MỘT SỐ BẢO TỒN QUA ÁNH XẠ ĐÓNG, LINDELÖF, LIÊN TỤC VÀ TOÀN ÁNH

SOME PRESERVATIONS BY LINDELÖF, SURJECTIVE, CONTINUOUS AND CLOSED MAPPINGS

Lương Quốc Tuyển[1], Đỗ Hữu Đạt[2*], Lê Đức Anh Quân[2], Phạm Đình Thuận[2]

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[2]*Sinh viên Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[*]Tác giả liên hệ: dohuudat0305@gmail.com

(Nhận bài: 17/6/2021; Chấp nhận đăng: 25/8/2021)

Tóm tắt - Bài toán về sự bảo tồn của một số tính chất topo thông qua các ánh xạ là một trong những bài toán trọng tâm của topo đại cương. Trong [1], C. Liu đã chứng minh rằng không gian với *cs*-mạng σ-hữu hạn địa phương và không gian với cơ sở điểm-đếm được là bảo tồn qua ánh xạ đóng, phủ-dãy và liên tục. Trong [2], L. Q. Tuyen đã chứng minh rằng mỗi ánh xạ đóng phủ-dãy trên không gian với cơ sở yếu điểm-đếm được là ánh xạ 1-phủ-dãy. Gần đây, S. Lin và X. Liu [3] cũng đã chứng minh rằng, không gian với *cn*-mạng hoặc *sp*-mạng được bảo tồn qua ánh xạ giả-mở. Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được rằng không gian với *cn*-mạng (hoặc *sp*-mạng) đếm được địa phương và không gian với *cn*-mạng (hoặc *sp*-mạng) σ-đếm được địa phương bảo tồn qua các ánh xạ sau: (1) Ánh xạ đóng, Lindelöf, liên tục và toàn ánh; (2) Ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh.

Từ khóa - Ánh xạ đóng; ánh xạ hoàn chỉnh; ánh xạ Lindelöf; *cn*-mạng; *sp*-mạng; họ đếm được địa phương

Abstract - The issue about the preservation of some topological properties under mappings has been one of the fundamental problems in general topology. In [1], C. Liu has proved that spaces with σ-locally countable *cs*-network as well as spaces with point-countable base are preserved under continuous, sequence-covering and closed mappings. In [2], L. Q. Tuyen has showed that each sequence covering and closed mapping on spaces with point-countable weak base is a 1-sequence covering mapping. Recently, S. Lin and X. Liu [3] have also demonstrated that spaces with *cn*-network or *sp*-network are preserved under pseudo-opened mappings. In this paper, we have confirmed that spaces with locally countable *cn*-networks (or *sp*-networks) and spaces with σ-locally countable *cn*-networks (or *sp*-networks) are preserved under these following mappings: (1) Lindelöf, surjective, continuous and closed mappings; (2) Surjective, continuous and perfect ones.

Key words - Closed mappings; perfect mappings; Lindelöf mappings; *cn*-networks; *sp*-networks; locally countable collection

1. Giới thiệu

Mạng là một suy rộng của cơ sở đã được A. V. Arhangelskii giới thiệu vào năm 1959, do đó nó linh hoạt hơn và không cần nhiều thông tin "đẹp" như cơ sở. Khái nhiệm mạng đã được E. Michael thu hẹp thành *k*-mạng vào năm 1966. Sau này, bằng cách suy rộng và thu hẹp như vậy, rất nhiều trường hợp riêng của mạng cũng như nhiều lớp không gian metric suy rộng quan trọng được đưa ra nghiên cứu dẫn tới sự hoàn thành và phát triển lý thuyết *k*-mạng (xem [4]).

Trong những năm gần đây, lý thuyết về *k*-mạng đã đóng vai trò quan trọng và thúc đẩy sự phát triển topo đại cương. Nhờ đó, nhiều khái niệm về mạng mới lần lượt được xuất hiện, chẳng hạn như: *cs**-mạng, *cn*-mạng, *cp*-mạng, mạng Pytkeev, mạng Pytkeev chặt, *cs'*-mạng (xem [3, 5]).

