# HẠNG TỰ DO ỔN ĐỊNH CỦA MA TRẬN LŨY ĐẲNG TRÊN NỬA VÀNH

STABLY FREE RANK OF IDEMPOTENT MATRICES ON SEMIRINGS

**Hà Chí Công***

*Trường Đại học Tài chính - Kế toán*[1]

*Tác giả liên hệ: hachicong@tckt.edu.vn

(Nhận bài: 24/8/2021; Chấp nhận đăng: 22/12/2021)

**Tóm tắt -** Trong lý thuyết vành, môđun tự do ổn định, hạng (tự do ổn định) của ma trận và các tích chất đặc trưng của chúng được sử dụng trong bài toán phân tích cấu trúc vành Hermite và đã đạt được nhiều kết quả thú vị. Tuy nhiên, khi xem xét trên nửa vành thì một số tính chất đặc trưng của ma trận tự do ổn định không còn đúng nữa, và vẫn chưa có nhiều kết quả nghiên cứu về vấn đề này. Trong bài báo này, tác giả chỉ ra một lớp nửa vành mà trên đó hạng tự do ổn định của ma trận lũy đẳng tồn tại duy nhất; So sánh hạng tự do ổn định và hạng nhân tử của ma trận lũy đẳng trên lớp nửa vành có số phần tử sinh không bị chặn mạnh; Chứng minh điều kiện cần và đủ để nửa môđun tự do ổn định là tự do; Mô tả cấu trúc vị nhóm $SFV(R)$, các lớp tương đương của các ma trận tự do ổn định, trên một số lớp nửa vành đặc biệt.

**Từ khóa -** Nửa vành; ma trận lũy đẳng; hạng tự do ổn định; hạng nhân tử; số phần tử sinh không bị chặn mạnh

**Abstract -** In the ring theory, stably free modules, (stably free) rank of matrices and their characteristic properties have been used to analyze the structure of Hermite rings, which achieved many interesting results. However, some characteristic properties of stably free matrices are no longer true in the semiring theory, and there are not many research results about this problem at present. In this paper, the author indicate a class of semirings in which stably free rank of idempotent matrices are unique; Compare stably free rank and factor rank of idempotent matrices on class of semirrings having strongly unbounded generating number; Prove the necessary and sufficient conditions for stably free semimodules to be free; Describe structure of monoid $SFV(R)$, equivalent classes of stably free matrices, on a number of classes of special semirings.

**Key words -** Semiring; idempotent matrix; stably free rank; factor rank; strongly unbounded generating number

## 1. Đặt vấn đề

Môđun tự do ổn định trên vành được sử dụng khá nhiều trong nghiên cứu cấu trúc của các vành Hermite và đã thu được nhiều kết quả thú vị (xem [1], [2]). Trong đó, việc mô tả các vành Hermite thông qua ngôn ngữ ma trận được sử dụng phổ biến, đặc biệt là hạng của ma trận lũy đẳng ứng với các môđun tự do ổn định (hữu hạn sinh) trên vành nói riêng và các môđun xạ ảnh (hữu hạn sinh) nói chung (xem [1, Proposition 0.4.4]). Tuy nhiên, khi xem xét các đặc trưng hạng của các ma trận lũy đẳng trên nửa vành thì không còn đúng như trên vành nữa, và một số vấn đề liên quan về hạng của ma trận lũy đẳng, đặc biệt là hạng tự do ổn định của ma trận trên nửa vành được đặt ra như sau: *Trên lớp nửa vành nào thì hạng tự do ổn định của ma trận là tồn tại không âm duy nhất? hãy so sánh hạng tự do ổn định của ma trận với hạng nhân tử của nó? hãy chỉ ra các tính chất đặc trưng của các ma trận tự do ổn định trên các lớp nửa vành cụ thể?...*

Để giải quyết một phần các câu hỏi trên, trong bài báo này, tác giả chỉ ra một lớp nửa vành mà trên đó mọi ma trận tự do ổn định đều có hạng không âm duy nhất, đưa ra kết quả so sánh hạng tự do ổn định và hạng nhân tử của ma trận lũy đẳng trên lớp nửa vành có SUGN *(strongly unbounded generating number)* và chỉ ra một số tính chất đặc trưng của ma trận tự do ổn định trên một số nửa vành đặc biệt.

