MỘT VÀI MỞ RỘNG CỦA ĐỊNH LÝ LIOUVILLE

SEVERAL EXTENSIONS OF LIOUVILLE'S THEOREM

Lê Hoàng Trí[1], Dương Quang Việt Hà[2*]

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[2]*Lớp 18 ST, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[*]Tác giả liên hệ: duongvietha5@gmail.com

(Nhận bài: 09/8/2021; Chấp nhận đăng: 21/10/2021)

Tóm tắt - Định lý Liouville được phát biểu rằng mỗi hàm nguyên bị chặn là một hàm hằng, đây là một trong những định lý cơ bản của ngành Giải tích phức, ứng dụng nó người ta chứng minh được định lý cơ bản của Đại số. Có nhiều mở rộng cho định lý Liouville này. Trong bài báo này, nhóm tác giả sẽ mở rộng định lý Liouville theo hướng xét ảnh của hàm nguyên này trên một lân cận của vô cùng. Mỗi hàm bị chặn có ảnh nằm trong một hình tròn, do đó phần bù của nó có vô số phần tử. Trong [1], đã chứng minh rằng, nếu thay giả thiết bị chặn của hàm nguyên bằng giả thiết phần bù ảnh của hàm nguyên có chứa hai điểm phân biệt thì kết luận của định lý Liouville vẫn đúng (định lý Picard Nhỏ). Do đó, định lý Picard Nhỏ là một mở rộng của định lý Liouville. Bài báo này cũng mở rộng tương tự như định lý Picard Nhỏ, nhưng thay vì xét ảnh của hàm nguyên ta xét ảnh của hàm nguyên này trên một lân cận của vô cùng.

Từ khóa - Hàm Giải tích; Hàm nguyên; Lân cận; Lân cận của vô cùng; Các điểm bất thường

Abstract - Liouville's theorem states that every bounded entire function is a constant function. This is among the most fundamental theorems in Complex Analysis; it is applied to prove the fundamental theorem of Algebra. There have been multiple directions of extension for Liouville's theorem. In this paper, the authors take the direction of observing this entire function's image restricted on a neighborhood of infinity. Since every bounded function's image lies inside a circle, the image's complement is infinite. In [1], it is showed that, if we replace the bounded assumption by assuming the entire function image's complement contains at least 2 distinct elements, Liouville's theorem still holds (Little Picard's theorem). Therefore, Little Picard's theorem is an extension of Liouville's theorem. This paper's extension is similar to Little Picard's theorem but instead of examining the image of the entire function, we examine this entire function's image on a neighborhood of infinity.

Key words - Analytic function; Entire function; Neighborhood; Neighborhood of infinity; Singular points

1. Đặt vấn đề

Định lý cơ bản của Đại số phát biểu rằng, mỗi đa thức hệ số phức có bậc $n \geq 1$ thì có ít nhất một nghiệm phức. Định lý này cũng có một dạng khác là mỗi đa thức hệ số phức bậc $n \geq 1$ có đúng n nghiệm phức (kể cả các nghiệm bội) (xem [2], trang 545). Người ta chứng minh định lý này bằng cách dùng Đại số nhưng cũng có thể chứng minh bằng Giải tích nhờ định lý Liouville.

Định lý Liouville phát biểu rằng, một hàm nguyên, bị chặn là hàm hằng (xem [1], trang 122) (cũng có thể xem [6] hoặc [7]).

Ở đây hàm nguyên là hàm giải tích từ mặt phẳng phức vào chính nó.

Có vài mở rộng cho định lý Liouville (xem [1], [3], [4], [5]). Trong [1] (trang 306-308), người ta chứng minh định lý Picard Nhỏ được phát biểu như sau.

Định lý (Định lý Picard Nhỏ). Cho $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm nguyên mà có ít nhất 2 điểm phân biệt nằm ngoài $f(\mathbb{C})$ thì f là hàm hằng.

Đây thực sự là một mở rộng của định lý Liouville. Định lý này mở rộng theo hướng xét $f(\mathbb{C})$ là ảnh của toàn mặt phẳng phức qua hàm nguyên f, trong bài báo này ta xét ảnh của hàm nguyên được hạn chế trên một lân cận của vô cùng.

Với mỗi $M > 0, \{ z \in \mathbb{C} / \ |z| > M\}$ được gọi là một lân cận của vô cùng.