Một trong những khía cạnh được các nhà toán học trên thế giới hiện nay quan tâm nhiều là nghiên cứu về mối liên hệ giữa các tính chất mạng trong không gian topo và sự bảo tồn của các tính chất mạng qua các ánh xạ (xem [2, 3, 5]). Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về sự bảo tồn của các *cn*-mạng, *sp*-mạng thông qua các ánh xạ đóng, các ánh xạ hoàn chỉnh.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 2.1.1 ([5]). Giả sử (X,τ) và (Y,σ) là các không gian topo, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma).$ Khi đó,

(1) f được gọi là *liên tục tại* $x\in X$ nếu với mọi lân cận mở V của $f(x)$ trong Y, tồn tại lân cận mở U của x trong X sao cho $f(U)\subset V.$

(2) f được gọi là *liên tục trên* X (hay *liên tục*) nếu nó liên tục tại mọi $x\in X.$

(3) f được gọi là một *ánh xạ đóng* nếu $f(A)$ là tập hợp đóng trong Y với mọi tập hợp đóng A trong $X.$

Định nghĩa 2.1.2 ([5]). Tập con A của không gian topo (X,τ) được gọi là *Lindelöf* nếu với mọi phủ mở của A, tồn tại phủ con đếm được.

Định nghĩa 2.1.3 ([4]). Cho $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma).$ Khi đó,

(1) f được gọi là *ánh xạ Lindelöf* nếu với mọi $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ là tập con Lindelöf trong $X.$

(2) f được gọi là *ánh xạ compact* nếu với mọi $y\in Y$,

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Luong Quoc Tuyen)

[2] Student Faculty of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education (Do Huu Dat, Le Duc Anh Quan, Pham Dinh Thuan)

$f^{-1}(y)$ là tập con compact trong X.

(3) f được gọi là *ánh xạ hoàn chỉnh* nếu f vừa là ánh xạ compact, vừa là ánh xạ đóng.

Định nghĩa 2.1.4 ([4]). Giả sử (X,τ) là một không gian topo và $\Im$ là một phủ gồm các tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) $\Im$ được gọi là họ *đếm được địa phương* của X nếu với mọi $x \in X$, tồn tại lân cận mở V của x sao cho V chỉ giao với nhiều nhất là đếm được phần tử của họ $\Im$.

(2) $\Im$ được gọi là họ *σ-đếm được địa phương* của X nếu $\Im$ được biểu diễn dưới dạng $\Im = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Im_n$, trong đó mỗi $\Im_n$ là họ đếm được địa phương của X.

(3) $\Im$ được gọi là *mạng* của X nếu với mọi $x \in U$ với $U \in \tau$, tồn tại $P \in \Im$ sao cho $x \in P \subset U$.

(4) $\Im$ được gọi là *sp-mạng* của X nếu với mỗi $A \subset X$, $U \in \tau$ và $x \in U \cap \overline{A}$, tồn tại $P \in \Im$ sao cho:

$$x \in P \subset U \text{ và } x \in \overline{P \cap A}.$$

(5) $\Im$ được gọi là *cn-mạng* của X nếu với mỗi lân cận U của x trong X, tập hợp $\bigcup\{P \in \Im : x \in P \subset U\}$ là lân cận của x.

Nhận xét 2.1.5. Trong không gian topo (X,τ) ta có

(1) Mỗi tập compact là tập Lindelöf. Do đó, mỗi ánh xạ compact là ánh xạ Lindelöf.

(2) Họ đếm được địa phương $\Rightarrow$ họ σ-đếm được địa phương.

(3) Cơ sở $\Rightarrow$ *sp*-mạng, *cn*-mạng $\Rightarrow$ mạng ([3]).

Định lí 2.1.6 ([4]). *Giả sử $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là một ánh xạ liên tục. Khi đó, f là ánh xạ đóng khi và chỉ khi với mọi $y \in Y$ và với mọi lân cận mở U của $f^{-1}(y)$, tồn tại lân cận mở V của y sao cho:*

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U.$$

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Nhóm tác giả sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa, khái quát hóa nhằm đưa ra những kết quả mới cho mình.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Định lí 3.1.1. *Giả sử $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là một ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh, $\Im$ là một phủ nào đó của X. Khi đó,*

(1) *Nếu $\Im$ là cn-mạng đếm được địa phương của X, thì $f(\Im)$ là cn-mạng đếm được địa phương của Y.*

(2) *Nếu $\Im$ là sp-mạng đếm được địa phương của X, thì $f(\Im)$ là sp-mạng đếm được địa phương của Y.*

Chứng minh. Giả sử f là ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh, $\Im$ là họ đếm được địa phương của X. Khi đó,

Khẳng định 1: $f(\Im)$ là họ đếm được địa phương của Y.