## 2. Một số định nghĩa và kết quả liên quan

Trong bài viết này, tác giả chỉ xét cho nửa vành có đơn vị và các nửa môđun đều được xét là nửa môđun phải trên nửa vành đã cho. Để thuận tiện cho việc trình bày, một ma trận $A$ cấp $m\times n$ trên nửa vành $R$ được ký hiệu $A_{m\times n}$, nếu $A$ là ma trận vuông cấp $n\times n$ thì ta viết $A_n$.

**Định nghĩa 2.1 ([3]).** *Nửa vành* là một đại số $(R,+,1,.,0)$ sao cho $(R,+,0)$ là một vị nhóm giao hoán với phần tử đơn vị là $0$, $(R,.,1)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị là $1$, phép nhân phân phối hai phía đối với phép cộng và $0.r = r.0 = 0$ với mọi $r\in R$.

Nửa vành $R$ được gọi là *phi khả đối* nếu $a+b=0 \Rightarrow a=b=0, \forall a,b\in R$.

Nửa vành $R$ được gọi là *nguyên* nếu $a.b=0\Rightarrow a=0$ hoặc $b=0, \forall a,b\in R$.

Nửa vành $R$ được gọi *nửa vành chia* nếu mọi phần tử khác $0$ của $R$ đều khả nghịch.

**Định nghĩa 2.2 ([3]).** Một *nửa môđun phải* trên nửa vành R là một vị nhóm giao hoán $(M, +, 0_M)$ cùng với phép nhân ngoài $(m,r)\to mr$ từ $M\times R$ đến $M$ thỏa mãn các điều kiện: $m(rr') = (mr)r'$, $(m + m')r = mr + m'r$, $m(r + r') = mr + mr'$, $m1 = m$, $0_Mr = 0_M = m0$ với mọi $m,m'\in M$ và $r,r'\in R$. Định nghĩa nửa môđun trái được phát biểu tương tự.

**Định nghĩa 2.3 ([3]).** Cho $M$ là một nửa môđun trên nửa vành $R$, $N$ là tập con của $M$. Ta nói $M$ được *sinh* bởi $N$ nếu mọi phần tử của $M$ đều biểu thị tuyến tính được qua các phần tử của $N$. Ký hiệu $\langle N\rangle = M$. Hơn nữa, nếu $N$ có hữu hạn phần tử thì ta nói $M$ là *nửa môđun hữu hạn sinh*.

**Định nghĩa 2.4 ([4]).** Cho $R$ là nửa vành, $P$ là nửa môđun trên $R$, $P$ được gọi là *nửa môđun xạ ảnh* nếu với mọi $R$-toàn cấu $\alpha: M\to N$ và mọi $R$-đồng cấu $\beta: P\to N$ luôn tồn tại $R$-đồng cấu $\gamma: P\to M$ sao cho $\alpha\circ\gamma=\beta$.

[1] University of Finance and Accountancy (Ha Chi Cong)

**Định nghĩa 2.5 ([3]).** Một nửa môđun $F$ trên nửa vành $R$ được gọi là *tự do* với tập cơ sở $I$ nếu $F = \bigoplus_{i\in I} R_i$ với $R_i \cong R_R, \forall i \in I$.

**Định nghĩa 2.6 ([3]).** Một nửa môđun xạ ảnh $P$ trên nửa vành $R$ được gọi là *nửa môđun xạ ảnh mạnh (hữu hạn sinh)* nếu $P$ đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của một nửa môđun tự do (hữu hạn sinh) nào đó.

**Mệnh đề 2.7 ([3, Lemma 4.3]).** *Cho P là một nửa môđun hữu hạn sinh trên nửa vành R. Khi đó, P là nửa môđun xạ ảnh (mạnh) khi và chỉ khi tồn tại một ma trận lũy đẳng (mạnh) A cấp n lấy hệ số trên R sao cho P đẳng cấu với* $A(R^n)$, *ở đây* $A(R^n)$ *là nửa môđun con của* $R^n$ *được sinh bởi các vectơ cột của ma trận A.*

**Định nghĩa 2.8 ([5]).** Cho $R$ là nửa vành, $E \in M_{m\times m}(R), F \in M_{n\times n}(R)$ là các ma trận lũy đẳng. Ta nói $E$ và $F$ là *tương đương* với nhau nếu tồn tại các ma trận $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times m}(R)$, sao cho $E = AB$ và $F = BA$. Ký hiệu: $E \cong F$.

