# SÁNG TẠO BÀI TOÁN MỚI DỰA TRÊN BẤT ĐẲNG THỨC VỀ ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CỦA HÀM LỒI VÀ HÀM LÕM

## CREATING NEW PROBLEMS BASED ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT INEQUALITIES OF CONVEX AND CONCAVE FUNCTIONS

**Huỳnh Đức Vũ[1], Phạm Quý Mười[2*]**

[1]*Trường THPT Phạm Văn Đồng, huyện Mộ Đức, Quảng Ngãi*

[2]*Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng*

[*]Tác giả liên hệ: pqmuoi@ued.edu.vn

(Nhận bài: 22/2/2021; Chấp nhận đăng: 17/7/2021)

**Tóm tắt -** Lý thuyết về hàm lồi và hàm lõm được nghiên cứu và ứng dụng nhiều trong lí thuyết tối ưu, chứng minh bất đẳng thức và trong nhiều lĩnh vực khác. Trong bài báo này, nhóm tác giả đề xuất các ý tưởng và phương pháp để tạo ra các bài toán mới về bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất và tìm giá trị bé nhất. Nghiên cứu dựa trên bất đẳng thức về điều kiện cần và đủ của hàm lồi và hàm lõm một biến, kết hợp với phép biến đổi tương đương, phương pháp đổi biến và/ hoặc các bất đẳng thức cơ bản khác. Dựa trên các ý tưởng và phương pháp này, nhóm tác giả tạo ra nhiều bài toán mới khá phong phú, từ đơn giản đến phức tạp. Điều này cho thấy, các ý tưởng và phương pháp mà nhóm tác giả đề xuất có tính ứng dụng cao, rất cần cho các giảng viên và giáo viên ở các trường đại học và trung học phổ thông để tạo ra các đề thi học sinh giỏi, Olympic học sinh, sinh viên và trong các kì thì quan trọng khác.

**Từ khóa -** Hàm lồi; Hàm lõm; Sáng tạo bài toán; Bất đẳng thức; Giá trị lớn nhất; Giá trị nhỏ nhất

**Abstract -** The theory of convex and concave functions is investigated and applied in optimization theory, in proving inequalities, and many other fields. In this paper, we propose some ideas and methods to create new problems on proving inequalities, finding maximum and minimum values. Our research is based on the necessary and sufficient inequalities of convex and concave functions, the combination of these inequalities with equivalent transforms, change of variables and/or other inequalities. Based on the ideas and methods proposed, we have created many new problems from easy to difficult. They have showed that, the ideas and methods proposed are highly practical and necessary to lecturers at high schools and universities in giving questions in examinations, especially in examinations of selecting good students at levels, in Olympic examinations of high school and university students and others.

**Key words -** Convex functions; Concave functions; Create new problem; Inequality; Maximum value; Minimum value

## 1. Đặt vấn đề

Giải tích lồi là một nhánh của toán học dành cho việc nghiên cứu các tính chất của hàm lồi và tập hợp lồi, có nhiều ứng dụng trong lí thuyết tối ưu, lí thuyết điều khiển, lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng,... và đặc biệt trong việc chứng minh các bất đẳng thức cơ bản, quan trọng. Lí thuyết giải tích lồi được nghiên cứu và công bố trong nhiều công trình khoa học khác nhau, tiêu biểu trong số đó có thể kể đến các công trình nghiên cứu của [1, 2, 3, 4]. Trong chương trình toán phổ thông, lí thuyết hàm lồi và hàm lõm cũng được sử dụng khá phổ biến trong chứng minh các bài toán về bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất [5, 6, 7]. Chẳng hạn, các bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, bất đẳng thức Hölder,.. được chứng minh một cách đơn giản thông qua việc áp dụng bất đẳng thức điều kiện cần và đủ của hàm lồi, xem các chứng minh trong tài liệu [8]. Tuy nhiên, việc sử dụng lí thuyết hàm lồi và hàm lõm để sáng tạo ra các bài toán mới về chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của một biểu thức rất ít được đề cập. Theo hiểu biết của nhóm tác giả, đây là một hướng mới, chưa được khai thác và nghiên cứu nhiều. Gần đây, nhóm tác giả đã công bố một số phương pháp sáng tạo ra bài toán mới dựa trên tính chất đạt cực trị và bất đẳng thức biến phân của hàm lồi và hàm lõm trong bài báo [7].