Thật vậy, giả sử $y \in Y$, khi đó vì $\Im$ là họ đếm được địa phương của X nên với mỗi $x \in f^{-1}(y)$, tồn tại lân cận mở U_x của x sao cho U_x chỉ giao với nhiều nhất là đếm được phần tử của $\Im$. Mặt khác, vì f là ánh xạ Lindelöf nên $f^{-1}(y)$ là tập con Lindelöf của X. Hơn nữa, vì họ

$$\left\{U_x : x \in f^{-1}(y)\right\}$$

là phủ mở của $f^{-1}(y)$ nên tồn tại tập con đếm được $F \subset f^{-1}(y)$ sao cho

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{x\in F} U_x.$$

Bởi vì $\bigcup_{x\in F} U_x$ là tập mở nên $\bigcup_{x\in F} U_x$ là lân cận mở của $f^{-1}(y)$ trong X. Do đó, theo Định lí 2.1.6, tồn tại lân cận mở V của y trong Y sao cho

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x\in F} U_x.$$

Mặt khác, vì mỗi U_x chỉ giao với nhiều nhất là đếm được các phần tử của $\Im$ và F là tập đếm được nên $\bigcup_{x\in F} U_x$ chỉ giao nhiều nhất là đếm được phần tử của $\Im$. Do đó, $f^{-1}(V)$ chỉ giao nhiều nhất đếm được phần tử của $\Im$, kéo theo V chỉ giao nhiều nhất đếm được phần tử của $f(\Im)$. Như vậy, $f(\Im)$ là họ đếm được địa phương.

Khẳng định 2: Nếu $\Im$ là *cn*-mạng của X, thì $f(\Im)$ là *cn*-mạng của Y.

Thật vậy, giả sử $y \in Y$ và U là lân cận của y trong Y. Khi đó, ta có $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$. Bởi vì f liên tục nên $f^{-1}(U)$ là lân cận của $f^{-1}(y)$ trong X. Mặt khác, vì $\Im$ là *cn*-mạng của X nên

$$W_x = \bigcup\{P \in \Im : x \in P \subset f^{-1}(U)\} \quad (1)$$

là một lân cận của x trong X với mọi $x \in f^{-1}(y)$. Suy ra tập hợp

$$\bigcup\{W_x : x \in f^{-1}(y)\}$$

là lân cận của $f^{-1}(y)$ trong X. Bởi vì f là ánh xạ đóng nên theo Định lí 2.1.6, tồn tại lân cận mở V của y trong Y sao cho

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup\{W_x : x \in f^{-1}(y)\}.$$

Bởi thế, ta suy ra rằng

$$y \in V \subset f(\bigcup\{W_x : x \in f^{-1}(y)\}). \quad (2)$$

Hơn nữa, ta có

$$f\left(\bigcup(W_x : x\in f^{-1}(y)\right) = \bigcup\left\{f(P) : y\in f(P)\subset U\right\}. \quad (3)$$

Thật vậy,

(a) Giả sử rằng

$$z\in f\left(\bigcup(W_x : x\in f^{-1}(y)\right).$$

Khi đó, vì

$$z\in f\left(\bigcup(W_x : x\in f^{-1}(y)\right)=\bigcup\{f(W_x) : x\in f^{-1}(y)\}$$

nên tồn tại $x\in f^{-1}(y)$ sao cho $z\in f(W_x)$. Theo cách đặt của W_x trong (1), tồn tại $P\in\Im$ sao cho

$$x\in P\subset f^{-1}(U) \text{ và } z\in f(P).$$

Do đó, $y=f(x)\in f(P)\subset U$,

kéo theo $z\in f(P)\subset\bigcup\{f(P) : y\in f(P)\subset U\}$.

(b) Giả sử rằng

$$z\in\bigcup\{f(P) : y\in f(P)\subset U\}.$$

Khi đó, tồn tại $P\in\Im$ sao cho

$$y\in f(P)\subset U \text{ và } z\in f(P).$$

Suy ra tồn tại $x\in P$ sao cho $y=f(x)$ và

$$x\in f^{-1}(y)\subset P\subset f^{-1}(U).$$

Do đó, ta thu được

$$P\in\{P\in\Im : x\in P\subset f^{-1}(U)\}.$$

Điều này suy ra rằng

$$z\in f(P)\subset f\left(\bigcup\{P\in\Im : x\in P\subset f^{-1}(\mathrm{U})\}\right) = f(W_x)\subset f\left(\bigcup\{W_x : x\in f^{-1}(y)\}\right).$$

Như vậy, (3) đã được chứng minh.