**Mệnh đề 2.9 ([5, Mệnh đề 2.7]).** *Cho P và Q là các nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên nửa vành R, P được sinh từ các vectơ cột của ma trận lũy đẳng* $E \in M_{m\times m}(R)$, *Q được sinh từ các vectơ cột của ma trận lũy đẳng* $F \in M_{n\times n}(R)$. *Khi đó,* $P \cong Q \Leftrightarrow E \cong F$.

Gọi $V(R)$ là các lớp đẳng cấu của các nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên nửa vành *R*. Khi đó, *V(R)* là một vị nhóm giao hoán với phép toán cộng được định nghĩa bởi $[P]+[Q]=[P\oplus Q], \forall [P],[Q]\in V(R)$. Do mọi nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh *P* ứng với một ma trận lũy đẳng $A_n$ sao cho $P \cong A(R^n)$, nên để thuận tiện cho việc trình bày các chứng minh, ta có thể xem *V(R)* là vị nhóm các lớp tương đương (theo quan hệ tương đương như trong Định nghĩa 2.8) của các ma trận lũy đẳng trên nửa vành *R,* với phép toán cộng được định nghĩa tương ứng là:

$$[A]+[B]=[A\oplus B]=\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\right], \forall [A],[B]\in V(R)$$

Tập các lớp tương đương của các ma trận lũy đẳng mạnh (ứng với các nửa môđun xạ ảnh mạnh hữu hạn sinh) được ký hiệu là $SV(R)$. Khi đó, $SV(R)$ là một vị nhóm con của vị nhóm $V(R)$.

**Định nghĩa 2.10 ([5]).** Cho *A* là ma trận cấp $m\times n$ trên nửa vành *R*, *hạng nhân tử* của *A* là số nguyên không âm *k* bé nhất sao cho tồn tại các ma trận $B \in M_{m\times k}(R)$, $C \in M_{k\times n}(R)$ và $A = BC$. Ký hiệu: *f(A)*. Qui ước hạng nhân tử của ma trận không thì bằng 0.

Ma trận vuông $A_n$ được gọi là ma trận đầy nếu $f(A_n) = n$.

**Mệnh đề 2.11 ([5, Mệnh đề 2.11]).** *Cho R là nửa vành,* $E \in M_{m\times m}(R), F \in M_{n\times n}(R)$ *là các ma trận lũy đẳng tương đương với nhau. Khi đó, f(E) = f(F).*

**Định nghĩa 2.12 ([5]).** Cho *A* là một ma trận tùy ý trên nửa vành *R*, hạng nhân tử ổn định của ma trận *A* (nếu có) được ký hiệu là $\overline{f}(A)$ và được xác định bởi $\overline{f}(A) = \lim_{r\to\infty}\left[f(A\oplus I_r) - r\right]$. Trong đó, $A\oplus I_r$ được hiểu là ma trận $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_r\end{pmatrix}, \forall r \in \mathbb{N}$.

Ma trận vuông $A_n$ được gọi là ổn định đầy nếu $\overline{f}(A_n) = n$.

**Định nghĩa 2.13. ([3]).** Nửa vành *R* được gọi là có *IBN (invariant basis number)* nếu thỏa mãn điều kiện: $R^m \cong R^n \Rightarrow m = n, \forall m,n \in \mathbb{Z}^+$.

**Định nghĩa 2.14. ([6]).** Nửa vành *R* được gọi là có *UGN (unbounded generating number)* nếu thỏa mãn điều kiện: Nếu tồn tại các số nguyên dương *m, n* và nửa môđun *P* sao cho $R^m \oplus P \cong R^n$ thì $m \le n$.

**Định nghĩa 2.15 ([6]).** Nửa vành *R* được gọi là có *SUGN (strongly unbounded generating number)* nếu thỏa mãn điều kiện: Nếu có các ma trận $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(R), B_{n\times m} \in M_{n\times m}(R)$ sao cho $AB = I_m$ thì $n \ge m$.

**Nhận xét 2.16.** Dễ dàng chứng minh được rằng, mọi nửa vành có SUGN thì có UGN (xem [6, Mệnh đề 3.3]) và mọi nửa vành có UGN thì có IBN.

Mọi nửa vành chia đều là nửa vành nguyên phi khả đối, và do mọi nửa vành nguyên phi khả đối đều có SUGN (xem [6, Định lý 3.8]) nên mọi nửa vành chia đều có SUGN.

