NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI CHO HÀM ĐIỀU HÒA DƯỚI TRÊN MỘT SỐ MIỀN ĐẶC BIỆT TRONG $\mathbb{C}$

THE MAXIMUM PRINCIPLE FOR SUBHARMONIC FUNCTIONS ON SOME SPECIAL DOMAINS IN $\mathbb{C}$

Huỳnh Thị Oanh Triều*, **Vũ Thị Kim Phương, Hoàng Nhật Quy**

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng[1]

*Tác giả liên hệ: htotrieu@ued.udn.vn

(Nhận bài: 30/6/2021; Chấp nhận đăng: 27/8/2021)

Tóm tắt - Trong bài báo này, chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh nguyên lý cực đại cho lớp hàm điều hòa dưới trên một số hình quạt không bị chặn trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Đây là những kết quả được mở rộng từ phiên bản nguyên lý cực đại của Phragmén và Lindelöf trong [1] cho lớp hàm điều hòa dưới xác định trên các miền không bị chặn trong mặt phẳng phức với điều kiện độ tăng tại điểm vô cực trong mặt phẳng phức của hàm điều hòa dưới không vượt quá độ tăng của hàm logarit tại điểm đó. Các kết quả về nguyên lý cực đại trong bài báo này khi phát biểu cho lớp hàm điều hòa dưới xác định trên các hình quạt không bị chặn chỉ yêu cầu về độ tăng tại điểm vô cực không vượt quá độ tăng của hàm đa thức tại điểm tương ứng.

Từ khóa - Hàm điều hòa dưới; hàm điều hòa trên; nguyên lý cực đại; giải tích phức; lý thuyết thế vị

Abstract - In this paper, we are going to state and prove the maximum principle for the subharmonic functions class on some unbouded sectors in the complex plane $\mathbb{C}$. These are the results that are extended from the maximum principle version of Phragmén and Lindelöf in [1] for the unbounded domains in the complex plane with the request of the very rapid growth at the complex infinity point of the subharmonic function (namely not pass over the growth of the logarit function at the same point). Our results just request the increase at the complex infinity point of the subharmonic function does not exceed the growing of the complex polynomial at respective point.

Key words - Subharmonic functions; superharmonic functions; the maximun principle; complex analysis; potential theory

1. Giới thiệu

Bài báo này nghiên cứu về nguyên lý cực đại cho lớp hàm điều hòa dưới. Đây là những đối tượng nghiên cứu chính của lý thuyết thế vị và lý thuyết đa thế vị - một nhánh của lĩnh vực giải tích phức, còn khá mới mẻ ở Việt Nam.

Nguyên lý cực đại ban đầu được phát biểu và chứng minh dựa trên tô pô trên mặt phẳng phức mở rộng. Do mặt phẳng phức mở rộng đồng phôi với mặt cầu Riemann nên bản thân nó cũng là một tập compact (vì mặt cầu Riemann là một tập compact trong không gian mêtric $\mathbb{R}^3$). Điều này đã làm cho phép chứng minh của nguyên lý cực đại khá đơn giản (Định lý 2.7). Tuy nhiên, như đã biết tính chất về tô pô của điểm vô cực và độ tăng của hàm tại điểm vô cực thường phức tạp hơn các điểm bình thường khác trên mặt phẳng phức. Vì vậy, việc tách riêng điểm thường và điểm vô cực trong các nghiên cứu liên quan tới số phức nói chung và nghiên cứu về nguyên lý cực đại nói riêng là rất cần thiết với hi vọng có những kết quả mới.

Trong [1], Phragmén và Lindelöf đã chứng minh nguyên lý cực đại bằng cách tách điểm vô cực khỏi biên của một miền không bị chặn trong mặt phẳng phức và đưa vào điều kiện kiểm soát độ tăng của hàm điều hòa dưới tại điểm vô cực (Định lý 2.9).