Ta có nhận xét rằng, nếu f là một hàm đa thức với bậc lớn hơn hay bằng 1 (mỗi hàm đa thức là một hàm nguyên) thì $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$, do đó tồn tại một lân cận của vô cùng có ảnh qua f không chứa vô số điểm nên không thể thay giả thiết "có ít nhất 2 điểm phân biệt nằm ngoài $f(\mathbb{C})$" trong định lý Picard Nhỏ bằng giả thiết "có ít nhất hai điểm phân biệt nằm ngoài ảnh của f được hạn chế trên một lân cận của vô cùng" được.

Nội dung của bài báo này là chứng minh định lý Picard Nhỏ theo cách khác trong [1] và chứng minh các định lý sau mở rộng của định lý Liouville.

2. Cơ sở lý thuyết

Trong mục này, ta sẽ nêu định nghĩa các điểm bất thường (cô lập) và nêu các tính chất cần dùng trong bài báo (xem [7]).

Định nghĩa 2.1. Một phần tử $a \in \mathbb{C}$ được gọi là một điểm bất thường (cô lập) của hàm biến phức f nếu f giải tích trên một lân cận thủng của a.

Các điểm bất thường được phân ra làm ba loại như sau:

- Điểm bất thường bỏ được (khử được)

Cho a là một điểm bất thường của hàm biến phức f, a được gọi là một điểm bất thường bỏ được của f nếu có thể bổ sung $f(a) \in \mathbb{C}$ để được thành một hàm giải tích trên một lân cận của a.

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Le Hoang Tri)

[2] Student of Mathematics, The University of Danang – University of Science and Education (Duong Quang Viet Ha)

- Cực điểm

Cho a là một điểm bất thường của hàm biến phức f, a được gọi là một cực điểm của f nếu $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.

- Điểm bất thường cốt yếu

Cho a là một điểm bất thường của hàm biến phức f, a được gọi là một điểm bất thường cốt yếu của f nếu không tồn tại giới hạn của hàm $f(z)$ khi $z \to a$ kể cả giá trị vô cùng.

Nếu a là một điểm bất thường (cô lập) của hàm f thì f giải tích trên một lân cận thủng U^* của a, từ đó ta có khai triển Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.z^n, z \in U^*$$

Ta có các mệnh đề sau đây:

<u>Mệnh đề 1</u>**:** Cho a là một điểm bất thường (bỏ được) của hàm biến phức f. Khi đó, các điều kiện sau đây tương đương:

(a) a là một điểm bất thường bỏ được của f;

(b) $\exists \lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

(c) f bị chặn trong một lân cận thủng của a;

(d) $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Mệnh đề 2</u>**:** Cho a là một điểm bất thường (bỏ được) của hàm biến phức f. Khi đó, các điều kiện sau đây tương đương:

(a) a là một cực điểm của f;

(b) $\exists n \in \mathbb{N}^* : a_n \neq 0, \exists m \in \mathbb{N}^* : \forall p \geq m, a_p = 0$.

<u>Mệnh đề 3</u>**:** Cho a là một điểm bất thường (bỏ được) của hàm biến phức f. Khi đó, các điều kiện sau đây tương đương:

(a) a là một điểm bất thường cốt yếu của f;

(b) $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists p \geq m : a_p \neq 0$.

Ta cũng sử dụng định lý sau:

Định lý 2.2. (Định lý Picard lớn): Trong một lân cận bé bao nhiêu tùy ý của điểm bất thường cốt yếu hàm $f(z)$ nhận vô số lần mọi giá trị hữu hạn ngoại trừ nhiều nhất một giá trị (gọi là giá trị ngoại lệ Picard).

Khi $a = \infty$ thì các kết quả trên vẫn đúng.

3. Giải quyết vấn đề

Định lý 3.1. (Định lý Picard Nhỏ). Cho $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm nguyên mà có ít nhất 2 điểm phân biệt nằm ngoài $\boldsymbol{f}(\mathbb{C})$ thì $\boldsymbol{f}$ là hàm hằng.

<u>Chứng minh</u>:

Trong phần này ta chứng minh định lý 3.1 bằng cách sử dụng các tính chất của điểm bất thường cốt yếu và cực điểm như sau.

Cho f là một hàm nguyên thì ∞ là một điểm bất thường cô lập của f.

+ Nếu ∞ là điểm bất thường cốt yếu nên theo định lý Picard Lớn phát biểu rằng: "Trong lân bé bao nhiêu tùy ý của điểm bất thường cốt yếu hàm $f(z)$ nhận vô số lần mọi giá trị hữu hạn ngoại trừ nhiều nhất một giá trị (gọi là giá trị ngoại lệ Picard)", xem [7], bất kỳ lân cận U của ∞, $f(U)$ có phần bù chứa không quá 1 điểm, nên $f(\mathbb{C})$ cũng thế, mà $f(\mathbb{C})$ có phần bù chứa 2 điểm phân biệt nên vô lý.

