KHOẢNG CÁCH HARNACK TRÊN MIỀN BỊ CHẶN TRONG ℂ

THE HARNACK DISTANCE ON BOUNDED DOMAINS IN ℂ

Đỗ Đăng Thịnh*, Vương Thị Kim Cúc, Trần Lê Diệu Linh, Hoàng Nhật Quy

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng[1]

*Tác giả liên hệ: dodangthinh34@gmail.com

(Nhận bài: 08/9/2021; Chấp nhận đăng: 18/11/2021)

Tóm tắt - Trong bài báo [1], tác giả đã xây dựng metric Harnack trong không gian $\mathbb{R}^n$ và nghiên cứu tính bất biến bảo giác và mối quan hệ giữa các metric Harnack, metric Bergman, metric Carathéodory với nhau. Trong bài báo này, nhóm tác giả xây dựng khoảng cách Harnack trên miền D trong ℂ, từ đó xây dựng metric Harnack khi D là miền bị chặn. Các kết quả chính của bài báo khẳng định rằng, metric Harnack trên miền bị chặn D là metric đầy đủ và tô pô sinh bởi metric đó tương đương với tô pô sinh bởi metric thông thường trên D. Ngoài ra, dựa vào lý thuyết ánh xạ bảo giác trên ℂ và tính bất biến của khoảng cách Harnack qua ánh xạ bảo giác, nhóm tác giả cũng xây dựng công thức tính khoảng cách Harnack giữa hai điểm tùy ý trên một số miền cụ thể trong mặt phẳng phức.

Từ khóa - Hàm điều hòa; khoảng cách Harnack; metric Harnack; lý thuyết thế vị; giải tích phức

Abstract - In [1], the author has constructed the Harnack metric on the space $\mathbb{R}^n$ and studied the conformal invariant as well as relations among the Harnack metric, the Bergman metric and the Carathéodory metric. In this paper, the authors obtain the Harnack distance on the domain D in ℂ. Then we construct the Harnack metric when D is a bounded domain. The main results of the paper show that, the Harnack metric on the bounded domain is complete and the topology induced by that metric is equivalent to the topology that is induced by the normal metric on D. Moreover, by applying the conformal mapping theory and the conformal invariant of the Harnack distance, the authors obtain some formulas of the Harnack distance between two arbitrary points in some specific domains in the complex plane.

Key words - Harmonic functions; Harnack distance; Harnack metric; potential theory; complex analysis

1. Giới thiệu

Lý thuyết các hàm điều hòa và điều hòa dưới trong lý thuyết thế vị thường được trình bày trong không gian $\mathbb{R}^n$ (xem [2, 3, 4]). Điều này có ưu điểm là sử dụng được các ký hiệu về các phép toán vi phân, tích phân của hàm nhiều biến đã khá quen thuộc. Tuy nhiên, lại không tận dụng được các ưu điểm của lý thuyết số phức và lý thuyết hàm biến phức. Và khó mở rộng các kết quả sang lý thuyết đa thế vị (nghiên cứu các hàm đa điều hòa dưới trong $\mathbb{C}^n$). Trong bài báo này, nhóm tác giả sẽ trình bày một số kết quả của hàm điều hòa dương trong ℂ. Và sử dụng các kết quả đó để nghiên cứu một số kết quả về metric Harnack. Như đã biết, kết quả đẹp nhất của hàm điều hòa dương là bất đẳng thức Harnack ([2, 4]). Kết quả này là cơ sở để định nghĩa khoảng cách Harnack và xây dựng metric Harnack.

Về metric Harnack, Herron [1] đã xây dựng và nghiên cứu mối quan hệ của nó với các metric Bergman, metric Carathéodory. Kết quả chính của bài báo này là chứng minh sự tương đương giữa metric Harnack với metric thông thường trên một miền bị chặn trong ℂ. Và dựa vào tính chất bất biến của metric Harnack qua ánh xạ bảo giác, xây dựng công thức khoảng cách Harnack giữa hai điểm tùy ý trong một số miền cụ thể trong ℂ như đĩa đơn vị, nửa mặt phẳng $Im(z) > 0$ trong ℂ.