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng các kỹ thuật của giải tích phức trong [2, 3, 4, 5] để áp dụng phiên bản nguyên lý cực đại của Phragmén và Lindelöf vào các miền hình quạt không bị chặn trong mặt phẳng phức. Các kết quả chính của bài báo được trình bày ở Mục 3. Trong các kết quả này, nhóm tác giả đã cải tiến đáng kể về độ tăng (chi tiết có trong các lời dẫn và bình luận trước và sau các kết quả) của hàm điều hòa dưới trên quá trình tiến về vô cực của biến số phức.

2. Một số kiến thức chuẩn bị

Ta ký hiệu tập các số phức (còn gọi là mặt phẳng phức) là $\mathbb{C}$ và mặt phẳng phức mở rộng là $\mathbb{C}_\infty$. Ta đã biết, mặt phẳng phức mở rộng đồng phôi với mặt cầu Riemann trong không gian mêtric $\mathbb{R}^3$ (xem [2]), trong đó điểm vô cực ∞ tương ứng với điểm cực bắc của mặt cầu Riemann. Do mặt cầu Riemann là một tập compact trong $\mathbb{R}^3$ nên mặt phẳng phức mở rộng cũng là một tập compact.

Trong bài báo này, ta gọi một miền là một tập mở, liên thông và khác rỗng trong $\mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{C}_\infty$. Giả sử D là một miền, khi đó bao đóng $\overline{D}$ và biên ∂D của D luôn được hiểu là lấy trong $\mathbb{C}_\infty$. Như vậy, nếu D là một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}$ thì $\infty \in D$ và do $\mathbb{C}_\infty$ là tập compact nên $\overline{D}$ cũng là một tập compact. Ta ký hiệu $\Delta(\omega,\rho)$ là đĩa mở trong $\mathbb{C}$, tức là:

$$\Delta(\omega,\rho) = \{z \in \mathbb{C}: |z-\omega| < \rho\}.$$

Sau đây ta giới thiệu khái niệm hàm nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới và một số kết quả cơ bản của lớp hàm này.

Định nghĩa 2.1. (xem [6]) Cho X là một không gian tô pô. Hàm $u: X \to [-\infty,\infty)$ được gọi là hàm nửa liên tục trên nếu tập $\{x \in X: u(x) < \alpha\}$ là tập mở trong X với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hàm $v: X \to (-\infty,\infty]$ được gọi là hàm nửa liên tục dưới nếu hàm $-v$ là hàm nửa liên tục trên.

Một hàm là liên tục nếu và chỉ nếu nó vừa là nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới.

Sau đây ta cho một tiêu chuẩn về tính nửa liên tục trên.

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Huynh Thi Oanh Trieu, Vu Thi Kim Phuong, Hoang Nhat Quy)

Mệnh đề 2.2. Với các giả thiết như trong Định nghĩa 2.1, hàm u là nửa liên tục trên nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$ ta có

$$\limsup_{y \to x} u(y) \leq u(x).$$

Chứng minh: Xem [2].

Từ Định nghĩa 2.1 ta thấy rằng, tính nửa liên tục trên yếu hơn tính liên tục. Tuy nhiên, các kết quả cơ bản của hàm liên tục như bị chặn, đạt giá trị lớn nhất trên một tập compact vẫn đúng cho hàm nửa liên tục trên. Cụ thể ta có kết quả sau đây.

Định lý 2.3. Cho u là một hàm nửa liên tục trên trên không gian tô pô X và K là tập con compact của X. Khi đó, u bị chặn trên trên K và đạt giá trị cận trên đúng trên K.

Chứng minh: xem [6].

Sau đây ta sẽ nhắc lại về hàm điều hòa dưới và một số kết quả cơ bản của lớp hàm này, chuẩn bị cho việc phát biểu và mở rộng nguyên lý cực đại cho lớp hàm này trên các hình quạt trong mặt phẳng phức.

Định nghĩa 2.4. (xem [3, 6]) Cho U là một tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u: U \to [-\infty, \infty)$ được gọi là điều hòa dưới nếu nó là hàm nửa liên tục trên và thỏa mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương, tức là với mọi $\omega \in U$, tồn tại $\rho > 0$ sao cho

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt \ (0 \leq r < \rho).$$

Hàm $v: U \to (-\infty, \infty]$ được gọi là hàm điều hòa trên nếu hàm $-v$ là hàm điều hòa dưới.