Cuối cùng, vì V là lân cận của y nên nhờ (2) và (3) suy ra

$$\bigcup\{f(P) : y\in f(P)\subset U\}$$

là lân cận của y trong Y. Do đó, $f(\Im)$ là *cn*-mạng của Y.

Khẳng định 3: Nếu $\Im$ là *sp*-mạng của X, thì $f(\Im)$ là sp-mạng của Y.

Giả sử $A\subset Y$, $U\in\sigma$ và $y\in U\cap\overline{A}$. Ta chứng minh rằng tồn tại

$$x\in f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng

$$f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}=\varnothing.$$

Khi đó,

$$f^{-1}(y)\subset X\setminus\overline{f^{-1}(A)}.$$

Bởi vì $X\setminus\overline{f^{-1}(A)}\in\tau$ và f là ánh xạ đóng nên theo Định lí 2.1.6, tồn tại lân cận mở V của y trong Y sao cho

$$f^{-1}(V)\subset X\setminus\overline{f^{-1}(A)}.$$

Mặt khác, vì f là toàn ánh nên

$$y\in V\subset f\left(X\setminus\overline{f^{-1}(A)}\right)=Y\setminus f\left(\overline{f^{-1}(A)}\right)=Y\setminus\overline{A}.$$

Điều này mâu thuẫn với $y\in U\cap\overline{A}$. Như vậy, tồn tại

$$x\in f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}.$$

Tiếp theo, giả sử W là lân cận mở của x sao cho $f(W)\subset U$. Bởi vì $\Im$ là *sp*-mạng của X nên tồn tại $P\in\Im$ sao cho

$$x\in P\subset W \text{ và } x\in\overline{P\cap f^{-1}(A)}.$$

Do đó, ta có

$$y=f(x)\in f(P)\subset U.$$

Hơn nữa, bởi vì f là ánh xạ liên tục nên

$$y\in f\left(\overline{P\cap f^{-1}(A)}\right)\subset\overline{f(P)\cap f(f^{-1}(A))} = \overline{f(P)\cap A}.$$

Như vậy, $f(\Im)$ là *sp*-mạng của Y.

Từ các khẳng định 1, 2 và 3 ta suy ra rằng định lí được chứng minh.

Hệ quả 3.1.2. *Giả sử $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là một ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh, $\Im$ là một phủ của X. Khi đó,*

(1) Nếu $\Im$ là cn-mạng đếm được địa phương của X, thì $f(\Im)$ là cn-mạng đếm được địa phương của Y.

(2) Nếu $\Im$ là sp-mạng đếm được địa phương của X, thì $f(\Im)$ là sp-mạng đếm được địa phương của Y.

Chứng minh. Giả sử f là ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh. Khi đó, theo Nhận xét 2.1.5 ta suy ra f là ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh. Như vậy, nhờ Định lí 3.1.1, ta suy ra rằng hệ quả được chứng minh.

Định lí 3.1.3. *Giả sử $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là một ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh, $\Im$ là một phủ nào đó của X. Khi đó,*

(1) *Nếu $\Im$ là cn-mạng σ-đếm được địa phương của X, thì $f(\Im)$ là cn-mạng σ-đếm được địa phương của Y.*

(2) *Nếu $\Im$ là sp-mạng σ-đếm được địa phương của X, thì $f(\Im)$ là sp-mạng σ-đếm được địa phương của Y.*

Chứng minh. Giả sử f là ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh, dạng $\Im=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Im_n$, trong đó mỗi $\Im_n$ là họ đếm được địa phương của X. Khi đó, theo Khẳng định 1 trong chứng minh của Định lí 3.1.1 ta suy ra mỗi $f(\mathfrak{I}_n)$ là họ đếm được địa phương của X. Như vậy,

$$f(\mathfrak{I})=\bigcup_{n=1}^{\infty} f(\mathfrak{I}_n)$$

là họ $\sigma-$đếm được địa phương của Y. Hơn nữa,

(1) Nếu $\mathfrak{I}$ là *cn*-mạng của X, thì theo Khẳng định 2 trong chứng minh của Định lí 3.1.1 ta suy ra $f(\mathfrak{I})$ là *cn*-mạng Y.