+ Nếu ∞ là cực điểm của f, bằng cách khai triển Laurent của hàm f trong một lân cận của vô cùng thì $\exists m \in \mathbb{N}^*, \exists M > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\frac{1}{z^n} + b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m, |z| > M$$

với $a_n \in \mathbb{C}; \forall n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$.

Đặt $g(z) = f(z) - b_1 z - \cdots - b_m z^m$; $\forall z \in \mathbb{C}$ thì g cũng là một hàm nguyên.

Ta có $\lim_{z\to\infty} g(z) = b_0 \Rightarrow \exists M' > M$ sao cho g bị chặn trên tập $\{ z \in \mathbb{C} / |z| \geq M'\}$. Do g giải tích nên g liên tục; Do đó, g bị chặn trên tập $\{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq M'\}$ compact. Từ đó g bị chặn.

Áp dụng định lý Liouville, g là hàm hằng và bằng b_0; từ đó:

$$f(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m;\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Với mọi $w \in \mathbb{C}$, do định lý cơ bản của Đại số phương trình $f(z) = w$ có nghiệm nên $f(U) = \mathbb{C}$ mà $f(U)$ có phần bù chứa 2 điểm phân biệt nên vô lý.

Từ các lập luận trên ∞ là điểm bất thường bỏ được của f, nên $\exists \lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ nên f là hàm bị chặn, sử dụng định lý Liouville, suy ra f là hàm hằng. ■

Định lý 3.2: Cho f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm nguyên nếu tồn tại một lân cận của vô cùng U của $\mathbb{C}$ mà f(U) nằm trong một nửa mặt phẳng thì f là hàm hằng.

<u>Chứng minh</u>:

Cho f là hàm nguyên mà tồn tại một lân cận U của ∞ sao cho $f(U)$ nằm trong một nửa mặt phẳng D của $\mathbb{C}$, cho h: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một phép quay mà $Re\, h(D)$ bị chặn trên, do h là một phép quay nên nó là hàm giải tích và tồn tại hàm ngược cũng giải tích, ta thấy $h \circ f$ là một hàm nguyên, $Re\, h \circ f(U)$ bị chặn trên, nếu ta chứng minh được $h \circ f$ là hàm hằng thì $f = h^{-1} \circ h \circ f$ cũng thế. Bởi vậy, bằng cách xét hợp của h với f, không giảm tổng quát ta có thể thay giả thiết $f(U)$ nằm trong một nửa mặt phẳng D của mặt phẳng phức bằng giả thiết $Ref(U)$ bị chặn trên.

Do $Ref(U)$ bị chặn trên nên

$$\exists M > 0 : \forall z \in U, Ref(z) \leq M \qquad (1)$$

+ Nếu ∞ là điểm bất thường cốt yếu của f.

Theo định lý Picard Lớn phần bù $f(U)$ chứa không quá một điểm nên điều $\forall z \in U, Ref(z) \leq M$ là không thể xảy ra.

+ Nếu ∞ là một cực điểm của f.

Bằng cách khai triển Laurent trong một lân cận của vô cùng ta tìm được một lân cận của vô cùng

$$V = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| > \alpha\}\ (\alpha > 0), \text{ mà } V \subset U$$

và $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\frac{1}{z^n} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$, $z \in$ V; ở đây $b_n \in \mathbb{C}$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*, a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$.

Ta có $\lim_{z\to\infty}(f(z) - a_1z - \cdots - a_mz^m) = a_0$. (2)

Do (2), $\exists\beta > \alpha: Khi\ |z| > \beta$ thì

$|f(z) - a_1z - \cdots - a_mz^m - a_0| < 1$.

Ta đặt $V' = \{z \in \mathbb{C}/|z| > \beta\}$ thì $V' \subset V \subset U$ và $\forall z \in V', |f(z) - a_1z - \cdots - a_mz^m - a_0| < 1$ nên $|Ref(z) - Re(a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m)|$

$\leq |f(z) - a_0 - a_1z - \cdots - a_mz^m| < 1$

Từ đó $Re(a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m) - Ref(z) < 1$.

Hay:

$Re(a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m) < 1 + Ref(z) \leq 1 + M$. (3)

Chọn:

$w = |a_0| + |a_1|\beta + \cdots + |a_m|\beta^m + M + 2 > 0$. (4)

Do mỗi đa thức hệ số phức có bậc lớn không đều có nghiệm nên $\exists t \in \mathbb{C}$ sao cho

$a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m = w$.