**Mệnh đề 2.17 ([6, Định lý 3.6]).** *Các mệnh đề sau là tương đương trên nửa vành R cho trước:*

*i) R là nửa vành có SUGN.*

*ii) Mọi ma trận khả nghịch trên nửa vành R đều là ma trận đầy.*

*iii)* $f(I_m) = m, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

## 3. Kết quả nghiên cứu

Trong mục này, tác giả sẽ chứng minh mọi ma trận tự do ổn định trên nửa vành có UGN đều có hạng (tự do ổn định) không âm duy nhất và chỉ ra một số tính chất đặc trưng của hạng tự do ổn định của ma trận lũy đẳng trên các lớp nửa vành cụ thể. Trước hết, ta có định nghĩa sau được phát biểu tương tự như trên vành nhưng bằng ngôn ngữ ma trận (xem [2]):

**Định nghĩa 3.1.** Cho *R* là nửa vành và $A_n \in M_n(R)$ là một ma trận lũy đẳng, ma trận $A_n$ được gọi là *tự do ổn định* nếu tồn tại các số nguyên không âm $r,s$ sao cho $A_n \oplus I_r \cong I_s$. Khi đó, giá trị $s-r$ được gọi là *hạng tự do ổn định* của ma trận lũy đẳng $A_n$ (hay gọi tắt là *hạng* của $A$) và được ký hiệu là $rank(A)$.

Nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh *P* trên nửa vành *R* được gọi là *nửa môđun tự do ổn định* nếu tồn tại ma trận tự do ổn định $A_n$ sao cho $P \cong A(R^n)$.

**Ví dụ 3.2.** Xét trên nửa vành các số thực không âm $\mathbb{R}^+$, ta có ma trận $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ là ma trận trận lũy đẳng và thỏa mãn:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

và $$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

suy ra $A\oplus I_1\cong I_2$ hay $A$ là ma trận tự do ổn định và $rank(A)=1$.

Các kết quả sau đây cho ta các lớp nửa vành mà trên đó Định nghĩa 3.1 tồn tại và tính duy nhất hạng của ma trận tự do ổn định. Trước hết, nhắc lại rằng, nửa vành xạ ảnh tự do là nửa vành mà trên đó mọi nửa môđun xạ ảnh đều tự do. Một số lớp nửa vành xạ ảnh tự do đã được xem xét trong [7] và [8], ta có mệnh đề sau:

**Mệnh đề 3.3.** *Mọi ma trận lũy đẳng trên nửa vành xạ ảnh tự do đều là tự do ổn định.*

*Chứng minh.*

Giả sử *R* là nửa vành xạ ảnh tự do và $A_n\in M_n(R)$ là ma trận lũy đẳng trên *R*. Khi đó, nửa môđun $A(R^n)$ là tự do, suy ra tồn tại số nguyên $k$ sao cho $A(R^n)\cong R^k$ hay $A_n\cong I_k$. Vậy $A_n$ là ma trận tự do ổn định.

**Mệnh đề 3.4.** *Nếu R là nửa vành IBN thì mọi ma trận tự do ổn định đều có hạng duy nhất.*

*Chứng minh.*

Giả sử $A_n\in M_n(R)$ là ma trận tự do ổn định. Khi đó, tồn tại các số nguyên không âm $r,s$ sao cho $A_n\oplus I_r\cong I_s$ suy ra $rank(A)=s-r$. Nếu tồn tại số nguyên $t$ mà $rank(A)=t$ thì tồn tại số nguyên không âm $q$ sao cho $A_n\oplus I_q\cong I_{q+t}$. Ta có $A_n\oplus I_r\oplus I_q\cong I_s\oplus I_q=I_{s+q}$ và $A_n\oplus I_q\oplus I_r\cong I_{q+t}\oplus I_r=I_{q+t+r}$ suy ra $I_{s+q}\cong I_{q+t+r}$ hay $R^{s+q}\cong R^{q+t+r}$. Do $R$ là nửa vành IBN nên $s+q=q+t+r\Leftrightarrow s=t+r\Leftrightarrow t=s-r$. Vậy hạng tự do ổn định của ma trận $A_n$ là duy nhất. □

