# KHÔNG GIAN VỚI HỌ BẢO TỒN BAO ĐÓNG

## SPACES WITH A CLOSURE-PRESERVING FAMILY

**Lương Quốc Tuyển[1], Lê Văn Có[1*], Hồ Quốc Trung[1]**

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[*]Tác giả liên hệ: colelyson342@gmail.com

(Nhận bài: 08/4/2021; Chấp nhận đăng: 01/9/2021)

**Tóm tắt** - Good và Macías [1] đã chứng minh rằng hợp của hai họ bảo tồn bao đóng trong một không gian topo cũng là một họ bảo tồn bao đóng, và nếu $X$ là một không gian topo có một họ bảo tồn bao đóng, thì tích đối xứng cấp $n$ của nó cũng có một họ bảo tồn bao đóng. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu về họ bảo tồn bao đóng, họ bảo tồn bao đóng di truyền, họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu và tích đối xứng cấp $n$ của một không gian topo. Nhờ đó, đã chứng được minh được các kết quả mới như sau: 1) Hợp của hai họ bảo tồn bao đóng di truyền trong không gian topo cũng là họ bảo tồn bao đóng di truyền. 2) Hợp của hai họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu trong không gian topo cũng là họ bảo tồn bảo đóng di truyền yếu. 3) Nếu không gian topo $X$ có một họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu, thì tích đối xứng cấp 2 của nó cũng có một họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu.

**Từ khóa** - Tích đối xứng; siêu không gian; bảo tồn bao đóng; bảo tồn bao đóng di truyền; bảo tồn bao đóng di truyền yếu

**Abstract** - Good and Macísas [1] have space is a closure-preserving family; and if a topological space has a closure-preserving family, its $n$-fold symmetric product also has a closure-preserving one. In this paper, we study on closure-preserving families, hereditary closure-preserving families, weakly hereditary closure-preserving ones and the $n$-fold symmetric product of a topological space. The following results are proved: 1) The union of two hereditary closure-preserving families in a topological space is a hereditary closure-preserving family. 2) The complication of two weakly hereditary closure-preserving families in a topological space is a weakly hereditary closure-preserving family. 3) If a topological space has a weakly hereditary closure-preserving family, its 2-fold symmetric product also has a weakly hereditary closure-preserving one**.**

**Key words** - Symmetric product; hyperspace; closure-preserving; hereditary closure-preserving; weakly hereditary closure-preserving

## 1. Giới thiệu

Năm 1931, Borsulk và Ulam [2] đã giới thiệu khái niệm tích đối xứng cấp $n$ của không gian topo và đã đưa ra một số tính chất quan trọng của nó. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả trên thế giới đã quan tâm nhiều đến bài toán về sự bảo toàn các tính chất topo trên không gian metric suy rộng lên tích đối xứng cấp $n$ của nó. Nhờ đó, các tác giả đã thu được nhiều kết quả thú vị (xem [1-3]). Sau đó, Good và Macías [1] đã chứng minh rằng, hợp của hai họ có tính chất CP cũng là họ có tính chất CP, và nếu không gian topo $X$ có họ CP, thì tích đối xứng cấp $n$ của nó cũng có họ CP. Gần đây, Tuyển và Tuyên [3] đã đưa ra kết quả rằng, nếu $X$ là không gian topo có cn-mạng (ck-mạng) có tính chất σ-(P), thì tích đối xứng cấp $n$ của nó cũng có cn-mạng (tương ứng, ck-mạng) có tính chất σ-(P).

Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu các tính chất của họ bảo tồn bao đóng, họ bảo tồn bao đóng di truyền, họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu và đã chứng minh được rằng, hợp của hai họ bảo tồn bao đóng di truyền (họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu) là họ bảo tồn bao đóng di truyền (tương ứng, họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu) và nếu không gian $X$ có một họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu, thì tích đối xứng cấp 2 của nó cũng có một họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu.

Tất cả các không gian topo trình bày trong bài báo này được quy ước là không gian Hausdorff, còn khái niệm và thuật ngữ khác nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường. Ngoài ra, nhóm tác giả sử dụng thêm một số ký hiệu:

$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3,...\},\ \mathbb{N}^+=\{1,2,3,\dots\},$$

$|A|$ là lực lượng của tập hợp $A$ và $\overline{A}$ là bao đóng của $A$ trong $X$, còn nếu $\mathcal{A}$ là tập con của tích đối xứng $\mathcal{F}_n(X)$, thì nhóm tác giả ký hiệu $\mathtt{cl}(\mathcal{A})$ là bao đóng của $\mathcal{A}$.