Trong bài báo này, nhóm tác giả tiếp tục giới thiệu và đề xuất một số phương pháp sáng tạo ra các bài toán mới dựa trên bất đẳng thức về điều kiện cần và đủ của hàm lồi, hàm lõm. Ý tưởng cơ bản của các phương pháp đề xuất là việc kết hợp giữa ba yếu tố sau:

1. Sử dụng bất đẳng thức về điều kiện cần và đủ của hàm lồi và hàm lõm;

2. Xét các trường hợp cụ thể của hàm lồi, hàm lõm ứng với miền khảo sát;

3. Kết hợp với phương pháp tổng quát hóa, đặc biệt hóa, phương pháp biến đổi tương đương, phương pháp đổi biến, và/hoặc các yếu tố hình học.

Bài báo sẽ trình bày các ý tưởng và phương pháp sáng tạo bài toán mới dựa trên việc kết hợp ba yếu tố trên trong nội dung tiếp theo. Trong bài báo, nhóm tác giả kí hiệu $I(a,b)$ là một trong các khoảng $(a,b), (a,b], [a,b)$ hoặc $[a,b]$ trong đó $a<b$ và có thể nhận các giá trị $\pm\infty$.

## 2. Phương pháp chung sáng tạo bài toán mới

Trong phần này, xem xét các ý tưởng sáng tạo ra các bài toán mới dựa trên bất đẳng thức về điều kiện cần và đủ của hàm và hàm lõm (còn gọi là Bất đẳng thức Jensen). Cụ thể, ta sẽ dựa trên mệnh đề sau:

[1] Pham Van Dong High School, Mo Duc District, Quang Ngai (Huynh Duc Vu)

[2] The University of Danang - University of Science and Education (Pham Quy Muoi)

**Tính chất 2.1 [8, Mệnh đề 3, tr.174]** *Hàm số $f$ lồi (lõm) trên đoạn $I(a,b)$ khi và chỉ khi với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in I(a,b)$ và với mọi số thực không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ta có*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le (\ge) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \quad (1)$$

Nếu $f(x)$ là hàm lồi chặt trên $I(a,b)$ thì đấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Từ điều kiện cần và đủ ở trên, nếu ta chọn một hàm số $f(x)$ lồi cụ thể, các số thực không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$ cụ thể thì ta nhận được các bài toán về bất đẳng thức cụ thể khác nhau. Hơn nữa, nếu đặt điều kiện để một trong hai vế của bất đẳng thức trên có giá trị hằng thì chúng ta sẽ có bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức tương ứng với điều kiện đó. Đây là ý tưởng chính để sáng tạo ra các bài toán mới trong phần này. Để tạo ra các bài toán mới có độ khó tăng lên, có thể kết hợp với bất đẳng thức trên với phép biến đổi tương đương, đặt ẩn phụ hoặc kết hợp với các yếu tố hình học,.... Nghiên cứu sẽ trình bày chi tiết ý tưởng sáng tạo này thông qua một số trường hợp cụ thể của hàm số $f(x)$.

## 3. Sáng tạo ra các bài toán mới đơn giản

Trước hết, chọn hàm số $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. Vì $f(x)$ lồi trên $\mathbb{R}$ nên với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $a, b, c \ge 0$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, sử dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right)^2 \le \frac{ax^2+by^2+cz^2}{a+b+c}. \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z > 0$.