**Nhận xét 3.5.** Trên nửa vành IBN thì hạng tự do ổn định của mọi ma trận đơn vị luôn bằng cấp của nó.

**Định lý 3.6.** *Nếu R là nửa vành có UGN thì mọi ma trận tự do ổn định $A_n$ trên R đều có hạng không âm duy nhất. Ngược lại, nếu mọi ma trận tự do ổn định trên nửa vành R đều có hạng không âm thì R có UGN.*

*Chứng minh.*

Giả sử $A_n\in M_n(R)$ là ma trận tự do ổn định. Khi đó, tồn tại các số nguyên không âm $r,s$ sao cho $A_n\oplus I_r\cong I_s$. Do $R$ có UGN nên $R$ là nửa vành IBN suy ra $rank(A)=s-r$ là duy nhất. Mặt khác, $A_n\oplus I_r\cong I_s\Leftrightarrow A(R^n)\oplus R^r\cong R^s$ suy ra $r\le s$ (do $R$ có UGN) suy ra $rank(A)=s-r\ge 0$.

Ngược lại, nếu tồn tại các số nguyên dương $m,n$ và nửa mô đun $P$ sao cho $P\oplus R^m\cong R^n$, gọi $A_k$ là ma trận lũy đẳng sao cho $A(R^k)\cong P$. Khi đó, $A\oplus I_m\cong I_n$ suy ra *A* là ma trận tự do ổn định, suy ra $rank(A)=n-m\ge 0\Rightarrow n\ge m$ hay *R* là nửa vành có UGN.

Dưới đây là một số đặc trưng thú vị của hạng tự do ổn định của ma trận trên lớp nửa vành có UGN.

**Mệnh đề 3.7.** *Cho $A_n,B_m$ là các ma trận tự do ổn định trên nửa vành R có UGN. Khi đó,*

*i) Nếu* $A\cong B$ *thì* $rank(A)=rank(B)$.

*ii)* $A\oplus B$ *cũng là ma trận tự do ổn định và* $rank(A\oplus B)=rank(A)+rank(B)$.

*Chứng minh.*

Do $A,B$ là các ma trận tự do ổn định nên tồn tại các số nguyên không âm $r,s,p,q$ sao cho

$$\begin{cases}A\oplus I_r\cong I_s\\ B\oplus I_q\cong I_p\end{cases}\tag{1}$$

i) Từ (1) suy ra $\begin{cases}A\oplus I_{r+q}\cong I_{s+q}\\ B\oplus I_{r+q}\cong I_{p+r}\end{cases}$.

Do $A\cong B$ nên $A\oplus I_{r+q}\cong B\oplus I_{r+q}$ suy ra $I_{s+q}\cong I_{p+r}$. Do $R$ có UGN nên $R$ là nửa vành IBN suy ra $s+q=p+r\Leftrightarrow p-q=s-r$ hay $rank(A)=rank(B)$.

ii) Từ (1) suy ra

$$A\oplus B\oplus I_{r+q}\cong(A\oplus I_r)\oplus(B\oplus I_q)\cong I_s\oplus I_p=I_{s+p}$$

suy ra $A\oplus B$ là ma trận tự do ổn định và $rank(A\oplus B)=p+s-(r+q)=(p-q)+(s-r)$ suy ra $rank(A\oplus B)=rank(A)+rank(B)$.

**Định nghĩa 3.8.** Cho *R* là nửa vành có UGN, gọi $SFV(R)$ là tập các lớp tương đương các ma trận tự do ổn định trên nửa vành *R* với quan hệ tương đương được xác định như trong Định nghĩa 2.8.

**Nhận xét 3.9.** Cho *R* là nửa vành có UGN, dễ thấy mọi ma trận tự do ổn định đều là ma trận lũy đẳng mạnh, và mọi ma trận đơn vị đều là ma trận tự do ổn định nên ta có $\{(0)\}\ne SFV(R)\subset SV(R)\subset V(R)$. Mặt khác, trong [3, Example 4.7], đã chỉ ra một nửa môđun con của nửa môđun tự do $\mathbb{B}^2$ trên nửa vành Boolean $\mathbb{B}$ là nửa môđun xạ ảnh nhưng không phải là nửa môđun xạ ảnh mạnh. Điều này chứng tỏ, trên nửa vành Boolean tồn tại ma trận lũy đẳng nhưng không phải là ma trận lũy đẳng mạnh, do đó, nó không phải là ma trận tự do ổn định. Vì vậy, $SFV(R)$ là vị nhóm con của vị nhóm giao hoán $V(R)$ và nói chung là không bằng $V(R)$. Kết quả sau cho ta một trường hợp mà $SFV(R)$ và $V(R)$ là bằng nhau.