## 2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

### *2.1. Cơ sở lí thuyết*

Giả sử $X$ là một không gian topo. Ta đặt

(1) $CL(X)=\{A\subset X : A$ đóng và khác rỗng$\}$;

(2) $2^X=\{A\in CL(X) : A$ compact$\}$;

(3) $\mathcal{F}_n(X)=\{A\in 2^X : |A|\le n\}$;

(4) $\mathcal{F}(X)=\{A\in 2^X : A$ hữu hạn$\}$;

Chúng ta trang bị cấu trúc topo Vietoris trên không gian $CL(X)$ với cơ sở

$$\mathcal{B}=\Big\{\langle U_1,\dots,U_s\rangle : U_1, ..., U_s \text{ là các tập mở của X}, s\in\mathbb{N}^+\Big\},$$

trong đó

$$\langle U_1,\dots,U_s\rangle=\left\{A\in CL(X) : A\subset\bigcup_{i=1}^{s}U_i, A\cap U_i\neq\varnothing, \forall i\le s\right\}$$

Như vậy, $\mathcal{F}_n(X)$ và $\mathcal{F}(X)$ là các không gian con của

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Luong Quoc Tuyen, Le Van Co, Ho Quoc Trung)

$CL(X)$ với topo cảm sinh từ topo Vietoris. Khi đó,

(1) $\mathcal{F}_n(X)$ được gọi là *tích đối xứng cấp n* của $X$.

(2) $\mathcal{F}(X)$ được gọi là *siêu không gian gồm các tập con hữu hạn* của $X$.

Rõ ràng rằng $\mathcal{F}(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n(X)$ và

$\mathcal{F}_n(X)\subset\mathcal{F}_{n+1}(X)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^+$.

Giả sử $U_1,\ldots,U_s$ là các tập mở trong $X$. Khi đó, ta ký hiệu

$$\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_n=\langle U_1,\ldots,U_s\rangle\cap\mathcal{F}_n(X).$$

Như vậy, topo trên $\mathcal{F}_n(X)$ có cơ sở

$$\mathcal{B}=\left\{\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_n : U_1, ..., U_s\in\tau,\ s\in\mathbb{N}^+\right\}.$$

**Nhận xét 2.1.1** ([1]). Giả sử $X$ là một không gian topo và $\{x_1,\ldots,x_r\}\in\mathcal{F}_n(X)$ sao cho

$$\{x_1,\ldots,x_r\}\in\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_n.$$

Khi đó, với mỗi $j\le r$, nếu ta đặt

$$U_{x_j}=\cap\left\{U\in\{U_1,U_2,\ldots,U_s\}: x_j\in U\right\},$$

thì rõ ràng rằng

$$\langle U_{x_1},\ldots,U_{x_r}\rangle_n\subset\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_n.$$

**Định nghĩa 2.1.2** ([1]). Giả sử $X$ là một không gian topo, $\mathcal{U}$ là họ nào đó gồm các tập con của $X$. Khi đó,

- $\mathcal{U}$ được gọi là *bảo tồn bao đóng* (viết tắt là CP) nếu với $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, ta có

$$\overline{\cup\{V: V\in\mathcal{V}\}}=\cup\{\overline{V}: V\in\mathcal{V}\}.$$

- $\mathcal{U}$ được gọi là *bảo tồn bao đóng di truyền* (viết tắt là HCP) nếu với $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, và với mỗi $V\in\mathcal{V}$ ta lấy tập con $A_V\subset V$. Khi đó, ta có

$$\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{V}\}}=\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{V}\}.$$

- $\mathcal{U}$ được gọi là họ *bảo tồn bao đóng di truyền yếu* (viết tắt là wHCP) nếu với $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, và với mỗi $V\in\mathcal{V}$, ta lấy $x_V\in V$. Khi đó,

$$\overline{\cup\{x_V: V\in\mathcal{V}\}}=\cup\{x_V: V\in\mathcal{V}\}.$$

**Nhận xét 2.1.3.** Mỗi họ HCP là họ CP và wHCP.

**Bổ đề 2.1.4** ([1]). *Giả sử $\mathcal{U}$ là họ nào đó gồm các tập con của không gian topo $X$ và $n\in\mathbb{N}^+$. Khi đó, nếu $\mathcal{U}$ là họ CP của $X$, thì*

$$\mathfrak{U}=\{\langle U_1,\ldots,U_s\rangle_n : U_1,\ldots,U_s\in\mathcal{U}\}$$

