh*

[*]Tác giả liên hệ: nvhung@ptithcm.edu.vn

(Nhận bài: 04/02/2021; Chấp nhận đăng: 07/5/2021)

**Tóm tắt -** Trong bài báo này, đầu tiên, nhóm tác giả xét bài toán cân bằng vectơ hai mức yếu. Bài toán cân bằng vectơ hai mức yếu chứa nhiều bài toán như các trường hợp đặc biệt như bài toán quy hoạch với ràng buộc bất đẳng thức biến phân, bài toán tối ưu vectơ với ràng buộc bất đẳng thức biến phân, bài toán mạng giao thông với ràng buộc bất đẳng thức biến phân, bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc cân bằng, bài toán tối ưu hai mức và bài toán bất đẳng thức hai mức. Sau đó, thiết lập khái niệm đặt chỉnh Levitin–Polyak cho bài toán cân bằng hai mức vectơ yếu. Cuối cùng, nhóm tác giả chứng tỏ rằng, với một số điều kiện phù hợp, sự tương đương giữa tính chất đặt chỉnh Levitin–Polyak và sự tồn tại của các tập nghiệm của bài toán cân bằng hai mức vectơ yếu là được giới thiệu và nghiên cứu. Một ví dụ được đưa ra minh họa cho các kết quả của nhóm tác giả.

**Từ khóa -** Bài toán cân bằng vectơ hai mức; đặt chỉnh Levitin–Polyak; đặt chỉnh Levitin–Polyak tổng quát.

**Abstract -** In this paper, we first consider the bilevel weak vector equilibrium problems. These problems contain many problems as special cases, including mathematical program problems with variational inequality constraints, vector optimization problems with variational inequality constraints, traffic network problems with variational inequality constraints, variational inequality problems with equilibrium constraints, bilevel optimization problems, bilevel variational inequality problems. Then, we study concepts of Levitin-Polyak well-posedness for bilevel weak vector equilibrium problems. Finally, we show that, under suitable conditions, the equivalence between the Levitin-Polyak well-posedness properties and the existence of solutions for bilevel weak vector equilibrium problems is given. An example is given for the illustration of our results.

**Key words -** Bilevel equilibrium problems; Levitin-Polyak well-posedness; Levitin-Polyak well-posedness in the generalized sense.

## 1. Giới thiệu

Bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng đã được giới thiệu và nghiên cứu bởi Mordukhovich [1] năm 2004. Bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng chứa nhiều bài toán liên quan bao gồm bài toán tối ưu hai mức, bài toán quy hoạch hai mức, bài toán bất đẳng thức biến phân hai mức và nhiều bài toán khác. Trong những năm gần đây, bài toán cân bằng hai mức đã được quan tâm bởi nhiều nhà nghiên cứu với các chủ đề như điều kiện tồn tại (xem [2, 3]), tính chất ổn định nghiệm (xem [4, 5]), tính đặt chỉnh (xem [6, 7]) và các tài liệu tham khảo ở trong đó.

Tính đặt chỉnh là một khái niệm quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Khái niệm đặt chỉnh cho bài toán tối ưu không ràng buộc đã được giới thiệu đầu tiên bởi Tikhonov [8] trong năm 1966, và được biết đến như là đặt chỉnh Tikhonov. Cuối năm 1966, Levitin và Polyak [9] đã giới thiệu khái niệm đặt chỉnh cho bài toán tối ưu ràng buộc như là sự mở rộng khái niệm của đặt chỉnh Tikhonov và cũng được biết đến như là đặt chỉnh Levitin-Polyak. Gần đây, đặt chỉnh Levitin-Polyak đã được quan tâm cho bài toán tối ưu (xem, [10]), bài toán bất đẳng thức biến phân (xem, [11, 12]). Rất gần đây, Anh và Hung [6] đã nghiên cứu khái niệm của loại đặt chỉnh Levitin–Polyak cho bài toán cân bằng hai mức vectơ loại mạnh. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của nhóm tác giả, hiện tại các kết quả nghiên cứu về mối quan hệ giữa tính đặt chỉnh Levitin–Polyak và sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng hai mức vectơ yếu vẫn chưa được nghiên cứu. Xuất phát từ các ý tưởng như được đã được đề cập, trong bài viết này, nhóm tác giả sẽ thiết lập tính đặt chỉnh Levitin–Polyak cho bài toán cân bằng hai mức vectơ loại yếu.