Từ đây, ta có thể sáng tạo ra các bài toán mới như sau: Trong (2), nếu cho $a = b = c = 1$ thì ta có bài toán:

**Bài toán 3.1** *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

*Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.*

Trong (2), nếu ta đặt $x = \frac{a_1}{b_1}, y = \frac{a_2}{b_2}, z = \frac{a_3}{b_3}$, $a = b_1^2, b = b_2^2, c = b_3^2, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}^*, \forall i = 1,2,3$ thì ta có bài toán khác sau đây:

***Bài toán 3.2*** *Chứng minh rằng với mọi $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}^*, \forall i = 1,2,3$, ta có*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

*Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.*

Chú ý rằng, Bài toán 3.1 và Bài toán 3.2 là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Cauchy–Schwarz [8, tr.10].

Tiếp theo, xem xét việc tạo ra các bài toán mới về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta cũng sẽ thấy, với các cách chọn khác nhau cho tham số $\alpha_i$ trong (1) sẽ tạo ra nhiều dạng toán đa dạng và phong phú. Minh họa điều này thông qua việc chọn hàm số $f(x)$ là làm lũy thừa, tức là $f(x) = x^n, n \ge 2$ $x \in [0; \infty)$. Chú ý rằng, với $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, hàm số $f(x) = x^n$ lồi trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên với các số không âm $a_1, a_2, \cdots, a_m$, ta có:

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}{m} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}\right)^n.$$

Đặt $T = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ và $S = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n$. Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành:

$$\frac{S}{m} \ge \left(\frac{T}{m}\right)^n \Leftrightarrow T^n \le S.m^{n-1} \Leftrightarrow T \le \sqrt[n]{Sm^{n-1}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 + \cdots + a_m = \sqrt[n]{\frac{S}{m}}$. Như vậy, nếu $S$ là hằng số, thì $T$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt[n]{Sm^{n-1}}$ khi $a_1 = a_2 + \cdots + a_m = \sqrt[n]{\frac{S_m}{m}}$. Ngược lại, nếu $T$ là hằng số thì $S$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a_1 = a_2 + \cdots + a_m = \frac{T}{m}$. Do đó, có hai dạng bài toán sau đây:

**Bài toán 3.3** *Cho các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_m$ thỏa mãn $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n = S$ không đổi, $n$ là số nguyên dương lớn hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

**Bài toán 3.4** *Cho các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_m$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = T$ không đổi, $n$ là số nguyên dương lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n.$$

Chú ý rằng, các bài toán trên có thể tổng quát hóa nếu ta xét hàm số $f(x) = x^{\frac{n}{k}} (n, k \in \mathbb{N}^*, n > k)$. Vì $f(x)$ là hàm lồi trên $(0; +\infty)$ nên với mọi $a_i > 0, i = 1, \dots, m$ ta có:

$$\frac{f(a_1^k) + f(a_2^k) + \cdots + f(a_m^k)}{m} \ge f\left(\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_m^k}{m}\right).$$

Tức là

$$\left(\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}{m}\right)^k \ge \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_m^k}{m}\right)^n.$$

Khi đó, theo phương pháp đã được trình bày ở trên, chúng ta có thể tạo ra một số bài toán khác nhau như sau:

**Bài tập 3.5** *Cho $n, k \in \mathbb{N}^*, n > k$ và các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_m$ thỏa mãn $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n = S$ không đổi. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$T = a_1^k + a_2^k + \cdots + a_m^k.$$

**Bài tập 3.6** *Cho $n, k \in \mathbb{N}^*, n > k$ và các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_m$ thỏa mãn $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_m^k = S$ không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n.$$

## 4. Sáng tạo ra bài toán mới với độ khó tăng lên

Để tạo ra các bài toán mới có độ khó tăng lên, một cách đơn giản là chọn một hàm lồi phức tạp hơn. Ví dụ, xét hàm số $f(x) = x^x$ với $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = (1 + \ln x)e^{x\ln x},$$

$$f''(x) = \frac{x^x}{x} + (1 + \ln x)^2 x^x > 0, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi trên $(0; +\infty)$. Sử dụng hàm số này và các phương pháp sáng tạo ra bài toán mới đã được giới thiệu và minh họa ở trên, ta có thể tạo ra nhiều bài toán khác nhau. Một số bài toán như thế có thể phát biểu như sau:

**Bài tập 4.1** *Cho $x, y, z > 0; a, b, c \ge 0, a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:*

$$(ax + by + cz)^{ax+by+cz} \le ax^x + by^y + cz^z.$$

**Bài tập 4.2** *Cho $x, y, z > 0, x + y + z = a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^x + y^y + z^z$$

**Bài tập 4.3** *Cho n số dương $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \cdots + x_n^{x_n}}{n}.$$

Một cách khác để sáng tạo ra bài toán mới có độ khó tăng lên là kết hợp giữa bất đẳng thức (1) với phép biến đổi tương đương và/hoặc kết hợp với phép đổi biến. Điều này làm cho người giải khó nhận diện được hàm lồi $f(x)$ cần chọn. Minh họa phương pháp này thông qua một hàm số đơn giản, đó là hàm $f(x) = \frac{1}{x}$. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không âm và không đồng thời bằng 0, ta có bất đẳng thức:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n} \leq \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}. \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n > 0$. Như vậy, ta có thể tạo ra bài toán mới như sau:

**Bài tập 4.4** *Cho $x, y, z > 0$; $a, b, c \geq 0$ và $a, b, c$ không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

Đối với hàm $f(x) = \frac{1}{x}$, ta cũng có thể tạo ra bài toán khó hơn bằng cách đổi biến số kết hợp với phép biến đổi tương đương. Ví dụ, ta xét một trường hợp đặc biệt của (3) là:

$$\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \quad (4)$$

Thay $(x; y; z)$ lần lượt bằng các số $\left(\frac{a^3}{b^2} + a; \frac{b^3}{c^2} + b; \frac{c^3}{a^2} + c\right)$, ta được

$$\frac{1}{\frac{a^3}{b^2}+a} + \frac{1}{\frac{b^3}{c^2}+b} + \frac{1}{\frac{c^3}{a^2}+c} \geq \frac{9}{\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)+(a+b+c)} \geq \frac{9}{2\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)}.$$

Từ đây nếu đặt $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} = 1$ ta nhận được bài toán tìm giá trị nhỏ nhất. Chú ý rằng, bài toán sẽ khó hơn nếu ra biến đổi tương đương cho điều kiện cuối, cũng như biểu thức cần chứng minh như trong bài toán sau:

**Bài tập 4.5** *Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn điều kiện*

$$a^5c^2 + b^5a^2 + c^5b^2 = a^2b^2c^2.$$

*Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S = \frac{b^2}{a^3+ab^2} + \frac{c^2}{b^3+bc^2} + \frac{a^2}{c^3+ca^2}.$$

Bài toán sẽ trở nên khó hơn nhiều nếu ta cho $(x, y, z)$ trong (4) nhận nhiều bộ giá trị khác nhau và sau đó cộng lại theo vế để nhận được bất đẳng thức cuối cùng. Ta cũng có thể kết hợp với kết hợp với phép biến đổi tương đương và các bất đẳng thức khác. Ví dụ, thay $(x; y; z)$ lần lượt bằng ba bộ số $(a+b+c; a+b+c; 3a)$; $(a+b+c; a+b+c; 3b)$; $(a+b+c; a+b+c; 3c)$ ta được

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{3a} \geq \frac{9}{5a+2b+2c};$$
$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{3b} \geq \frac{9}{2a+5b+2c};$$
$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{3c} \geq \frac{9}{2a+2b+5c}.$$