Kết quả sau đây cho ta mỗi liên hệ giữa lớp hàm chỉnh hình và lớp hàm điều hòa dưới. Và cũng là một phương pháp để ta xây dựng các ví dụ về hàm điều hòa dưới.

Định lý 2.5. Nếu f là một hàm chỉnh hình trên một tập mở U trong $\mathbb{C}$ thì hàm $\log|f|$ là hàm điều hòa dưới trên U.

Chứng minh: xem [3, 6].

Kết quả sau đây cũng là một phương pháp giúp ta xây dựng các ví dụ về hàm điều hòa dưới từ các hàm điều hòa dưới đã biết. Kết quả này cũng chứng tỏ rằng, tập các hàm điều hòa dưới là một nón lồi, và không phải là một không gian vectơ.

Mệnh đề 2.6. Cho u, v là các hàm điều hòa dưới trên một tập mở U trong $\mathbb{C}$. Khi đó:

Hàm $\max(u, v)$ cũng là hàm điều hòa dưới trên U;

Hàm $\alpha u + \beta v$ cũng là hàm điều hòa dưới trên U với mọi $\alpha, \beta \geq 0$.

Chứng minh: Xem [6].

Sau đây ta phát biểu phiên bản gốc của nguyên lý cực đại cho các hàm điều hòa dưới. Để tiện cho việc theo dõi kết quả ta cũng sẽ trình bày cả phép chứng minh ở đây.

Định lý 2.7. ([3, 6]) Cho u là một hàm điều hòa dưới trên miền D trong $\mathbb{C}$. Khi đó:

a) Nếu u đạt cực đại toàn cục trên D thì u là hằng số trên D;

b) Nếu $\limsup_{z \to \xi} u(z) \leq 0$ với mọi $\xi \in \partial D$, thì $u \leq 0$ trên D.

Chứng minh:

(a) Giả sử u đạt giá trị cực đại M trên D, tức là tồn tại $z_0 \in D$ sao cho:

$$u(z) \leq M, \forall z \in D \text{ và } u(z_0) = M.$$

Đặt:

$$A = \{z \in D: u(z) < M\} \text{ và } B = \{z \in D: u(z) = M\}.$$

Do u là hàm nửa liên tục trên nên A là một tập mở. Ta sẽ chứng minh B cũng là tập mở.

Thật vậy: Lấy $\omega \in B$, theo Định nghĩa 2.4, tồn tại $\rho > 0$ sao cho

$$M = u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt \ \forall 0 \leq r < \rho.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt = M \ \forall 0 \leq r < \rho.$$

Do

$$u(\omega + re^{it}) \leq M \ \forall r \in [0, \rho) \text{ và } \forall t \in [0, 2\pi),$$

nên ta phải có

$$u(\omega + re^{it}) = M \ \forall r \in [0, \rho) \text{ và } \forall t \in [0, 2\pi).$$

Từ đây suy ra $\Delta(\omega, \rho) \subset B$. Vậy B là tập mở.

Như vậy, A và B là môt phân hoạch mở của D và do D là liên thông nên suy ra hoặc $A = D$ hoặc $B = D$.

Do $B \neq \emptyset$ (vì $z_0 \in B$) nên $B = D$. Vậy $u = M$ trên D.

(b) Ta thác triển hàm u tới biên ∂D bằng cách đặt:

$$u(\xi) := \limsup_{z \to \xi} u(z), \ \forall \xi \in \partial D.$$

Khi đó, u là hàm nửa liên tục trên trên $\overline{D}$. Do $\overline{D}$ là tập compact nên theo Định lý 2.3, hàm u đạt giá trị lớn nhất tại $\omega \in \overline{D}$ nào đó. Ta xét 2 trường hợp sau:

- Nếu $\omega \in \partial D$ thì theo giả thiết ta có $u(\omega) \leq 0$, suy ra $u \leq 0$ trên D.