## 2. Mô hình bài toán và kiến thức bổ trợ

Cho X, W, Z, P là các không gian Banach, A và $\Lambda$ tương ứng là các tập con khác rỗng của X và W, $C_2 \subset P$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng $\operatorname{int} C_2 \neq \varnothing$ và $Y = A \times \Lambda$, $h: Y \times Y \to P$ là một hàm vectơ. Khi đó, *bài toán cân bằng hai mức vectơ loại yếu* được thiết lập như sau:

(WBVEP): Tìm $\bar{x}^* \in graph Q^{-1}$ sao cho

$$h(\bar{x}^*, y^*) \notin -\operatorname{int} C_2, \forall y^* \in graph Q^{-1}$$

Trong đó, $Q(\lambda)$ là tập nghiệm của bài toán tựa cân bằng véctơ phụ thuộc tham số như sau: tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho $f(\bar{x}, y, \lambda) \notin -\operatorname{int} C_1, \forall y \in K_2(\bar{x}, \lambda)$, với $C_1 \subset Z$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh với $\operatorname{int} C_1 \neq \varnothing$, $K_i : A \times \Lambda \rightrightarrows A, i = 1, 2$

[1] Ho Chi Minh City University of Transport (Ha Anh Tuan)

[2] Ho Chi Minh City University of Technology (Nguyen Thi Kien Truc)

[3] Posts and Telecommunications Institute of Technology (Nguyen Van Hung)

là các ánh xạ đa trị, $f: A\times A\times\Lambda\to Z$ là một hàm vectơ, $graphQ^{-1}$ ký hiệu là đồ thị của $Q^{-1}$, nghĩa là, $graphQ^{-1}:=\{(x,\lambda): x\in Q(\lambda)\}$.

Tập $\Phi$ được ký hiệu là tập nghiệm của (WBVEP), và được định nghĩa bởi:

$$\Phi=\{\bar{x}^*=(\bar{x},\lambda)\in graphQ^{-1}\,\big|\, f(\bar{x},y,\lambda)\notin -\operatorname{int}C_1,\ \forall y\in K_2(\mathrm{x},\lambda)$$

và $h(\bar{x}^*,y^*)\notin -\operatorname{int}C_2, \forall y^*=(y,\lambda)\in graphQ^{-1}\}$.

Tiếp theo, sẽ trình bày lại một số kiến thức bổ trợ, cụ thể như sau:

**Định nghĩa 2.1.** (xem [13, 14]) Giả sử *X*, *Y* là hai không gian vectơ tôpô, $F: X\rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và $x_0\in X$ là một điểm cho trước.

(i) $F$ được gọi là *nửa liên tục dưới (l.s.c) tại* $x_0$ nếu $F(x_0)\cap U\neq\varnothing$ với một tập mở $U\subseteq Y$ thì sẽ tồn tại một lân cận V của $x_0$ sao cho $F(x)\cap U\neq\varnothing, \forall x\in V\cap domF$,
$domF:=\{x\in X\,|\,F(x)\neq\varnothing\}$.

(ii) $F$ được gọi là *nửa liên tục trên (u.s.c) tại* $x_0$ nếu với mọi tập mở $U\supseteq F(x_0)$ thì tồn tại một lân cận $V$ của $x_0$ sao cho $U\supseteq G(x), \forall x\in V$..

(iii) $F$ được gọi là *liên tục tại* $x_0$ nếu $F$ vừa nửa liên tục dưới, vừa nửa liên tục trên tại $x_0$.

(iv) $F$ được gọi là *đóng tại* $x_0\in\operatorname{dom}F$ nếu với mọi lưới $\{x_\alpha\}$ trong *X* hội tụ về $x_0$ và $\{y_\alpha\}$ trong *Y* hội tụ về $y_0$ sao cho $y_\alpha\in F(x_\alpha)$, thì ta có $y_0\in F(x_0)$.

**Mệnh đề 2.2.** (xem [13, 14]) Giử sử X, Y là hai không gian vectơ tôpô, $F: X\rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị, và $x_0\in X$ là một điểm cho trước.