*cũng là một họ CP của $\mathcal{F}_n(X)$.*

**Hệ quả 2.1.5.** ([1]) *Cho $X$ là một không gian topo, $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là hai họ CP của $X$. Khi đó, $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ cũng là một họ CP của $X$.*

### *2.2. Phương pháp nghiên cứu*

Nhóm tác giả sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa, khái quát hóa nhằm đưa ra những kết quả mới cho mình.

## 3. Kết quả và đánh giá

### *3.1. Kết quả*

**Định lí 3.1.1.** *Cho $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là hai họ HCP trong không gian topo $X$. Khi đó, $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ cũng là một họ HCP của $X$.*

Chứng minh. Cho $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là hai họ HCP của $X$, $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$. Ta đặt

$$\mathcal{A}=\mathcal{W}\cap\mathcal{U},\ \mathcal{B}=\mathcal{W}\cap\mathcal{V},$$

khi đó $\mathcal{W}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Bây giờ, với mỗi $V\in\mathcal{W}$ ta lấy $A_V\subset V$. Ta cần chứng minh rằng

$$\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{W}\}}=\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{W}\}. \quad (1)$$

Thật vậy, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $\mathcal{A}=\varnothing$ hoặc $\mathcal{B}=\varnothing$, thì $\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$ hoặc $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}$. Bởi vì $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là các họ HCP nên ta suy ra khẳng định (1) là đúng.

Trường hợp 2: Nếu $\mathcal{A}\neq\varnothing$ và $\mathcal{B}\neq\varnothing$, thì do $\mathcal{A}\subset\mathcal{U}$, $\mathcal{B}\subset\mathcal{V}$ và $\mathcal{U},\mathcal{V}$ là các họ HCP trong $X$ nên ta có:

$$\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{A}\}}=\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{A}\},$$

$$\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{B}\}}=\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{B}\}.$$

Bởi thế, ta có

$$\begin{aligned}
&\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{W}\}}\\
&=\overline{(\cup\{A_V: V\in\mathcal{A}\})\cup(\cup\{A_V: V\in\mathcal{B}\})}\\
&=\left(\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{A}\}}\right)\cup\left(\overline{\cup\{A_V: V\in\mathcal{B}\}}\right)\\
&=\left(\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{A}\}\right)\cup\left(\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{B}\}\right)\\
&=\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\}\\
&=\cup\{\overline{A}_V: V\in\mathcal{W}\}.
\end{aligned}$$

Do đó, khẳng định (1) là đúng.

Như vậy, $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ là họ HCP của $X$.

**Định lí 3.1.2.** *Cho $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là hai họ wHCP trong không gian topo $X$. Khi đó, $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ cũng là một họ wHCP của $X$.*

Chứng minh. Cho $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là hai họ wHCP của $X$, $\mathcal{W}\subset\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$. Ta đặt

$$\mathcal{A}=\mathcal{W}\cap\mathcal{U},\ \mathcal{B}=\mathcal{W}\cap\mathcal{V},$$

khi đó $\mathcal{W}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Bây giờ, với mỗi $V\in\mathcal{W}$, ta lấy $x_V\in V$. Ta cần chứng minh rằng

$$\overline{\cup\{x_V: V\in\mathcal{W}\}}=\cup\{x_V: V\in\mathcal{W}\}. \quad (2)$$

Thật vậy, ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $\mathcal{A}=\varnothing$ hoặc $\mathcal{B}=\varnothing$, thì $\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$

hoặc $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Bởi vì $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là các họ wHCP trong $X$ nên ta suy ra rằng khẳng định (2) là đúng.