Ta thấy $t \neq 0$ (vì nếu $t = 0$ thì $a_0 = w$ nên $|a_0| = |w| = w$, do (4) $|a_1|\beta + \cdots + |a_m|\beta^m + M + 2 = 0$ là điều vô lý).

Giả sử $|t| \leq \beta \Rightarrow |w| = |a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m|$

$\leq |a_0| + |a_1||t| + \cdots + |a_m||t|^m$

$\leq |a_0| + |a_1|\beta + \cdots + |a_m|\beta^m$

$< |a_1|\beta + \cdots + |a_m|\beta^m + M + 2 = w$

nên vô lý, vì thế $|t| > \beta$ nên $t \in V'$.

Từ (3) suy ra Re $(a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m) \leq 1 + M$.

Do đó Rew $\leq 1 + M$

Mà $Rew = w = |a_0| + |a_1|\beta + \cdots + |a_m|\beta^m + M + 2$ nên vô lý. Do đó, ∞ không thể là một cực điểm của f.

Do các lập luận trên ∞ là một điểm bất thường bỏ được của f, nên $\exists \lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ nên f là hàm bị chặn, sử dụng định lý Liouville, ta thấy f là hàm hằng. ■

Định lý 3.3. Cho $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm nguyên nếu tồn tại một lân cận của vô cùng U của $\mathbb{C}$ mà f(U) không giao với một đường thẳng trong mặt phẳng phức thì f là hàm hằng.

<u>*Chứng minh*</u>:

Ta đặt $U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > \alpha\}$ với $\alpha > 0$, cho d là một đường thẳng trong mặt phẳng phức không giao với $f(U)$.

Ta thấy U là tập liên thông, f là một hàm giải tích nên liên tục, từ đó $f(U)$ là tập liên thông trong mặt phẳng phức và nằm trong $\mathbb{C}\backslash d$, cho D_1, D_2 là hai nửa mặt phẳng mở trong mặt phẳng phức được chia ra bởi d, nếu $f(U) \cap D_1 \neq \emptyset$ và $f(U) \cap D_2 \neq \emptyset$ thì các tập này là các tập khác rỗng, mở trong không gian topo $f(U)$ (đối với topo cảm sinh từ $\mathbb{C}$), lại có hợp bằng $f(U)$; điều này mâu thuẫn với tính liên thông của $f(U)$. Do đó, $f(U)$ nằm trong một trong hai nửa mặt phẳng D_1 hoặc D_2; sử dụng định lý 3.2, định lý 3.3 được chứng minh xong. ■

Định lý 3.4. Cho $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm nguyên nếu tồn tại một lân cận của vô cùng U của $\mathbb{C}$ mà f(U) không giao với một nửa đường thẳng trong mặt phẳng phức nào đó thì f là hàm hằng.

<u>*Chứng minh:*</u>

Cho a là nửa đường thẳng ở trong định lý 3.4, cho $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là ánh xạ hợp của một phép quay và một phép tịnh tiến sao cho ảnh của a qua ánh xạ h là tập

$a' = \{z \in \mathbb{C}: Imz = 0, Rez \leq 0\}$.

Do các phép quay và các phép tịnh tiến là các hàm giải tích, các hàm ngược cũng giải tích nên h cũng thế. Bằng cách thay hàm f bởi hàm hợp của f và h, giả thiết $f(U)$ không giao với a có thể thay bởi $f(U)$ không giao với a'.

Bây giờ cho $\varphi: \mathbb{C}\backslash a' \to D$ với $D = \{w \in \mathbb{C}: Rew > 0\}$ được xác định bởi $\varphi(z) = \sqrt{|z|}(cos\frac{argz}{2} + isin\frac{argz}{2})$, với mỗi $z \in \mathbb{C}\backslash a'$; Khi đó $\varphi: \mathbb{C}\backslash a' \to D$ là hàm giải tích song ánh và có hàm ngược là $\phi: D \to \mathbb{C}\backslash a'$ được xác định bởi $\phi(w) = w^2$, với mỗi $w \in D$, hàm này cũng giải tích.

Hàm $\varphi \circ h$ là hàm giải tích có ảnh nằm trong một nửa mặt phẳng của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, nên theo định lý 3.2, $\varphi \circ h$ là một hàm hằng, do đó $h = \phi \circ \varphi \circ h$ cũng là một hàm hằng.