(2) Nếu $\mathfrak{I}$ là *sp*-mạng của X, thì theo Khẳng định 3 trong chứng minh của Định lí 3.1.1 ta suy ra $f(\mathfrak{I})$ là *sp*-mạng Y.

Như vậy, định lí được chứng minh.

Hệ quả 3.1.4. *Giả sử* $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ *là một ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh,* $\mathfrak{I}$ *là một phủ nào đó của* X*. Khi đó,*

(1) *Nếu* $\mathfrak{I}$ *là cn-mạng* σ*-đếm được địa phương của* X*, thì* $f(\mathfrak{I})$ *là cn-mạng* σ*-đếm được địa phương của* Y.

(2) *Nếu* $\mathfrak{I}$ *là sp-mạng* σ*-đếm được địa phương của* X*, thì* $f(\mathfrak{I})$ *là sp-mạng* σ*-đếm được địa phương của* Y.

Chứng minh. Giả sử f là ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh. Khi đó, theo Nhận xét 2.1.5 f là ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh. Như vậy, nhờ Định lí 3.1.3, ta suy ra rằng hệ quả được chứng minh.

3.2. Ví dụ

3.2.1. Ví dụ 1

Tồn tại ánh xạ liên tục, compact (Lindelöf), không đóng sao cho nó không bảo toàn *sp*-mạng đếm được địa phương (σ-đếm được địa phương), và không bảo toàn *cn*-mạng (σ-đếm được địa phương).

Thật vậy, trên tập số thực $\mathbb{R}$ ta xét topo rời rạc $\Omega=2^{\mathbb{R}}$, topo thô $\wp=\{\varnothing,\mathbb{R}\}$ và

$$f:(\mathbb{R},\Omega)\to(\mathbb{R},\wp)$$

được cho bởi $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó,

(1) Giả sử $U\in\wp$, khi đó vì Ω là topo rời rạc nên $f^{-1}(U)\in\Omega$. Như vậy, f là ánh xạ liên tục.

(2) Giả sử $x\in\mathbb{R}$, khi đó rõ ràng rằng $f^{-1}(x)=\{x\}$ là tập compact trong $(\mathbb{R},\Omega)$. Như vậy, f là một ánh xạ compact. Nhờ Nhận xét 2.1.5, f là ánh xạ Lindelöf.

(3) Ta lấy $A=\{x\}$, khi đó $f(A)=\{x\}$. Bởi vì Ω là topo rời rạc nên A đóng $(\mathbb{R},\Omega)$. Mặt khác, vì:

$$\mathbb{R}\setminus f(A)=(-\infty,x)\cup(x,+\infty)\notin\wp$$

nên ta suy ra $f(A)$ không đóng trong $(\mathbb{R},\wp)$. Như vậy, f không là ánh xạ đóng.

(4) Ta lấy $\mathfrak{I}=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$, khi đó vì Ω là topo rời rạc nên $\mathfrak{I}$ là cơ sở của $(\mathbb{R},\Omega)$. Theo Nhận xét 2.1.5 ta suy ra $\mathfrak{I}$ vừa là *cn*-mạng, vừa là *sp*-mạng của $(\mathbb{R},\Omega)$. Hơn nữa, $\mathfrak{I}$ đếm được địa phương của $(\mathbb{R},\Omega)$. Thật vậy, giả sử $x\in\mathbb{R}$, khi đó nếu ta lấy $V=\{x\}$, thì V là lân cận mở của x và V giao với đúng một phần tử của $\mathfrak{I}$. Theo Nhận xét 2.1.5 ta cũng suy ra $\mathfrak{I}$ là họ σ-đếm được địa phương của $(\mathbb{R},\Omega)$.

Tuy nhiên, $f(\mathfrak{I})=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$ không là họ σ-đếm được địa phương của $(\mathbb{R},\wp)$. Thật vậy, nếu ta lấy $x=0$, thì do $\wp$ là topo thô nên x chỉ có duy nhất một lân cận mở $V=X$. Bây giờ, giả sử $f(\mathfrak{I})$ là họ σ-đếm được địa phương của $(\mathbb{R},\wp)$. Khi đó, $f(\mathfrak{I})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}_n$, trong đó mỗi $\mathfrak{R}_n$ là họ đếm được địa phương trong $(\mathbb{R},\wp)$. Bởi vì $f(\mathfrak{I})$ là tập quá đếm được nên tồn tại $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\mathfrak{R}_n$ là tập quá đếm được. Mặt khác, vì V giao mọi phần tử của $\mathfrak{R}_n$ nên $\mathfrak{R}_n$ không là họ đếm được địa phương, đây là một mâu thuẫn.