Ba bất đẳng thức trên lần lượt tương đương với

$$\frac{ab}{9}\left(\frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3a}\right) \geq \frac{ab}{5a+2b+2c};$$
$$\frac{bc}{9}\left(\frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3b}\right) \geq \frac{bc}{2a+5b+2c};$$
$$\frac{ca}{9}\left(\frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3c}\right) \geq \frac{ca}{2a+2b+5c}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ta được

$$\frac{ab}{5a+2b+2c} + \frac{bc}{2a+5b+2c} + \frac{ca}{2a+2b+5c} \leq \frac{1}{9}\left[\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c} + \frac{a+b+c}{3}\right] \leq \frac{1}{9}\left[\frac{2(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} + \frac{a+b+c}{3}\right] = \frac{a+b+c}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Khi đó, ta có bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc bài toán tìm giá trị lớn nhất như sau:

**Bài tập 4.6** *Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{5a+2b+2c} + \frac{bc}{2a+5b+2c} + \frac{ca}{2a+2b+5c} \leq \frac{a+b+c}{9}.$$

**Bài tập 4.7** *Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$\frac{ab}{5a+2b+2c} + \frac{bc}{2a+5b+2c} + \frac{ca}{2a+2b+5c}.$$

Tương tự, nếu thay $(x; y; z)$ lần lượt bằng ba bộ số $(2a+2b+c;\ 2a+b+2c; 5c)$; $(a+2b+2c; 2a+2b+c; 5a)$; $(2a+b+2c; a+2b+2c; 5b)$ vào bất đẳng thức (4) ta được:

$$\frac{1}{2a+2b+c} + \frac{1}{2a+b+2c} + \frac{1}{5c} \geq \frac{9}{4a+3b+8c};$$
$$\frac{1}{a+2b+2c} + \frac{1}{2a+2b+c} + \frac{1}{5a} \geq \frac{9}{8a+4b+3c};$$
$$\frac{1}{2a+b+2c} + \frac{1}{a+2b+2c} + \frac{1}{5b} \geq \frac{9}{3a+8b+4c}.$$

Ba bất đẳng thức trên lần lượt tương đương với:

$$\frac{bc}{9}\left(\frac{1}{2a+2b+c} + \frac{1}{2a+b+2c} + \frac{1}{5c}\right) \geq \frac{bc}{4a+3b+8c};$$
$$\frac{ca}{9}\left(\frac{1}{a+2b+2c} + \frac{1}{2a+2b+c} + \frac{1}{5a}\right) \geq \frac{ca}{8a+4b+3c};$$
$$\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{2a+b+2c} + \frac{1}{a+2b+2c} + \frac{1}{5b}\right) \geq \frac{ab}{3a+8b+4c}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{bc}{4a+3b+8c} + \frac{ca}{8a+4b+3c} + \frac{ab}{3a+8b+4c} \leq \frac{1}{9}\left[\frac{c(a+b)}{2a+2b+c} + \frac{b(a+c)}{2a+b+2c} + \frac{a(b+c)}{a+2b+2c} + \frac{a+b+c}{5}\right].$$

Từ đây ta đặt điều kiện $a, b, c > 0$ và $a + b + c$ là hằng số, chẳng hạn $a + b + c = 1$, thì chúng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{bc}{4a+3b+8c} + \frac{ca}{8a+4b+3c} + \frac{ab}{3a+8b+4c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{c-c^2}{2-c} + \frac{b-b^2}{2-b} + \frac{a-a^2}{2-a} + \frac{1}{5}\right).$$

Để đánh giá được giá trị lớn nhất ở vế phải của bất đẳng thức cuối cùng, xét hàm số $f(x) = \frac{x-x^2}{2-x}$ trên $(0;1)$, ta có $f''(x) = -\frac{4}{(2-x)^3} < 0, \forall x \in (0;1)$. Suy ra, $f(x)$ lõm trên $(0;1)$. Do đó, với $a,b,c \in (0;1), a+b+c=1$ thì $\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$. Tức là

$$\frac{c-c^2}{2-c} + \frac{b-b^2}{2-b} + \frac{a-a^2}{2-a} \leq 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Từ đây ta có bài toán tìm giá trị lớn nhất như sau

**Bài tập 4.8** *Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{bc}{4a+3b+8c} + \frac{ca}{8a+4b+3c} + \frac{ab}{3a+8b+4c}.$$