*(i) Nếu F là u.s.c tại $x_0$ và $F(x_0)$ đóng, thì F là đóng tại $x_0$.*

*(ii) Nếu $F$ nhận các giá trị compắc, thì $F$ là u.s.c tại $x_0$ nếu và chỉ nếu với mọi lưới $\{x_\alpha\}\subset X$ mà hội tụ về $x_0$ và với mọi lưới $\{y_\alpha\}\subset F(x_\alpha)$, thì tồn tại $y\in F(x)$ và một lưới con $\{y_\beta\}$ của $\{y_\alpha\}$ sao cho $y_\beta\to y$.*

## 3. Các kết quả chính

Đầu tiên, nhóm tác giả giới thiệu các khái niệm Levitin–Polyak và Levitin–Polyak tổng quát cho bài toán cân bằng hai mức vectơ yếu.

**Định nghĩa 3.1.** Một dãy $\{\mathrm{x}_n^*\}:=\{(x_n,\lambda_n)\}$ được gọi là một *dãy xấp xỉ Levitin–Polyak* cho bài toán (WBVEP), nếu

(i) $\{\mathrm{x}_n^*\}:=\{(x_n,\lambda_n)\}\subseteq \mathrm{A}\times\Lambda, \forall \mathrm{n}\in N$;

(ii) Tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\}\subset R_+$ hội tụ về 0 sao cho

$d(x_n,K_1(x_n,\lambda_n))\le\varepsilon_n, \forall \mathrm{n}\in N$,

$f(x_n,y,\lambda_n)+\varepsilon_n e_1\notin -\operatorname{int}C_1, \forall \mathrm{y}\in K_2(x_n,\lambda_n)$, và

$\mathrm{h}(\mathrm{x}_n^*,y^*)+\varepsilon_n e_2\notin -\operatorname{int}C_2, \forall \mathrm{y}^*\in graphQ^{-1}$,

trong đó, $d(a,M):=\inf_{b\in M} d(a,b)$ là khoảng các từ điểm đến tập, $e_1\in\operatorname{int}C_1$ và $e_2\in\operatorname{int}C_2$.

**Định nghĩa 3.2.** Bài toán (WBVEP) được gọi là *đặt chỉnh Levitin–Polyak*, nếu:

(i) Bài toán (WBVEP) có nghiệm duy nhất $\mathrm{x}_0^*$;

(ii) Với mỗi dãy xấp xỉ Levitin–Polyak $\{\mathrm{x}_n^*\}$ cho (WBVEP) hội tụ về nghiệm duy nhất $\mathrm{x}_0^*$.

**Định nghĩa 3.3.** Bài toán (WBVEP) được gọi là *đặt chỉnh Levitin–Polyak tổng quát*, nếu

(i) Tập nghiệm $\Phi$ của (WBVEP) khác rỗng.

(ii) Với mỗi dãy xấp xỉ Levitin–Polyak $\{\mathrm{x}_n^*\}$ cho bài toán (WBVEP), có một dãy con hội tụ đến một số điểm của $\Phi$.

Với mỗi $\lambda\in\Lambda, e_1\in\operatorname{int}C_1, e_2\in\operatorname{int}C_2$ và một số thực dương $\varepsilon$, tập nghiệm xấp xỉ của (WBVEP) được ký hiệu bởi $\tilde{\Phi}(\varepsilon)$ như sau:

$$\tilde{\Phi}(\varepsilon):=\{\bar{x}^*\in K_1(\bar{x},\lambda)\times\Lambda: f(\bar{x},y,\lambda)+\varepsilon e_1\notin -\operatorname{int}C_1, \forall \mathrm{y}\in K_2(\bar{x},\lambda)$$

và $\mathrm{h}(\bar{x}^*,y^*)+\varepsilon e_2\notin -\operatorname{int}C_2, \forall \mathrm{y}^*\in graphQ^{-1}\}$.

Chúng ta dễ thấy rằng, với mỗi $\varepsilon>0$, $\tilde{\Phi}(0)=\Phi$ và $\Phi\subseteq\tilde{\Phi}(\varepsilon)$.