Với các kết quả đạt được trong bài báo này, nhóm tác giả kỳ vọng ý tưởng xây dựng metric ở đây sẽ được vận dụng để xây dựng các metric trên các lớp hàm được nghiên cứu trong các tài liệu [5, 6, 7].

2. Một số kiến thức chuẩn bị

Ta ký hiệu tập các số phức (còn gọi là mặt phẳng phức) là ℂ và mặt phẳng phức mở rộng là $\mathbb{C}_\infty$. Ta gọi **miền** là một tập mở, liên thông và khác rỗng trong ℂ hoặc $\mathbb{C}_\infty$. Ta ký hiệu $\Delta(\omega,\rho)$ là đĩa mở tâm ω, bán kính ρ trong ℂ, tức là:

$$\Delta(\omega,\rho) = \{z \in \mathbb{C}: |z-\omega| < \rho\}.$$

Cho Ω là tập mở trong ℂ. Hàm $h: \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm điều hòa nếu $h \in C^2(\Omega)$ và thỏa mãn phương trình Laplace, tức là với mọi $z = x + iy \in \Omega$ ta có:

$$\Delta h(z) \coloneqq \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z) = 0.$$

Ta ký hiệu tập các hàm điều hòa trên Ω là $H(\Omega)$ và tập các hàm điều hòa không âm (và thường gọi là các hàm điều hòa dương) là $H_+(\Omega)$.

Trong [2, 4] đã phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Harnack trong $\mathbb{R}^n$. Sau đây, nhóm tác giả phát biểu bất đẳng thức đó trong ℂ.

Định lý 2.1 Cho h là một hàm điều hòa dương trên đĩa $\Delta(\omega,\rho)$. Khi đó, với mọi $r < \rho$ và $0 \le t < 2\pi$ ta có:

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(\omega) \le h(\omega + re^{it}) \le \frac{\rho + r}{\rho - r} h(\omega).$$

Chứng minh: (Định lý 2.14 [4])

Bất đẳng thức Harnack là cơ sở để định nghĩa khoảng cách Harnack sau đây. Về khoảng cách Harnack xem thêm [1]. Trước hết, ta sẽ chứng minh một bổ đề để làm cơ sở định nghĩa khoảng cách Harnack.

Bổ đề 2.2 Cho D là một miền trong $\mathbb{C}_\infty$ và $z.w \in D$. Khi đó, tồn tại số τ sao cho với mọi hàm điều hòa dương h trên D ta có:

$$\tau^{-1} h(w) \le h(z) \le \tau h(w). (*)$$

---

[1] The University of Danang – University of Science and Education (Do Dang Thinh, Vuong Thi Kim Cuc, Tran Le Dieu Linh, Hoang Nhat Quy)

Chứng minh: Ta xét quan hệ hai ngôi trên D như sau: $z, w \in D$, ta nói $z \sim w$ nếu tồn tại số τ sao cho với mọi $h \in H_+(\mathrm{D})$ thì $(*)$ được thỏa mãn.

Ta sẽ chứng minh quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên D. Thật vậy: Với $z \in D$, khi đó chọn $\tau = 1$ ta có: $z \sim z$ (thỏa mãn tính phản xạ). Giả sử $z \sim w$, khi đó với mọi $h \in H_+(\mathrm{D})$ ta có:

$$\tau^{-1} h(w) \le h(z) \le \tau h(w).$$

Từ đây suy ra:

$$\tau^{-1} h(z) \le h(w) \le \tau h(z),$$

tức là $w \sim z$ (thỏa mãn tính đối xứng). Giả sử $z \sim w$ và $w \sim v$, khi đó tồn tại các số τ và ρ sao cho với mọi $h \in H_+(\mathrm{D})$ ta có:

$$\tau^{-1} h(z) \le h(w) \le \tau h(z),$$

$$\rho^{-1} h(w) \le h(v) \le \rho h(w).$$

Suy ra $\quad \tau^{-1} \rho^{-1} h(z) \le h(v) \le \tau \rho h(z),$

tức là $z \sim v$ (thỏa mãn tính chất bắc cầu).