**Mệnh đề 3.10.** *Cho $A_n$ là ma trận lũy đẳng trên nửa vành chia R. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

*i) Tồn tại duy nhất số nguyên $k$ không âm sao cho $A_n \cong I_k$.*

*ii) $A_n$ là ma trận lũy đẳng mạnh.*

*iii) $A_n$ là ma trận tự do ổn định.*

*Chứng minh.*

$i) \Rightarrow ii)$: Hiển nhiên.

$ii) \Rightarrow iii)$: Do $A_n$ là ma trận lũy đẳng mạnh nên nửa môđun $A(R^n)$ là nửa môđun xạ ảnh mạnh hữu hạn sinh. Theo [3, Theorem 4.5], do $R$ là nửa vành chia nên $A(R^n)$ là nửa môđun tự do, suy ra tồn tại số nguyên $m$ không âm sao cho $A(R^n) \cong R^m$ hay $A_n \cong I_m$ suy ra $A_n$ là ma trận tự do ổn định.

$iii) \Rightarrow i)$: Do $A_n$ là ma trận tự do ổn định nên $A_n$ cũng là ma trận lũy đẳng mạnh. Theo chứng minh trên, tồn tại số nguyên $k$ không âm sao cho $A_n \cong I_k$. Giả sử tồn tại số nguyên $m$ sao cho $A_n \cong I_m$. Khi đó, $I_k \cong I_m$ suy ra $R^k \cong R^m$. Do $R$ là nửa vành chia nên $R$ có IBN, suy ra $m = k$.

Tiếp theo, tác giả tiến hành so sánh hạng nhân tử và hạng tự do ổn định của ma trận trên lớp nửa vành khá rộng đã được khảo sát trong [6], đó là lớp nửa vành có SUGN.

**Mệnh đề 3.11.** *Cho R là nửa vành có SUGN và $A$ là ma trận tự do ổn định trên R. Khi đó, $A$ có hạng duy nhất và $0 \le rank(A) = \overline{f}(A) \le f(A)$.*

*Chứng minh.*

Do $R$ có SUGN nên $R$ có UGN, suy ra ma trận $A$ có hạng không âm duy nhất. Giả sử $rank(A) = s - r \ge 0$ với $r, s$ là các số nguyên không âm sao cho $A \oplus I_r \cong I_s$, theo Mệnh đề 2.17 ta có:

$$s = f(I_s) = f(A \oplus I_r) \le f(A) + f(I_r) = f(A) + r$$

suy ra $f(A) \ge s - r = rank(A)$. Do $R$ có SUGN nên theo [5, Định lý 3.2], ma trận $A$ có hạng nhân tử ổn định không âm, giả sử $\overline{f}(A) = m$. Khi đó, $\lim\limits_{k\to\infty}\left[f(A \oplus I_k) - k\right] = m$. Do $\{f(A \oplus I_k) - k\}$ là một dãy số nguyên nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(A \oplus I_k) - k = m, \forall k \ge k_0$ suy ra $f(A \oplus I_k) = k + m, \forall k \ge k_0$. Ta có các trường hợp sau:

- Nếu $r \ge k_0$ thì $s = f(I_s) = f(A \oplus I_r) = m + r$ suy ra $\overline{f}(A) = m = s - r = rank(A)$.

- Nếu $r < k_0$ thì từ $A \oplus I_r \cong I_s$ suy ra $A \oplus I_r \oplus I_{k_0 - r} \cong I_s \oplus I_{k_0 - r}$ hay $A \oplus I_{k_0} \cong I_{s + k_0 - r}$ suy ra $s + k_0 - r = f(I_{s+k_0-r}) = f(A \oplus I_{k_0}) = m + k_0$ suy ra $m = s - r$ hay $\overline{f}(A) = rank(A)$.