**Bổ đề 3.4.** *Giả sử cho bài toán (WBVEP) và các giả thiết sau đây thỏa mãn*

*(i) $K_1$ đóng trên $A\times\Lambda$, và $K_2$ liên tục dưới trên $A\times\Lambda$;*

*(ii) f liên tục trên $A\times A\times\Lambda$;*

*(iii) h liên tục trên $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}$.*

*Khi đó, $\tilde{\Phi}(\varepsilon)$ là một tập đóng, với mọi $\varepsilon>0$.*

*Chứng minh.* Cho $\mathrm{x}_n^*=(x_n,\lambda_n)\in\tilde{\Phi}(\varepsilon)$ sao cho $\mathrm{x}_n^*\to x^*=(x_0,\lambda_0)$. Vì $K_1$ đóng, nên ta suy ra rằng $x_0\in K_1(x_0,\lambda_0)$. Bây giờ chúng ta chứng tỏ $x^*\in graphQ^{-1}$, nghĩa là, $x_0\in Q(\lambda_0)$. Nếu $x_0\notin Q(\lambda_0)$ thì tồn tại $y_0\in K_2(x_0,\lambda_0)$ sao cho $f(x_0,y_0,\lambda_0)+\varepsilon e_1\in -\operatorname{int}C_1$.

Do $K_2$ là l.s.c tại $(x_0,\lambda_0)$, nên tồn tại $y_n\in K_2(x_n,\lambda_n)$ sao cho $y_n\to y_0$. Vì $x_n\in Q(\lambda_n)$, nên với mọi $\varepsilon>0$, ta có

$f(x_n,y_n,\lambda_n)+\varepsilon e_1\notin -\operatorname{int}C_1$.

Lấy $id_1: \operatorname{int}R_+\to\operatorname{int}R_+$ là ánh xạ đồng nhất. Do $f$ liên tục tại $(x_0,y_0,\lambda_0)$, và $id_1$ liên tục, nên ta suy ra rằng $f+id_1$ liên tục tại $(x_0,y_0,\lambda_0,\varepsilon)$. Vì vậy, ta có:

$f(x_0,y_0,\lambda_0)+\varepsilon e_1\notin -\operatorname{int}C_1$,

điều này là mâu thuẫn. Do đó: $x^*=(x_0,\lambda_0)\in graphQ^{-1}$.

Tiếp theo, chúng ta chứng tỏ rằng $x^*\in\tilde{\Phi}(\varepsilon)$. Nếu $x^*\notin\tilde{\Phi}(\varepsilon)$, thì với mọi $\varepsilon>0$ sao cho:

$d(x_0^*,K_1(x_0,\lambda_0)\times\Lambda)>\varepsilon$,

tồn tại $y_0^*\in graphQ^{-1}$ thỏa mãn

$$h(x_0^*, y_0^*) + \varepsilon e_2 \in -\text{int}\, C_2.$$

Vì $x_n^* \in \tilde{\Phi}(\varepsilon)$, nên với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$d(x_n^*, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon,$$

và $\forall y_n^* \in graphQ^{-1}$ thỏa mãn

$$h(x_n^*, y_n^*) + \varepsilon e_2 \notin -\text{int}\, C_2.$$

Lấy $id_2 : \text{int}\, R_+ \to \text{int}\, R_+$ là ánh xạ đồng nhất. Vì $h$ liên tục tại $(x_0^*, y_0^*)$, và $id_2$ liên tục, nên ta suy ra rằng $h + id_2$ liên tục tại $(x_0^*, y_0^*, \varepsilon)$. Do đó, ta có

$$d(x_0^*, K_1(x_0, \lambda_0) \times \Lambda) \leq \varepsilon,$$

và $h(x_0^*, y_0^*) + \varepsilon e_2 \notin -\text{int}\, C_2$.

Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy $x^* \in \tilde{\Phi}(\varepsilon)$. Do đó, $\tilde{\Phi}(\varepsilon)$ đóng trên. □

**Bổ đề 3.5.** *Giả sử rằng A compắc và tất cả các điều kiện trong Bổ đề 3.4 được thỏa mãn. Khi đó, $\Phi$ là một tập đóng. Ngoài ra, $\Phi$ là một tập compắc.*

*Chứng minh.* Chứng minh này tương tự như Bổ đề 3.4.