- Nếu $\omega \in D$ thì theo ý (a) suy ra u là hằng số trên D và do đó cũng là hằng số trên $\overline{D}$, suy ra $u \leq 0$ trên D.

Nhận xét 2.8. (i) Trong giả thiết của Định lý 2.7 (a) yêu cầu hàm u đạt cực đại toàn cục trên D. Nếu hàm u đạt cực đại địa phương hoặc cực tiểu toàn cục trên D thì kết luận sẽ không còn đúng nữa. Ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ: Xét hàm:

$$u(z) = \max(Rez, 0) \text{ trên } \mathbb{C}.$$

Khi đó, hàm u vừa đạt cực đại địa phương và cực tiểu toàn cục trên $\mathbb{C}$ nhưng u không phải là một hằng số trên $\mathbb{C}$.

(ii) Trong Định lý 2.7(b), nếu D là miền không bị chặn trong $\mathbb{C}$, tức là $\infty \in D$ thì khi lấy biên của D ta có $\infty \in \partial D$. Kết quả sau đây ta sẽ loại điểm vô cực khỏi biên của tập D và khi đó cần thêm giả thiết khống chế độ tăng của hàm u khi tiến tới vô cực để đảm bảo kết luận vẫn đúng. Đây chính là phiên bản nguyên lý cực đại của Phragmén và Lindelöf.

Định lý 2.9. ([1]) Cho u là hàm điều hòa dưới trên miền không bị chặn D trong $\mathbb{C}$ sao cho

$$\limsup_{z \to \xi} u(z) \leq 0 \ (\xi \in \partial D \backslash \{\infty\}) \ (a)$$

Giả sử tồn tại một hàm điều hòa trên giá trị hữu hạn v trên D sao cho

$$\liminf_{z \to \infty} v(z) \geq \infty \ (b) \text{ và } \limsup_{z \to \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0. \ (c)$$

Khi đó $u \leq 0$ trên D.

Chứng minh: Ta xét 2 trường hợp sau

- Trước hết ta xét trường hợp $v > 0$ trên D: Lấy $\varepsilon > 0$. Từ (c) suy ra tồn tại $R > 0$ sao cho

$$\frac{u(z)}{v(z)} \le \varepsilon, \forall z \in D \text{ và } |z| > R \Rightarrow u(z) - \varepsilon v(z) \le 0. (*)$$

Đặt: $u_\varepsilon = u - \varepsilon v$.

Ta có u_ε là hàm điều hòa dưới trên D và với mọi $\xi \in \partial D$ ta có

$$\limsup_{z\to\xi} u_\varepsilon(z) = \begin{cases} \le 0 \text{ nếu } \xi \in \partial D\backslash\{\infty\} \ (do\ (a)) \\ \le 0 \text{ nếu } \xi = \infty \ (do\ (*)) \end{cases}$$

Áp dụng Định lý 2.7(b) ta suy ra $u_\varepsilon \le 0$ trên D. Do hàm v hữu hạn nên cho $\varepsilon \to 0$ ta nhận được $u \le 0$ trên D.

- Giả sử v là hàm thỏa mãn giả thiết định lý. Lấy $\delta > 0$. Đặt:

$$F_\delta = \{z \in D: u(z) \ge \delta\}.$$

Suy ra, F_δ là một tập đóng trong D (do hàm u là nửa liên tục trên). Vì v là hàm nửa liên tục dưới và thỏa mãn (b) nên suy ra v bị chặn dưới trên F_δ. Do đó, nếu cần có thể cộng thêm một hằng số phù hợp, ta có thể giả sử rằng $v > 0$ trên F_δ. Đặt:

$$V = \{z \in D: v(z) > 0\}.$$

Suy ra V là tập mở (do v là hàm nửa liên tục dưới). Khi đó, với $\xi \in \partial D\backslash\{\infty\}$ ta có

$$\limsup_{z\to\xi}(u(z) - \delta) \le$$
$$\le \begin{cases} \limsup_{z\to\xi} u(z), \text{ nếu } \xi \in \partial D\backslash\{\infty\} \\ u(\xi) - \delta, \text{ nếu } \xi \in D \cap \partial V \end{cases} \le 0$$

Áp dụng trường hợp trên cho hàm $u - \delta$ trên tập V ta suy ra $u - \delta \le 0$ trên V.