Để kết thúc phần này, ta xét thêm hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Dùng đạo hàm cấp hai, dễ dàng chỉ ra rằng, $f(x)$ lồi trên $(0;+\infty)$ và lõm trên $(-\infty;0)$. Để tạo ra các bài toán khó, ta kết hợp bất đẳng thức điều kiện cần và đủ của hàm lồi và hàm lõm với phương pháp đổi biến. Ví dụ, nếu $a_1, a_2 > 1$, ta đặt $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}$. Khi đó, ta có $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$. Vì thế,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}} \leq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2}.$$

Nếu $0 < a_1, a_2 < 1$, ta đặt $a_1 = e^{x_1}, a_2 = e^{x_2}$. Khi đó, ta có $x_1, x_2 \in (-\infty;0)$. Vì thế:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2}.$$

**Bài tập 4.9** *Chứng minh các bất đẳng thức*

- $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \leq \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}$ *với* $a_1, a_2 \in (0;1)$.
- $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}$ *với* $a_1, a_2 \in (1;+\infty)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có các bài toán mới sau:

**Bài tập 4.10** *Chứng minh các bất đẳng thức*

- $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$

*với* $a_i \in (0;1), \forall i = 1,2,\ldots,n$.

- $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$

*với* $a_i \in (1;+\infty), \forall i = 1,2,\ldots,n$.

## 5. Sáng tạo các bài toán mới trong tam giác

Trong phần này, áp dụng các ý tưởng, phương pháp đã được đề xuất và minh họa trong phần trước cho các hàm số khác nhau kết hợp với các yếu tố hình học để tạo ra các bài toán mới trong tam giác.

Trước hết, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không âm và không đồng thời bằng 0. Vì hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$ lồi trên $(0;+\infty)$ nên ta có bất đẳng thức:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_ix_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_if(x_i)}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^3}{(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2} \leq \frac{a_1}{x_1^2} + \frac{a_2}{x_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 + \cdots + x_n > 0$.

Ta có thể dùng bất đẳng thức này kết hợp với các yếu tố hình học để tạo ra các bài toán chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong tam giác. Ví dụ, với $x, y, z$ là các số dương bất kì và $a, b, c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi $2p$. Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} \geq \frac{8p^3}{(ax+by+cz)^2}.$$

Từ bất đẳng thức này và sử dụng phương pháp đặc biệt hóa, chúng ta sáng tạo ra các bài tập sau liên quan đến tam giác như một số bài toán sau:

**Bài tập 5.1** *Cho tam giác không suy biến $ABC$ với độ bài ba cạnh là $a, b, c$ ứng với các góc $A, B, C$ và $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{(a+b+c)^3}{2R(a\sin A + b\sin B + c\sin C)^2}.$$

Chú ý rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ được xác định bởi $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

**Bài tập 5.2** *Cho tam giác nhọn $ABC$ với độ bài ba cạnh là $a, b, c$ ứng với các góc $A, B, C$ và có chu vi bằng $2p$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\cos^2 A} + \frac{b}{\cos^2 B} + \frac{c}{\cos^2 C} \geq \frac{8p^3}{(a\cos A + b\cos B + c\cos C)^2}.$$

**Bài tập 5.3** *Cho tam giác $ABC$ với độ bài ba cạnh là $a, b, c$ ứng với các góc $A, B, C$ và có chu vi bằng 1. Kí hiệu $m_a$, $m_b$, $m_c$ theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh $A$, $B$, $C$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{m_a^2} + \frac{b}{m_b^2} + \frac{c}{m_c^2} \geq \frac{1}{(am_a+bm_b+cm_c)^2}.$$

Để kết thức phần này, ta chuyển qua xét hàm số $f(x) = e^{kx}$ với $k \neq 0$ là số thực cho trước. Dễ thấy rằng $f(x) = e^{kx}$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Do đó, với $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0;1]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, dùng bất đẳng thức về điều kiện cần và đủ của hàm lồi, ta có