**Định lí 3.6.** *Giả sử tất cả các điều kiện trong Bổ đề 3.5 được thỏa mãn. Khi đó, bài toán (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát khi và chỉ khi $\Phi$ là một tập compắc của A và $\tilde{\Phi}$ là nửa liên tục trên tại 0.*

*Chứng minh.* Đầu tiên, giả sử $\Phi$ là tập compắc của A và $\tilde{\Phi}$ là u.s.c tại 0, chúng ta sẽ chứng minh bài toán (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát. Thật vậy, lấy $\{x_n^*\}$ là một dãy xấp xỉ Levitin-Polyak của (WBVEP). Khi đó, tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subseteq \text{int}\, R_+$ với $\varepsilon_n \to 0$ sao cho:

$$d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \forall n \in N,$$

$$f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1 \notin -\text{int}\, C_1, \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n),$$

và $h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2 \notin -\text{int}\, C_2, \forall y^* \in graphQ^{-1}$.

Vì vậy, $x_n^* \in \tilde{\Phi}(\varepsilon_n)$. Vì $\Phi = \tilde{\Phi}(0)$ compắc và $\tilde{\Phi}$ nửa liên tục trên 0, nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}^*\}$ của $\{x_n^*\}$ hội tụ đến một số điểm $x_0^* \in \tilde{\Phi}(0)$. Vì vậy, bài toán (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát.

Chiều ngược lại, chúng ta giả sử rằng bài toán (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát. Khi đó, $\Phi = \tilde{\Phi}(0)$ là một tập compắc. Lấy $\{\varepsilon_n\} \subseteq \text{int}\, R_+$ là một dãy tùy ý với $\varepsilon_n \to 0$ và $x_n^* \in \tilde{\Phi}(\varepsilon_n)$, ta có

$$d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \forall n \in N,$$

$$f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1 \notin -\text{int}\, C_1, \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n),$$

và $h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2 \notin -\text{int}\, C_2, \forall y^* \in graphQ^{-1}$.

Do đó, ta thấy rằng, $\{x_n^*\}$ là một dãy xấp xỉ Levitin-Polyak của (WBVEP). Bởi vì tính đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát của (WBVEP), $\{x_n^*\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}^*\}$ của $\{x_n^*\}$ hội tụ đến một số điểm của $\Phi = \tilde{\Phi}(0)$. Vì vậy, $\tilde{\Phi}$ nửa liên tục trên tại 0.

Bây giờ, trình bày đặc trưng mêtric cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak theo hành vi của tập nghiệm xấp xỉ, trong đó diamA là đường kính của A được định nghĩa bởi $diamA = \sup\{d(a,b) = \|a-b\| : a, b \in A\}$.

**Định lí 3.7.** *Giả sử rằng*

*(i) $K_1$ đóng trên $A \times \Lambda$, và $K_2$ nửa liên tục dưới trên $A \times \Lambda$;*

*(ii) f liên tục trên $A \times A \times \Lambda$;*

*(iii) h liên tục trên $Y \times Y$.*

*Khi đó,* (WBVEP) *đặt chỉnh Levitin-Polyak khi và chỉ khi $\tilde{\Phi}(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$ và $diam\tilde{\Phi}(\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$.*

*Chứng minh.* Nếu (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak. Khi đó (WBVEP) có một nghiệm duy nhất $x_0^* \in \Phi$ và do đó $\tilde{\Phi}(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$ khi $\Phi \subseteq \tilde{\Phi}(\varepsilon)$. Nếu $diam\tilde{\Phi}(\varepsilon) \not\to 0$ khi $\varepsilon \to 0$, khi đó, tồn tại $\rho > 0$ và $\varepsilon_n > 0$ sao cho $\varepsilon \to 0$ và $diam\tilde{\Phi}(\varepsilon_n) > \rho > 0, \forall n \in N$.

Khi đó, tồn tại $x_n^{*1} = (x_n^1, \lambda_n^1), x_n^{*2} = (x_n^2, \lambda_n^2) \in \tilde{\Phi}(\varepsilon_n)$ sao cho $d(x_n^{*1}, x_n^{*2}) > \dfrac{\rho}{2}$.