Vì $F_\delta \subset V$ nên suy ra $u = \delta$ trên F_δ.

Và hiển nhiên $u \le \delta$ trên $D\backslash F_\delta$.

Tóm lại ta có $u \le \delta$ trên D. Cho $\delta \to 0$ ta sẽ nhận được $u \le 0$ trên D.

Hệ quả sau đây cho thấy, khi độ tăng tại điểm vô cực của hàm u không vượt quá hàm logarit thì kết luận trong Định lý 2.9 vẫn đúng.

Hệ quả 2.10. ([1]) Cho u là một hàm điều hòa dưới trên một miền con thực sự không bị chặn D của $\mathbb{C}$ và thỏa mãn với $\xi \in \partial D\backslash\{\infty\}$

$$\limsup_{z\to\xi} u(z) \le 0 \text{ và } \limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log |z|} \le 0$$

Khi đó, $u \le 0$ trên D.

Chứng minh: Lấy $\omega \in \partial D \cap \mathbb{C}$ và áp dụng Định lý 2.9 cho hàm $v(z) = \log |z - \omega|$ ta có điều phải chứng minh.

3. Các kết quả chính

Kết quả sau đây là một áp dụng của nguyên lý cực đại phiên bản Phragmén và Lindelöf (Định lý 2.9) trên miền hình quạt. Chúng ta sẽ thấy rằng, kết quả này yêu cầu về độ tăng của hàm điều hòa dưới tại vô cực không vượt quá đa thức, nhẹ hơn so với Hệ quả 2.10.

Định lý 3.1. Cho T_γ là một hình quạt:

$$T_\gamma = \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}: |\arg(z)| < \frac{\pi}{2\gamma}\right\},$$

với $\gamma > \frac{1}{2}$ và u là một hàm điều hòa dưới trên T_γ thỏa mãn tồn tại các hằng số $A, B < \infty$ và $\alpha < \gamma$ sao cho:

$$u(z) \le A + B|z|^\alpha.$$

Khi đó, nếu $\limsup_{z\to\xi} u(z) \le 0, \forall \xi \in \partial T_\gamma\backslash\{\infty\}$,

Thì $u \le 0$ trên T_γ.

Chứng minh: Chọn $\beta > 0$ sao cho $\alpha < \beta < \gamma$. Ta xét hàm $v: T_\gamma \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$v(z) = Re(z^\beta) = r^\beta \cos(\beta t), z = re^{it} \in T_\gamma.$$

Khi đó ta có v là hàm điều hòa trên T_γ. Và từ giả thiết ta suy ra:

$$\cos(\beta t) \ge cos\frac{\pi\beta}{2\gamma}.$$

Ta sẽ kiểm tra rằng, hàm v thỏa mãn các điều kiện (b) và (c) của Định lý 2.9. Thật vậy:

$$\liminf_{z\to\infty} v(z) \ge \limsup_{z\to\infty}\left[r^\beta cos\frac{\pi\beta}{2\gamma}\right] = \infty.$$

Và

$$\limsup_{z\to\infty}\frac{u(z)}{v(z)} \le \limsup_{z\to\infty}\frac{A + Br^\alpha}{r^\beta cos\frac{\pi\beta}{2\gamma}} = 0.$$

Vậy áp dụng Định lý 2.9 ta có điều phải chứng minh.