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_ix_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_if(x_i)$$

hay

$$e^{k\sum_{i=1}^n \alpha_ix_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_ie^{kx_i}.$$

Để tạo ra các bài toán khó hơn, ta kết hợp bất đẳng thức điều kiện cần và đủ của hàm lồi và hàm lõm với phương pháp đổi biến. Ví dụ, đặt $y_i = e^{kx_i}, i = 1, \ldots, n$, ta nhận được bất đẳng thức sau

$$y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \cdots + \alpha_ny_n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 + \cdots + x_n$. Từ đây, kết hợp với các yếu tố hình học, ta có thể tạo ra nhiều bài toán về tam giác khác nhau. Dưới đây là một số ví dụ như thế.

**Bài tập 5.4** *Cho tam giác $ABC$ có chu vi bằng 1 và $a, b, c$ là độ dài các cạnh. Chứng minh rằng:*

a) $a^a \cdot b^b \cdot c^c \leq a^2 + b^2 + c^2$,

b) $a^b \cdot b^c \cdot c^a \leq ab + bc + ca$.

**Bài tập 5.5** *Cho tam giác $ABC$ có chu vi bằng 1 và $a, b, c$ là độ dài các cạnh. Chứng minh rằng:*

a) $ae^{a}+be^{b}+ce^{c}\geq \mathrm{e}^{a^2+b^2+c^2}$,

b) $ae^{\sin A}+be^{\sin B}+ce^{\sin C}\geq \mathrm{e}^{a\sin A+b\sin B+c\sin C}$.

**Bài tập 5.6** *Cho tam giác $ABC$ có chu vi bằng* 1 *và $a, b, c$ là độ dài các cạnh. Gọi $m_a, m_b, m_c$, $h_a, h_b, h_c$ theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến và độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh $A, B, C$. Chứng minh rằng*

a) $ae^{m_a}+be^{m_b}+ce^{m_c}\geq \mathrm{e}^{am_a+bm_b+cm_c}$,

b) $ae^{h_a}+be^{h_b}+ce^{h_c}\geq \mathrm{e}^{ah_a+bh_b+ch_c}$.

## 6. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã trình bày phương pháp sáng tạo bài toán về chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa trên bất đẳng thức về điều kiện cần và đủ của hàm lồi và hàm lõm. Nhóm tác giả đã minh họa phương pháp này thông qua một số hàm cơ bản, thường gặp; Trình bày phương pháp kết hợp bất đẳng thức này với phép biến đổi tương đương, đổi biến và/hoặc các yếu tố hình học để tạo ra nhiều bài toán khác nhau có độ khó tăng lên. Những ý tưởng này cũng được minh họa cụ thể trong bài. Từ phương pháp được đề xuất và các ví dụ minh họa, người đọc có thể tự tạo cho mình nhiều bài toán khác với độ khó khác nhau. Tương tự như trong nghiên cứu [7], ta hoàn toàn có thể kết hợp phương pháp này với các bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,...

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Josef Stoer and Christoph Witzgall. *Convexity and optimization in finite dimensions I*. Springer Science & Business Media, volume 163, 2012.

[2] R Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton university press, volume 36, 1970.

[3] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis.* Springer Science & Business Media, 2004.

[4] Jonathan Borwein and Adrian S Lewis. *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples.* Springer Science & Business Media, 2010.

[5] Đỗ Văn Lưu. *Giải tích hàm.* NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1999.

[6] Nguyễn Quý Duy. *Tuyển tập 200 bài vô địch toán*. Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội, 2001.

[7] Huynh Duc Vu và Pham Quy Muoi. Creating new problems on proving inequalities, finding maximum and minimum values based on the critical properties and tangent inequalities of convex and concave functions. *The university of Danang – Journal of Science and Technology*, 19(6), 24-28, 2021.

[8] Jean-Marie Monier (Lí Hoàng Tú Dịch). *Giáo trình Toán Tập 1: Giải tích 1.* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2013.