Vì $x_n^{*1} = (x_n^1, \lambda_n^1), x_n^{*2} = (x_n^2, \lambda_n^2) \in \tilde{\Phi}(\varepsilon_n)$, nên chúng ta suy ra từ định nghĩa của $\tilde{\Phi}(\varepsilon_n)$ rằng $x_n^{*1}$ và $x_n^{*2}$ là các dãy xấp xỉ Levitin-Polyak cho bài toán (WBVEP). Do đó, các dãy $\{x_n^{*1}\}$ và $\{x_n^{*2}\}$ hội tụ đến nghiệm duy nhất $x_0^*$ của bài toán (WBVEP), điều này mâu thuẫn với thực tế rằng $d(x_n^{*1}, x_n^{*2}) > \dfrac{\rho}{2} > 0, \forall n.$

Chiều ngược lại, ta lấy $\{x_n^*\}$ là một dãy xấp xỉ Levitin-Polyak cho bài toán (WBVEP). Khi đó, tồn tại $\{\varepsilon_n\} \subseteq \text{int}\, R_+$ với $\varepsilon_n \to 0$ sao cho:

$$d(x_n, K_1(x_n, \lambda_n)) \leq \varepsilon_n, \forall n \in N,$$

$$f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e_1 \notin -\text{int}\, C_1, \forall y \in K_2(x_n, \lambda_n),$$

và $h(x_n^*, y^*) + \varepsilon_n e_2 \notin -\text{int}\, C_2, \forall y^* \in graphQ^{-1}$.

Điều này suy ra rằng $x_n^* \in \tilde{\Phi}(\varepsilon_n)$. Vì $diam\tilde{\Phi}(\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$, ta suy ra rằng $\{x_n^*\}$ là một dãy Cauchy và hội tụ đến điểm $x_0^*$. Bởi tính đóng của $K_1$ tại $(x_0, \lambda_0)$, do đó $x_0 \in K_1(x_0, \lambda_0)$. Chứng minh tương tự như Bổ đề 3.4, ta cũng suy ra rằng $x_0^* \in \Phi$.

Bây giờ chứng tỏ rằng (WBVEP) có nghiệm duy nhất. Thật vậy, nếu $\Phi$ có hai nghiệm khác nhau $x_1^*$ và $x_2^*$, không khó để thấy $x_1^*, x_2^* \in \tilde{\Phi}(\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.

Khi đó, ta suy ra $0 < d(x_1^*, x_2^*) \leq diam\tilde{\Phi}(\varepsilon) \to 0$, điều này là không thể. Do đó, bài toán (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak. □

Ví dụ sau chứng tỏ tính duy nhất của đặt chỉnh Levitin-Polyak trong Định lí 3.7 là quan trọng.

**Ví dụ 3.8.** Lấy $X = Z = P = R, C_1 = C_2 = C = R_+$, $A = \left[0, \dfrac{5}{2}\right], \Lambda = [0,1], \lambda_0 = 0, \varepsilon > 0, e_1 \in \text{int}\, C_1, e_2 \in \text{int}\, C_2$

và $K_1, K_2 : A\times\Lambda \to 2^A,\ f : A\times A\times\Lambda \to Z,\ h : Y\times Y \to P$ được xác định bởi:

$$K_1(x,\lambda) = \left[0, \frac{1}{2}\right], K_2(x,\lambda) = [0,1],$$

$$h(x^*, y^*) = h((x,\lambda_1),(y,\lambda_2)) = (x^2+y^2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2),$$

$$f(x,y,\lambda) = \{3^{\lambda^2+2\lambda+1} + \varepsilon\}, \forall \varepsilon > 0.$$

Ta tính toán được rằng $Q(\lambda) = \left[0, \frac{1}{2}\right], \forall\lambda \in [0,1]$, do đó:

$$graphQ^{-1} = \{(\mu,\lambda) | \mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \lambda \in [0,1]\}.$$

Với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\{x \in A : d(x, K_1(x,\lambda)) \le \varepsilon\} = \begin{cases} [0,\varepsilon], khi\, 0<\varepsilon \le \dfrac{1}{2} \\ \left[0, \dfrac{1}{2}\right], khi\, \varepsilon > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$ Với

mọi $x \in [0,\varepsilon]$, nếu $0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}$ và $x \in [0,1]$, nếu $\varepsilon > 1/2$, ta có thể thấy:

$$f(x,y,\lambda) + \varepsilon e_1 \notin -\operatorname{int} C_1, \forall y \in K_2(x,\lambda)$$

và $h(x^*, y^*) + \varepsilon e_2 \notin -\operatorname{int} C_2, \forall y^* \in graphQ^{-1}$