Chú ý 3.2. Trong Định lý 3.1, giả thiết yêu cầu tồn tại $\alpha < \gamma$ và hàm u bị chặn trên bởi đa thức bậc α. Nếu thay đổi giả thiết chọn $\alpha = \gamma$ thì định lý sẽ không đúng nữa khi xét hàm $u(z) = Re(z^\gamma)$ vì điều kiện (c) không còn thỏa mãn nữa. Tuy nhiên, những thay đổi này vẫn đảm bảo cho kết luận đúng khi $\alpha = \gamma = 1$ với miền hình quạt đặc biệt là nửa mặt phẳng phức. Cụ thể ta có kết quả sau đây.

Định lý 3.3. Cho u là một hàm điều hòa dưới trên nửa mặt phẳng phức $H = \{z \in \mathbb{C}: Re(z) > 0\}$ thỏa mãn tồn tại các hằng số $A, B < \infty$ sao cho

$$u(z) \le A + B|z|, z \in H. (d)$$

Khi đó, nếu

$$\limsup_{z\to\xi} u(z) \le 0, \xi \in \partial H\backslash\{\infty\} \ (e)$$

và $$\limsup_{x\to\infty}\frac{u(x)}{x} = L, (f)$$

thì $u(z) \le L(Re(z))$ với mọi $z \in H$.

Chứng minh: Lấy $L' > L$. Xét hàm số $\tilde{u}: H \to [-\infty, \infty)$ xác định bởi

$$\tilde{u}(z) = u(z) - L'\big(Re(z)\big), z \in H.$$

Khi đó, $\tilde{u}$ là hàm điều hòa dưới trên H. Ta xét các hàm sau đây:

- Xét hàm:

$$\tilde{v}(z) = \tilde{u}(ze^{\frac{i\pi}{4}}) \text{ với } z \in H' = \left\{-\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Với $\xi \in \partial H'\backslash\{\infty\}$ ta có

$$\limsup_{z\to\xi}\tilde{v}(z) = \limsup_{z\to\xi}\tilde{u}\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right) \le 0 \ (do\ (e) \text{ và } (f))$$

Mặt khác, với $z \in H'$ ta có

$$\begin{aligned}\tilde{v}(z) &= u\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right) - L'Re\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right)\\ &\le A + B|z| - L'Re\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right)\ (do\ (d))\\ &\le \begin{cases} A + B|z|, nếu\ L' \ge 0 \\ A + (B - L')|z|, nếu\ L' < 0\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy áp dụng Định lý 3.1 cho hàm $\tilde{v}$ với $\gamma = 2, \alpha = 1$ ta suy ra $\tilde{v} \le 0$ trên H', tức là:

$\tilde{u} \le 0$ trên $H^+ = \{0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$. (*)

- Xét hàm:

$\tilde{w}(z) = \tilde{u}(ze^{-\frac{i\pi}{4}})$ với $z \in H'$.

Lập luận tương tự như trường hợp hàm $\tilde{v}$ ở trên, rồi áp dụng Định lý 3.1 ta cũng dẫn tới $\tilde{w} \le 0$ trên H', tức là:

$\tilde{u} \le 0$ trên $H^- = \{-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < 0\}$. (**)

Từ (*), (**) và điều kiện (f) ta suy ra hàm $\tilde{u}$ bị chặn trên trên H, tức là $\tilde{u} \le C$ trên H, với C là hằng số. Hơn nữa, với mọi $\xi \in \partial H \backslash \{\infty\}$ ta có

$$\limsup_{z\to\xi} \tilde{u}(z) = \limsup_{z\to\xi}[u(z) - L'Re(z)] \le 0.$$

Vậy lại áp dụng Định lý 3.1 cho hàm $\tilde{u}$ (với $\gamma = 1$, $A = C, B = 0, \alpha = 0$) ta suy ra $\tilde{u} \le 0$ trên H, tức là:

$u(z) \le L'Re(z), \forall z \in H, L' > L.$

Cho $L' \to L^+$ ta suy ra

$u(z) \le L\ \ Re(z), \forall z \in H.$

Sau đây là một kết quả nữa của nguyên lý cực đại trên nửa mặt phẳng phức.