Trường hợp dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức ở Mệnh đề 3.11 được xem xét trên lớp nửa vành hẹp hơn lớp nửa vành có SUGN. Trước hết, ta có mệnh đề sau:

**Mệnh đề 3.12.** *Cho R là nửa vành thỏa mãn điều kiện: Với mọi ma trận vuông $A, B \in M_n(R)$, nếu $AB = I_n$ thì $BA = I_n$. Khi đó, R có SUGN.*

*Chứng minh.*

Giả sử $R$ không phải là nửa vành có SUGN, khi đó, tồn tại các ma trận $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times m}(R)$ sao cho

$$AB = I_m \text{ và } n < m.$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} A^1_{n\times n} \\ A^2_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B^1_{n\times n} & B^2_{n\times(m-n)} \end{pmatrix}$

ta có

$$AB = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^1 & B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1B^1 & A^1B^2 \\ A^2B^1 & A^2B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

suy ra $\quad A^1B^1 = I_n, A^1B^2 = 0, A^2B^1 = 0, A^2B^2 = I_{m-n}$.

Do $\quad A^1B^1 = I_n$ nên $B^1A^1 = I_n$

suy ra $\quad 0 = 0A^1 = A^2B^1A^1 = A^2I_n = A^2$

suy ra $\quad I_{m-n} = A^2B^2 = 0B^2 = 0$ (vô lý).

Vậy $R$ là nửa vành có SUGN.

**Bổ đề 3.13.** *Cho $A_n$ là ma trận lũy đẳng trên nửa vành R. Khi đó, $f(A) = k$ khi và chỉ khi tồn tại ma trận lũy đẳng đầy $B_k \in M_k(R)$ sao cho $A_n \cong B_k$.*

*Chứng minh.*

Nếu $f(A) = k$ thì tồn tại các ma trận $E \in M_{n\times k}(R), F \in M_{k\times n}(R)$ sao cho $A = EF$. Đặt $B_k = FAE$. Ta có $B^2 = (FAE)(FAE) = FAAAE$, do $A$ là ma trận lũy đẳng nên $A^3 = A$ suy ra $B^2 = FAE = B$ hay $B$ là ma trận lũy đẳng. Mặt khác,

$$\begin{cases} A = A^3 = A(EF)A = (AE)(FA) \\ B = FAE = FAAE = (FA)(AE) \end{cases}$$

suy ra $A_n \cong B_k$.

Theo Mệnh đề 2.11 ta có $k = f(A_n) = f(B_k)$. Vậy $B_k$ là ma trận lũy đẳng đầy và $B_k \cong A_n$. Ngược lại, nếu tồn tại ma trận lũy đẳng đầy $B_k \in M_k(R)$ sao cho $A_n \cong B_k$ thì $f(A) = f(B_k) = k$.

Từ Mệnh đề 3.11, Mệnh đề 3.12 và Bổ đề 3.13, ta thu được hệ quả sau về điều kiện cần và đủ để nửa môđun tự do ổn định là tự do.

**Hệ quả 3.14.** *Cho R là nửa vành thỏa mãn điều kiện: Với mọi ma trận vuông $E,F \in M_n(R)$, nếu $EF = I_n$ thì $FE = I_n$. Giả sử $A$ là ma trận tự do ổn định trên R. Khi đó, $rank(A) = f(A)$ khi và chỉ khi tồn tại duy nhất số nguyên $k$ không âm sao cho $A \cong I_k$.*

*Chứng minh.*

Nếu tồn tại số nguyên $k$ không âm sao cho $A \cong I_k$ thì $rank(A) = k$. Theo Mệnh đề 2.11 và Mệnh đề 2.17, *R* có SUGN suy ra $f(A) = f(I_k) = k = rank(A)$. Ngược lại, nếu $f(A) = rank(A) = t$ thì $t \geq 0$ và tồn tại số nguyên $r$ không âm sao cho $A \oplus I_r \cong I_{r+t}$ (2)

Mặt khác, do $f(A) = t$ nên theo Bổ đề 3.13, tồn tại ma trận lũy đẳng đầy $B_t \in M_t(R)$ sao cho $A \cong B_t$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $B_t \oplus I_r \cong I_{r+t}$. Khi đó, tồn tại các ma trận vuông $E,F \in M_{r+t}(R)$ sao cho $B_t \oplus I_r = EF; I_{r+t} = FE$. Theo giả thiết, $FE = I_{r+t}$ suy ra $EF = I_{r+t}$ suy ra $B_t \oplus I_r = I_{r+t}$ suy ra $B_t = I_t$. Vậy $A \cong I_t$. Giả sử tồn tại số nguyên không âm $q$ sao cho $A \cong I_q$, suy ra $I_t \cong I_q$ hay $R^t \cong R^q$. Do *R* là nửa vành có SUGN nên *R* là nửa vành IBN suy ra $t = q$. □