Do đó, ta có

$$\tilde{\Phi}(\varepsilon) := \{x^* = (x,\lambda) \in graphQ^{-1} : d(x, K_1(x,\lambda)) \le \varepsilon$$

thỏa mãn $f(x,y,\lambda) + \varepsilon e_1 \notin -\operatorname{int} C_1, \forall y \in K_2(x,\lambda)$,

và $h(x^*, y^*) + \varepsilon e_2 \notin -\operatorname{int} C_2, \forall y^* \in graphQ^{-1}\}$

$$= \begin{cases} (\mu,\lambda) | \mu \in [0,\varepsilon], \lambda \in [0,1], khi\, 0 < \varepsilon \le \dfrac{1}{2}, \\ (\mu,\lambda) \left| \mu \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \lambda \in [0,1], khi\, \varepsilon > \dfrac{1}{2}. \right. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng, tất cả các điều kiện của Định lí 3.7 được thỏa mãn, và vì vậy (WBVEP) là đặt chỉnh Levitin-Polyak. Tuy nhiên, với mọi $\varepsilon > \frac{1}{2}$, $diam\tilde{\Phi}(\varepsilon) \not\to 0$ khi $\varepsilon \to 0$.

## 4. Kết luận

Trong công trình này, nhóm tác giả đã nghiên cứu một lớp bài toán cân bằng hai mức vectơ yếu. Sau đó, thiết lập sự tương đương giữa tính đặt chỉnh Levitin-Polyak và sự tồn tại nghiệm của bài toán này. Ngoài ra, đặc trưng mêtric của nghiệm xấp xỉ cũng được thiết lập. Như đã đề cập ở phần giới thiệu, đến thời điểm hiện tại chưa có bài báo nào nghiên cứu sự tương đương giữa tính đặt chỉnh Levitin-Polyak và sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng hai mức vectơ yếu. Vì vậy các kết quả của nhóm tác giả trong bài báo này là mới và khác với các kết quả trong tài liệu tham khảo.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Mordukhovich B.S, "Equilibrium problems with equilibrium constraints via mul-tiobjective optimization". *Optim. Methods Softw*. 19, 2004, 479-492.

[2] Hung N.V., O'Regan D, "Bilevel equilibrium problems with lower and upper bounds in locally convex Hausdorff topological vector spaces", *Topology Appl*. 269, 2020, DOI:10.1016/j.topol.2019.106939.

[3] Hung N.V., Tri V.V., O'Regan D, "Existence conditions for solutions of bilevel vector equilibrium problems with application to traffic network problems with equilibrium constraints", *Positivity*, 25, 2021, 213-228.

[4] Anh L.Q., Hung N.V, "Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems", *Comp. Appl. Math.*, 37, 2018, 1537-1549.

[5] Hung N.V., Hai N.M, "Stability of approximating solutions to parametric bilevel vector equilibrium problems and applications". *Comput. Appl. Math*. 38, 2019, 1-17.

[6] Anh L.Q., Hung N.V, "Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints", *Positivity*. 22, 2018, 1223-1239.

[7] Fang Y.P., Hu R, Huang N.J, "Well-posedness for equilibrium problems and for optimization problems with equilibrium constraints", *Comput. Math. Appl*. 55, 2008, 89-100.

[8] Tikhonov A.N, "On the stability of the functional optimization problem", *Soviet Comput. Math. Math. Phys*. 6, 1966, 28-33.

[9] Levitin E.S., Polyak B.T, "Convergence ofminimizing sequences in conditional extremum problem", *Sov. Math. Doklady*, 7, 1966, 764-767.

[10] Morgan J., Scalzo V, "Discontinuous but well-posed optimization problems", *SIAM J. Optim*. 17, 2006, 861-870.

[11] Fang Y.P., Hu, R, "Parametric well-posedness for variational inequalities defined bifunctions", *Computers Math. Appl.*, 53, 2007, 1306-1316.

[12] Hung N.V, "Generalized Levitin-Polyak well-posedness for controlled systems of FMQHI-fuzzy mixed quasi-hemivariational inequalities of Minty type", *J. Comput. Appl. Math*. 386, 2021, 113263.

[13] Anh L.Q., Hung N.V, "Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems", *J. Ind. Manag. Optim.*, 14, 2018, 65-79.

[14] Aubin J.P., Frankowska H, *Set-valued Analysis*. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1990.