Định lý 3.4. Cho u là một hàm điều hòa dưới trên $H = \{z \in \mathbb{C}: Re(z) > 0\}$ và giả sử tồn tại các hằng số $A, B < \infty$ và $\alpha > 0$ sao cho

$$(3.1)\begin{cases} u(z) \le A + B|z|, z \in H\ (g) \\ \limsup\limits_{z\to\xi} u(z) \le -\alpha|\xi|, \xi \in \partial H \backslash \{\infty\}. (h)\end{cases}$$

Khi đó, $u \equiv -\infty$ trên H.

Để chứng minh Định lý 3.4 ta cần các bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.5. Đặt $H^+ = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$. Với các giả thiết như trong Định lý 3.4, hãy chứng minh rằng

$$u(z) \le A + B\big(Re(z)\big) - \alpha\big(Im(z)\big), z \in H^+.$$

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $A, B \ge 0$. Đặt:

$$\tilde{u}(z) = u(z) - A - B\big(Re(z)\big) + \alpha(Im(z))$$

với $z \in H^+$. Ta xét hàm sau đây

$$\tilde{v}(z) = \tilde{u}\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right), z \in H' = \left\{-\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Ta sẽ chứng minh hàm $\tilde{v}$ thỏa mãn giả thiết Định lý 3.1. Thật vậy:

- Với $z \in H'$ ta có

$$\begin{aligned}\tilde{v}(z) &= u\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right) - A - B.Re\left(ze^{\frac{i\pi}{4}}\right) + \alpha.Im(ze^{\frac{i\pi}{4}})\\ &\le (A + B|z|) - A + \alpha|z| = (B + \alpha)|z|.\end{aligned}$$

- Với mọi $\xi \in \partial H' \backslash \{\infty\}$. Ta xét 2 trường hợp sau:

+ Nếu $\arg(\xi) = \frac{\pi}{4}$ thì từ giả thiết (3.1h) ta có

$$\limsup_{z\to\xi} \tilde{v}(z) \le -\alpha.Im(\xi) - A + \alpha.Im(\xi) \le 0.$$

+ Nếu $\arg(\xi) = -\frac{\pi}{4}$ thì từ giả thiết (3.1g) ta có

$$\limsup_{z\to\xi} \tilde{v}(z) \le \big(A + B.Re(\xi)\big) - A - B.Re(\xi) = 0.$$

Vậy áp dụng Định lý 3.1 cho hàm $\tilde{v}$ (với $\gamma = 2$) ta suy ra $\tilde{v} \le 0$ trên H'. Điều này suy ra $\tilde{u} \le 0$ trên H^+, tức là

$$u(z) \le A + B\big(Re(z)\big) - \alpha\big(Im(z)\big), z \in H^+.$$

Bổ đề 3.6. Với các giả thiết như trong Định lý 3.4, hãy chứng minh rằng hàm u bị chặn trên trên H.

Chứng minh: Gọi $\theta \in \mathbb{R}$ sao cho $tan\theta = \frac{B}{\alpha}$.

Khi đó ta có tia $l = \{z \in \mathbb{C}: \arg(z) = \theta\} \subset H^+$.

Ta sẽ chứng minh rằng hàm u bị chặn trên trên l.

Thật vậy: lấy $z = r(cos\theta + sin\theta) \in l$. Áp dụng Bổ đề 3.5 ta có

$$\begin{aligned}u(z) &\le A + B.Re(z) - \alpha.Im(z)\\ &= A + Brcos\theta - \alpha rsin\theta = A.\end{aligned}\quad (*)$$

- Đặt:

$v(z) = u(z) - A.$

Với $z \in D_1 = \left\{-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \theta\right\}$.

Ta xét hàm sau đây:

$$\tilde{v}(z) = v\left(ze^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right), z \in D'_1.$$

Với $D'_1 = \{-\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\}$.