Nhờ Nhận xét 2.1.5 ta cũng suy ra rằng $f(\mathfrak{I})$ không là họ đếm được địa phương của $(\mathbb{R},\wp)$.

3.2.2. Ví dụ 2

Tồn tại ánh xạ liên tục, không compact (không Lindelöf), đóng sao cho nó không bảo toàn *sp*-mạng đếm được địa phương (σ-đếm được địa phương), và không bảo toàn *cn*-mạng (σ-đếm được địa phương).

Thật vậy, trên tập số thực $\mathbb{R}$ ta xét $\Omega=2^{\mathbb{R}}$ là topo rời rạc trên $\mathbb{R}$ và

$$f:(\mathbb{R},\Omega)\to(\mathbb{R},\Omega)$$

được cho bởi $f(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó,

(1) Giả sử $U\in\Omega$, khi đó vì Ω là topo rời rạc nên $f^{-1}(U)\in\Omega$. Như vậy, f là ánh xạ liên tục.

(2) Ta có $\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$ là phủ mở của $f^{-1}(0)=\mathbb{R}$ trong không gian $(\mathbb{R},\Omega)$ nhưng không có phủ con đếm được. Do đó, f không là ánh xạ Lindelöf. Nhờ Nhận xét 2.1.5 ta suy ra f không là ánh xạ compact.

(3) Giả sử A là tập đóng trong $(\mathbb{R},\Omega)$. Khi đó, vì Ω là topo rời rạc nên $f(A)=\{0\}$ đóng $(\mathbb{R},\Omega)$. Như vậy, f là ánh xạ đóng.

(4) Ta lấy $\mathfrak{I}=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$, khi đó theo Ví dụ 3.1.5, $\mathfrak{I}$ vừa là *cn*-mạng, vừa là *sp*-mạng đếm được địa phương (σ-đếm được địa phương) của $(\mathbb{R},\Omega)$.

Tuy nhiên, $f(\mathfrak{I})=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$ không là mạng của $(\mathbb{R},\Omega)$. Thật vậy, bởi vì $f(\mathfrak{I})=\{\{0\}\}$ nên với $x=1$ và lân cận mở $V = X$, thì không tồn tại $F \in f(\Im)$ sao cho $x \in F \subset V$. Nhờ Nhận xét 2.1.5 (3), $f(\Im)$ không là *sp*-mạng cũng không là *cn*-mạng của $(\mathbb{R}, \Omega)$.

3.2.3. Ví dụ 3

Tồn tại ánh xạ không liên tục, compact (Lindelöf), đóng sao cho nó không bảo toàn *sp*-mạng đếm được địa phương (σ-đếm được địa phương), và không bảo toàn *cn*-mạng (σ-đếm được địa phương).

Thật vậy, trên tập số thực $\mathbb{R}$ ta xét topo rời rạc $\Omega = 2^{\mathbb{R}}$, topo thô $\wp = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ và

$$f : (\mathbb{R}, \wp) \to (\mathbb{R}, \Omega)$$

được cho bởi $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó,

(1) Ta lấy $U = \{0\}$, khi đó vì Ω là topo rời rạc nên $U \in \Omega$. Mặt khác, vì $f^{-1}(0) = \{0\} \notin \wp$ nên ta suy ra f không là ánh xạ liên tục.

(2) Giả sử $x \in \mathbb{R}$, khi đó rõ ràng rằng $f^{-1}(x) = \{x\}$ là tập compact trong $(\mathbb{R}, \wp)$. Như vậy, f là ánh xạ compact. Theo Nhận xét 2.1.5 ta suy ra f là ánh xạ Lindelöf.

(3) Giả sử A là tập đóng trong $(\mathbb{R}, \wp)$. Khi đó, vì Ω là topo rời rạc nên $f(A)$ đóng $(\mathbb{R}, \Omega)$. Do đó, f là ánh xạ đóng.