Trường hợp 2: Nếu $\mathcal{A} \neq \varnothing$ và $\mathcal{B} \neq \varnothing$, thì do $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ và $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ là các họ wHCP trong $X$ nên ta có

$$\overline{\cup\{x_V : V \in \mathcal{A}\}} = \cup\{x_V : V \in \mathcal{A}\},$$

$$\overline{\cup\{x_V : V \in \mathcal{B}\}} = \cup\{x_V : V \in \mathcal{B}\}.$$

Bởi thế, ta có

$$\begin{aligned}
&\overline{\cup\{x_V : V \in \mathcal{W}\}} \\
&= \overline{(\cup\{x_V : V \in \mathcal{A}\}) \cup (\cup\{x_V : V \in \mathcal{B}\})} \\
&= \left(\overline{\cup\{x_V : V \in \mathcal{A}\}}\right) \cup \left(\overline{\cup\{x_V : V \in \mathcal{B}\}}\right) \\
&= \left(\cup\{x_V : V \in \mathcal{A}\}\right) \cup \left(\cup\{x_V : V \in \mathcal{B}\}\right) \\
&= \cup\{x_V : V \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\} = \cup\{x_V : V \in \mathcal{W}\}.
\end{aligned}$$

Do đó, khẳng định (2) là đúng.

Như vậy, $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ là họ wHCP của $X$.

**Định lí 3.1.3.** *Giả sử $\mathcal{U}$ là họ nào đó gồm các tập con của không gian topo $X$. Khi đó, nếu $\mathcal{U}$ là một họ wHCP của $X$, thì*

$$\mathfrak{U} = \{\langle U_1, \ldots, U_s\rangle_2 : U_1, \ldots, U_s \in \mathcal{U}\}$$

*cũng là một họ wHCP của $\mathcal{F}_2(X)$.*

*Chứng minh.* Giả sử $\mathfrak{U}_0$ rằng là một họ con bất kỳ của $\mathfrak{U}$. Khi đó, với mỗi $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_o$, ta lấy $A_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$. Ta chứng minh rằng

$$\mathtt{cl}(\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}) = \{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}.$$

Rõ ràng rằng

$$\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\} \subset \mathtt{cl}(\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}).$$

Do đó, ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$\mathtt{cl}(\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}) \subset \{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}.$$

Thật vậy, giả sử rằng

$$F \notin \{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}.$$

Khi đó, $F \neq A_{\mathcal{W}}$ với mọi $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$. Suy ra $F \setminus A_{\mathcal{W}} \neq \varnothing$ hoặc $A_{\mathcal{W}} \setminus F \neq \varnothing$ với mọi $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$. Ta đặt

$$\mathfrak{H} = \{\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0 : A_{\mathcal{W}} \subset F\},$$

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0 : A_{\mathcal{W}} \not\subset F\}.$$

Khi đó, $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{H} \cup \mathfrak{F}$.

*Trường hợp 1:* $\mathfrak{F} = \varnothing$.

Bởi vì $\mathfrak{F} = \varnothing$ nên $\mathfrak{H} = \mathfrak{U}_0$. Do đó, với mọi $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$ ta đều có $A_{\mathcal{W}} \subset F$. Hơn nữa, bởi vì $|F| \leq 2$ nên ta có

- Nếu $F$ là tập một phần tử, nghĩa là $F = \{x\}$, thì do $A_{\mathcal{W}} \subset F$, $A_{\mathcal{W}} \neq F$ và $A_{\mathcal{W}} \neq \varnothing$ nên $\mathfrak{U}_0 = \varnothing$, đây là một mâu thuẫn.
- Nếu $F$ là tập có hai phần tử, nghĩa là $F = \{x_1, x_2\}$, thì ta có

$$\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{F}\} \subset \{\{x_1\}, \{x_2\}\}.$$

Do đó,

$$|\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{F}\}| \leq 2,$$

kéo theo $\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}$ là tập hợp đóng.

*Trường hợp 2:* $\mathfrak{F} \neq \varnothing$.

Bởi vì $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ nên với mỗi $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}$, ta lấy

$$y(\mathcal{W}) \in A_{\mathcal{W}} \setminus F.$$

Bởi vì $A_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$ nên tồn tại $H_{\mathcal{W}} \in \mathcal{U}$ sao cho

$$y(\mathcal{W}) \in H_{\mathcal{W}}.$$

Mặt khác, vì $\mathcal{U}$ là họ wHCP nên

$$\{y(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{F}\}$$

là tập hợp đóng trong $X$. Do đó, nếu ta đặt

$$V = X \setminus \{y(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{F}\},$$

thì $V$ là lân cận mở của $F$ trong $X$.