Ta sẽ chứng minh hàm $\tilde{v}$ thỏa mãn giả thiết Định lý 3.1. Thật vậy:

+ Từ giả thiết (3.1h) và hàm u bị chặn trên trên l ta suy ra với mọi $\xi \in \partial D'_1 \backslash \{\infty\}$ ta có

$$\limsup_{z\to\xi} \tilde{v}(z) = \limsup_{z\to\xi} v\left(ze^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right) \le 0.$$

+ Từ giả thiết (3.1g) ta suy ra với mọi $z \in D'_1$ ta có

$$\tilde{v}(z) = u\left(ze^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right) - A \le (A + B|z|) - A = B|z|.$$

Vậy áp dụng Định lý 3.1 cho hàm $\tilde{v}$ trên hình quạt D'_1 ta suy ra $\tilde{v} \le 0$ trên D'_1 hay nói cách khác

$u \le A$ trên D_1. (**)

- Đặt:

$w(z) = u(z) - A$

Với $z \in D_2 = \left\{\theta < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Ta xét hàm sau đây:

$$\tilde{w}(z) = w\left(ze^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right), z \in D'_2.$$

Với $D'_2 = \{\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\}$.

Lập luận tương tự như đối với hàm $\tilde{v}$ cho hàm $\tilde{w}$, rồi áp dụng Định lý 3.1 ta cũng đưa đến kết quả sau:

$u \leq A$ trên D_2. (***)

Từ (*), (**) và (***) ta suy ra $u \leq A$ trên H.

Chứng minh Định lý 3.4: Từ kết quả Bổ đề 3.6 và giả thiết (3.1h), ta áp dụng Định lý 3.1 cho hàm u (với $\gamma = 1, B = 0, \alpha = 0$) ta suy ra $u \leq 0$ trên H.

Lấy $M > 0$ tùy ý.

Đặt:

$\tilde{u}(z) = u(z) + M.Re(z)$ với $z \in H$.

Ta sẽ chứng minh $\tilde{u}$ thỏa mãn điều kiện (3.1).

Thật vây:

- Ta kiểm tra điều kiện (3.1g): Với mọi $z \in H$ ta có

$$\tilde{u}(z) = u(z) + M.Re(z) \leq A + B|z| + M|z| = A + (B + M)|z|.$$

- Ta kiểm tra điều kiện (3.1h): Với mọi $\xi \in \partial H \backslash \{\infty\}$ ta có

$$\limsup_{z \to \xi} \tilde{u}(z) = \limsup_{z \to \xi} [u(z) + M.Re(z)] \leq -\alpha|\xi|.$$

Áp dụng Bổ đề 3.5 và Bổ đề 3.6 cho hàm $\tilde{u}$ ta cũng sẽ dẫn tới kết quả $\tilde{u} \leq 0$ trên H hay nói cách khác

$u(z) \leq -M.Re(z)$ với mọi $z \in H$.

Cho $M \to 0^+$ ta nhận được $u \equiv -\infty$ trên H.

4. Kết luận

Bài báo nghiên cứu áp dụng nguyên lý cực đại phiên bản của Phragmén và Lindelöf trên các miền hình quạt không bị chặn trong mặt phẳng phức, với các kết quả chính là Định lý 3.3 và Định lý 3.4. Đây là những kết quả có ý nghĩa về mặt khoa học khi đã giảm nhẹ được yêu cầu về độ tăng của hàm điều hòa dưới trên quá trình tiến về điểm vô cực.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phragmén E., Lindelöf E., "Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier", *Acta Math*, 31(1) (1908), 381 – 406.

[2] Khue N. V, Hai L. M., *Hàm biến phức*, NXB ĐH QG Hà Nội, (1997).

[3] Hiep P. H., *Singularities of plurisubharmonic functions*, Pub. Hou. Sci. and Tec. 2016.

[4] Hai L. M., Hiep P. H., Quy H. N., "Local property of the class $\mathcal{E}_{\chi,loc}$", J. Math. Anal. Appli. 402 (2013), 440 – 445.

[5] Quy H. N., "The topology on the space $\delta\mathcal{E}_\chi$", Univ. Iagel. Acta. Math. 51 (2014), 61 – 73.

[6] Klimek M., Pluripotential Theory, Clarendon Press, Oxford, (1991).