**Hệ quả 3.15.** *Cho R là nửa vành thỏa mãn điều kiện: Với mọi ma trận vuông $E,F \in M_n(R)$, nếu $EF = I_n$ thì $FE = I_n$. Giả sử $A_n$ là ma trận tự do ổn định trên R. Khi đó, $A_n$ là ma trận ổn định đầy khi và chỉ khi $A_n = I_n$.*

*Chứng minh.*

Nếu $A_n = I_n$ thì $\overline{f}(A_n) = rank(A_n) = rank(I_n) = n$ suy ra $A_n$ là ma trận ổn định đầy. Ngược lại, giả sử $A_n$ là ma trận ổn định đầy, theo Mệnh đề 3.11 ta có

$$n = \overline{f}(A) = rank(A) \leq f(A) \leq n$$

suy ra $f(A) = \overline{f}(A) = rank(A) = n$.

Áp dụng Hệ quả 3.14 ta được $A_n \cong I_n$, suy ra tồn tại các ma trận vuông $E,F \in M_n(R)$ sao cho $A_n = EF; I_n = FE$. Theo giả thiết, $EF = I_n$ suy ra $A_n = I_n$. □

**Nhận xét 3.16.** Nếu *R* là nửa vành thỏa mãn điều kiện: Với mọi ma trận vuông $E,F \in M_n(R)$, nếu $EF = I_n$ thì $FE = I_n$. Khi đó, mọi ma trận tự do ổn định khác không đều có hạng dương. Thật vậy, giả sử $A_m \in M_m(R)$ là ma trận tự do ổn định. Theo Mệnh đề 3.11, $rank(A) = \overline{f}(A) \geq 0$. Mặt khác, theo [5, Mệnh đề 3.9] ta có $\overline{f}(A) > 0$, suy ra $rank(A) > 0$.

## 4. Kết luận

Bài báo đã đạt được một số kết quả chính sau đây:

+ Chỉ ra một lớp nửa vành mà trên đó mọi ma trận tự do ổn định đều có hạng không âm duy nhất qua Định lý 3.6 và một lớp nửa vành mà trên đó các vị nhóm $SFV(R)$, $SV(R)$ và $V(R)$ trùng nhau.

+ Đưa ra kết quả so sánh hạn tự do ổn định và hạng nhân tử của ma trận lũy đẳng trên lớp nửa vành khá rộng (nửa vành có SUGN) qua Mệnh đề 3.11, từ đó, chỉ ra điều kiện cần và đủ để nửa môđun tự do ổn định là tự do trên một lớp nửa vành đặc biệt và được thể hiện ở Hệ quả 3.14.

+ Mô tả một số tính chất đặc trưng của ma trận tự do ổn định qua Mệnh đề 3.7, Hệ quả 3.15 và Nhận xét 3.16.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] P. M. Cohn, *Free ideal rings and localization in general rings*. Cambridge university press, 2006.

[2] O. Lezama and C. Gallego, “Matrix approach to noncommutative stably free modules and Hermite rings”, *Algebr. Discret. Math.*, vol. 18, no. 1, pp. 109–137, 2014.

[3] Y. Katsov, T. G. Nam, and J. Zumbrägel, “On congruence-semisimple semirings and the K0-group characterization of ultramatricial algebras over semifields”, *J. Algebr.*, vol. 508, no. February, pp. 157–195, 2018.

[4] J. S. Golan, *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.

[5] H. C. Công, “Hạng nhân tử ổn định của ma trận trên nửa vành”, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Đà Nẵng*, vol. 19, no. 5, pp. 53–57, 2021.

[6] H. C. Công, “Về nửa vành có số phần tử sinh không bị chặn mạnh”, T*ạp chí khoa học Tài chính Kế toán*, vol. 21, pp. 89–94, 2021.

[7] A. Patchkoria, “Projective semimodules over semirings with valuations in nonnegative integers”, *Semigr. Forum*, vol. 79, no. 3, pp. 451–460, 2009.

[8] S. N. Il’in and Y. Katsov, “On Serre’s Problem on Projective Semimodules over Polynomial Semirings”, *Commun. Algebr.*, vol. 42, no. 9, pp. 4021–4032, 2014.