- Nếu $\mathfrak{H} = \varnothing$, thì rõ ràng rằng $\langle V\rangle_2$ là lân cận mở của $F$ trong $\mathcal{F}_2(X)$ thỏa mãn rằng

$$\langle V\rangle_2 \cap \{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\} = \varnothing.$$

- Nếu $\mathfrak{H} \neq \varnothing$, thì tồn tại $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$ sao cho

$$A_{\mathcal{W}} \neq \varnothing, A_{\mathcal{W}} \subset F, \text{ và } A_{\mathcal{W}} \neq F.$$

Do đó, $F$ có đúng 2 phần tử, giả sử rằng $F = \{x_1, x_2\}$. Khi đó,

$$\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{H}\} \subset \{\{x_1\}, \{x_2\}\}.$$

Bây giờ, với mỗi $i \leq 2$, ta đặt

$$U_i = X \setminus \left(\{x_i\} \cup \{y(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{F}\}\right), \tag{3}$$

và $U_3 = V$. Khi đó, $U_i$ mở với mọi $i \leq 3$. Hơn nữa, ta có

*Khẳng định 1:* $F \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle_2$.

Bởi vì $F \subset U_3$ nên

$$F \subset \cup\{U_i : i \leq 3\}.$$

Hơn nữa, ta có

$$U_i \cap F \neq \varnothing \text{ với mọi } i \leq 3.$$

Thật vậy, nếu $i = 3$, thì rõ ràng rằng $F \cap U_3 \neq \varnothing$, và nếu $i \leq 2$, thì do

$$F \cap \{y(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in \mathfrak{F}\} = \varnothing,$$

$F \setminus U_i \neq \varnothing$ và (3) nên ta suy ra $F \cap U_i \neq \varnothing$.

*Khẳng định 2:* $\langle U_1, U_2, U_3\rangle_2 \cap \{\mathcal{A}_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\} = \varnothing$.

Giả sử $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0$, khi đó

(a) Nếu $\mathcal{W} \in \mathfrak{H}$, thì tồn tại $i \leq 2$ sao cho $A_{\mathcal{W}} = \{x_i\}$. Bởi vì $U_i \cap \{x_i\} = \varnothing$ nên

$$A_{\mathcal{W}} = \{x_i\} \notin \langle U_1, U_2, U_3 \rangle_2.$$

(b) Nếu $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}$, thì do $y(\mathcal{W}) \notin U_i$ với mọi $i \le 3$ nên ta suy ra rằng

$$A_{\mathcal{W}} \not\subset \cup\{U_i : i \le 3\}.$$

Do đó, $A_{\mathcal{W}} \notin \langle U_1, U_2, U_3 \rangle_2$.

Như vậy, $\langle U_1, U_2, U_3 \rangle_2$ là lân cận mở của $F$ trong $\mathcal{F}_2(X)$ thỏa mãn

$$\langle U_1, U_2, U_3 \rangle_2 \cap \{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\} = \varnothing.$$

Do đó, $\{A_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_0\}$ là tập hợp đóng.

### *3.2. Đánh giá*

Các kết quả mới trong bài báo được thể hiện ở các định lí: Định lí 3.1.1, 3.1.2 và 3.1.3, trong đó

- Định lí 3.1.1 là kết quả về họ HCP trong không gian topo, và Định lí 3.1.2 là kết quả về họ wHCP trong không gian topo, các kết quả này tương tự kết quả về họ CP trong tài liệu [1].

- Định lí 3.1.3 là kết quả khẳng định rằng tính chất wHCP được bảo toàn từ không gian topo $X$ lên tích đối xứng $\mathcal{F}_2(X)$.

## 4. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu các tính chất về họ bảo tồn bao đóng, họ bảo tồn bao đóng di truyền và họ bảo tồn bao đóng di truyền yếu trên không gian topo và trên tích đối xứng cấp $n$. Đã đưa ra các kết quả mới rằng, hợp của hai họ HCP (wHCP) cũng là họ HCP (tương ứng, wHCP), và họ wHCP được bảo toàn lên tích đối xứng cấp 2.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Good, S. Macías, “Symmetric products of generalized metric spaces”, *Topology and its applications*, vol. 206, pp. 93–114, 2016.

[2] K. Borsuk, S. Ulam, “On symmetric products of topological spaces”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 37, no. 12, pp. 875–882, 1931.

[3] L. Q. Tuyen, O. V. Tuyen, “On the fold symmetric product of a space with a property network (network)”, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 61, no. 2, pp. 257-263, 2020.