Định lý 3.5. Cho $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm nguyên nếu tồn tại một lân cận của vô cùng U và tồn tại một dãy $\{z_n\} \to \infty$ mà $z_n \in \mathbb{C}\backslash f$(U) với mỗi $n \in N^*$ thì f là hàm hằng.

<u>*Chứng minh*</u>:

Cho f là hàm nguyên mà tồn tại một lân cận U của ∞ và tồn tại một dãy $\{z_n\} \to \infty$ mà $z_n \in \mathbb{C}\backslash f$(U) với mỗi $n \in N^*$.

+ Nếu ∞ là điểm bất thường cốt yếu của f, theo định lý Picard Lớn phần bù f(U) chứa không quá một điểm nên tồn tại một dãy $\{z_n\} \to \infty$ mà $z_n \in \mathbb{C}\backslash f$(U) với mỗi $n \in N^*$ là điều không thể xảy ra.

+ Nếu ∞ là cực điểm của f, bằng cách khai triển Laurent của hàm f trong một lân cận của vô cùng thì $\exists m \in \mathbb{N}^*, \exists M > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\frac{1}{z^n} + b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m, |z| > M$$

với $a_n \in \mathbb{C}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$.

Đặt $g(z) = f(z) - b_1z - \cdots - b_mz^m$; $\forall z \in \mathbb{C}$ thì g cũng là 1 hàm nguyên.

Ta có $\lim_{z\to\infty} g(z) = b_0 \Rightarrow \exists M' > M$: g bị chặn trên tập $\{z \in \mathbb{C}/ |z| \geq M'\}$. Do g giải tích nên g liên tục; do đó g bị chặn trên tập $\{z \in \mathbb{C}/ |z| \leq M'\}$ compact. Từ đó g bị chặn.

Áp dụng định lý Liouville, g là hàm hằng và bằng b_0; từ đó

$f(z) = b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m$; $\forall z \in \mathbb{C}$.

Ta đặt $U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > \alpha\}$ $(\alpha > 0)$, do $\{z_n\} \to \infty$ nên ta có thể chọn $n \in N^*$ sao cho

$|z_n| > |b_0| + |b_1|\alpha + \cdots + |b_m|\alpha^m$.

Sử dụng định lý cơ bản của Đại số tồn tại $u \in \mathbb{C}$ sao cho $f(u) = z_n$, nếu $|u| \leq \alpha$ thì

$|z_n| = |f(u)| \leq |b_0| + |b_1|\alpha + \cdots + |b_m|\alpha^m < |z_n|$

nên vô lý, do đó $|u| > \alpha$ và $u \in U$, đây là điều mâu thuẫn, từ đây định lý được chứng minh xong. ■

Chú ý rằng các điều kiện trong các định lý từ định lý 3.2 đến định lý 3.5 là yếu dần, tuy nhiên nếu thêm điều kiện f là một hàm nguyên thì chúng đều tương đương với nhau (do tương đương với hàm f bị chặn), do đó ta không thể tìm các ví dụ về các hàm nguyên mà thỏa mãn điều kiện của định lý này và không thỏa mãn điều kiện của định lý khác.

4. Kết luận

Như vậy trong bài báo này, nhóm tác giả đã mở rộng được định lý Liouville theo hướng xét ảnh của hàm nguyên được hạn chế trên các lân cận của vô cùng, đó là các định lý 3.2, định lý 3.3, định lý 3.4 và định lý 3.5. Có các mở rộng theo hướng khác người đọc có thể xem [3], [4] và [5].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lars V. Ahlfors, "Complex analysis", Mc Graw-Hill, Inc., 1979.

[2] David S. Dummit and Richard M. Foote, "*Abstract algebra*", Wiley (3 rd edition), 2003.

[3] Wolfhard Hansen, "Liouville's Theorem and the restricted mean value property in the plane", *J. Math. Pures Appl*, 76, 1998, p. 943-947.

[4] Wolfhard Hansen, "A Strong Version of Liouville's Theorem", *The American Mathematical Monthly,* 115:7, 2008, p. 583-595.

[5] Zhenhua Jiao and Qiang Li, "The Liouville's Theorem of Harmonic Functions on Alexandrov Spaces with Nonnegative Ricci Curvature", *Indian* J. Pure Appl. Math, 46(1), 2015, p. 51-58.

[6] B.V.Sabat (Nguyễn Thủy Thanh và Hà Huy Khoái dịch). *Nhập môn Giải tích phức.* Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, 1979.

[7] Nguyễn Thủy Thanh. *Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 2006.