(4) Ta lấy $\Im = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, khi đó rõ ràng rằng $\Im$ là cơ sở đếm được địa phương của $(\mathbb{R}, \Omega)$. Nhờ Nhận xét 2.1.5 ta suy ra $\Im$ vừa là *cn*-mạng, vừa là *sp*-mạng đếm được địa phương (σ-đếm được địa phương) của $(\mathbb{R}, \Omega)$.

Tuy nhiên, nếu ta lấy $V = \{0\}$, thì do Ω là topo rời rạc nên ta suy ra V là lân cận mở của 0 trong $(\mathbb{R}, \Omega)$. Mặt khác, bởi vì $f(\Im) = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ nên ta suy ra không tồn tại $F \in f(\Im)$ sao cho $0 \in F \subset V$. Như vậy, $f(\Im)$ không là mạng của $(\mathbb{R}, \Omega)$. Theo Nhận xét 2.1.5 ta suy ra $f(\Im)$ không là *cn*-mạng, *sp*-mạng của $(\mathbb{R}, \Omega)$.

3.2.4. Ví dụ 4

Tồn tại ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và tồn tại ánh xạ hoàn chỉnh liên tục.

Thật vậy, trên tập số thực $\mathbb{R}$ ta xét $\Omega = 2^{\mathbb{R}}$ là topo rời rạc trên $\mathbb{R}$ và

$$f : (\mathbb{R}, \Omega) \to (\mathbb{R}, \Omega)$$

được cho bởi $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó,

(1) Giả sử $U \in \Omega$, khi đó vì Ω là topo rời rạc nên $f^{-1}(U) \in \Omega$. Như vậy, f là ánh xạ liên tục.

(2) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f^{-1}(x) = \{x\}$ là tập compact trong $(\mathbb{R}, \Omega)$. Nhờ Nhận xét 2.1.5, f là ánh xạ Lindelöf.

(3) Giả sử A là tập đóng trong $(\mathbb{R}, \Omega)$. Khi đó, vì Ω là topo rời rạc nên $f(A) = A$ đóng $(\mathbb{R}, \Omega)$. Suy ra f là ánh xạ đóng.

Như vậy, f là ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục.

3.3. Đánh giá

Các kết quả mới trong bài báo được thể hiện ở Định lí 3.1.1, Hệ quả 3.1.2, Định lí 3.1.3 và Hệ quả 3.1.4. Trong đó:

- Định lí 3.1.1 là sự bảo tồn của không gian với *cn*-mạng (hoặc *sp*-mạng) đếm được địa phương qua ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh.
- Hệ quả 3.1.2 là sự bảo tồn của không gian với *cn*-mạng (hoặc *sp*-mạng) đếm được địa phương qua ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh.
- Định lí 3.1.3 là sự bảo tồn của không gian với *cn*-mạng (hoặc *sp*-mạng) σ-đếm được địa phương qua ánh xạ Lindelöf, đóng, liên tục và toàn ánh.
- Hệ quả 3.1.4 là sự bảo tồn của không gian với *cn*-mạng (hoặc *sp*-mạng) σ-đếm được địa phương thông qua ánh xạ hoàn chỉnh, liên tục và toàn ánh.

Ngoài ra, chúng tôi đưa vào một số ví dụ nhằm làm sáng tỏ hơn nội dung các kết quả chính.

4. Kết luận

Trong nghiên cưu này, nhóm tác giả đã đưa ra và chứng minh chi tiết một số kết quả mới liên quan đến sự bảo tồn của các tính chất mạng thông qua các ánh xạ đóng và các ánh xạ hoàn chỉnh. Nhờ đó, các kết quả của bài báo đã góp phần làm phong phú cho lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết mạng, lý thuyết *k*-mạng trong topo đại cương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Liu, "Notes on closed mappings", *Houston Journal of Mathematics*, 33 (1), (2007), 249-259.

[2] L. Q. Tuyen, "Remarks on sequence-covering closed maps", *Fasciculi Mathematici*, 53, (2014), 161-165.

[3] S. Lin, X. Liu, "Notes on pseudo-open mappings and sequentially quotient mappings", *Topology and its Applications*, 272, (2020), 107-090.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, 1989.

[5] X. Liu, C. Liu, S. Lin, "Strict Pytkeev networks with sensors and their applications in topological groups", *Topology and its Applications*, 258, 2019, 58–78.