Gọi $[z]$ là một lớp tương đương. Ta sẽ chứng minh $[z]$ là tập mở trong D. Thật vậy: Lấy $w \in [z]$. Chọn $\rho > 0$ sao cho đĩa $\Delta(w, \rho) \subset D$. Lấy $v \in \Delta(w, \rho)$, đặt $r = |v - w|$. Khi đó với mọi $h \in H_+(\mathrm{D})$ ta có: $h|_{\Delta(w,\rho)} \in H_+(\Delta(w, \rho))$. Áp dụng Định lý 2.1 ta có:

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(w) \le h(v) \le \frac{\rho + r}{\rho - r} h(w).$$

Tức là $(*)$ được thỏa mãn với $\tau = \frac{\rho + r}{\rho - r}$. Từ đây suy ra $v \sim w$. Bởi tính bắc cầu ta suy ra $v \sim z$, tức là $v \in [z]$. Vậy ta có: $\Delta(w, \rho) \subset [z]$. Nói cách khác $[z]$ là tập mở trong D.

Do D là liên thông và các lớp tương đương tạo thành một phân hoạch mở của D nên suy ra trên D chỉ có một lớp tương đương duy nhất, tức là $[z] = D$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh trong bổ đề.

Nhận xét: Từ Bổ đề 2.2 ta suy ra với mọi $z.w \in D$ thì tồn tại số τ sao cho $(*)$ được thỏa mãn. Từ $(*)$ và do h là dương nên suy ra $\tau \ge 1$. Như vậy, tập hợp các số τ thỏa mãn $(*)$ là khác rỗng và bị chặn dưới nên sẽ tồn tại cận dưới đúng mà ta sẽ gọi là khoảng cách Harnack như định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.1 Cho D là một miền trong $\mathbb{C}_\infty$. Cho trước $z, \omega \in D$. Ta gọi khoảng cách Harnack giữa z và ω, ký hiệu $\tau_D(z, \omega)$, được xác định như sau:

$$\tau_D(z, \omega) = \inf\{\tau \in \mathbb{R}: \tau^{-1} h(\omega) \le h(z) \le \tau h(\omega)\},$$

ở đây, inf được lấy qua tất cả các hàm h là điều hòa dương trên D, tức là với mọi $h \in H_+(\mathrm{D})$.

Sau đây, sẽ trình bày một số kết quả của khoảng cách. Các kết quả này thường được trình bày khi hàm điều hòa xác định trong $\mathbb{R}^n$. Để thuận tiện cho việc theo dõi, nhóm tác giả sẽ trình bày các chứng minh trong trường hợp hàm điều hòa xác định trong $\mathbb{C}$.

Định lý 2.2 Nếu $\Delta = \Delta(\omega, \rho)$ thì

$$\tau_\Delta(z, \omega) = \frac{\rho + |z - \omega|}{\rho - |z - \omega|}, \forall z \in \Delta.$$

Chứng minh: Với $z \in \Delta$, bởi bất đẳng thức Harnack ta có:

$$\frac{\rho - |z - \omega|}{\rho + |z - \omega|} h(\omega) \le h(z) \le \frac{\rho + |z - \omega|}{\rho - |z - \omega|} h(\omega),$$

với mọi $h \in H_+(\Delta)$. Từ đây suy ra $\tau_\Delta(z, \omega) \le \frac{\rho + |z - \omega|}{\rho - |z - \omega|}$. (1)

Mặt khác, với $|\xi| = 1$ ta xét hàm h_ξ trên Δ như sau:

$$h_\xi(z) = P\left(\frac{z - \omega}{\rho}, \xi\right) = Re\left(\frac{\rho\xi + (z - \omega)}{\rho\xi - (z - \omega)}\right),$$

ở đây, P là nhân Poisson (xem [3]). Bởi tính chất của nhân Poisson (Bổ đề 2.2.1 [3]) ta suy ra h_ξ là hàm điều hòa dương trên Δ. Ta có: $h_\xi(\omega) = 1$. Nếu đặt $z = \omega + re^{it}$, với $r = |z - \omega|$ và $\xi = e^{i\theta}$ thì ta có:

$$h_\xi(z) = Re\left(\frac{\rho e^{i\theta} + re^{it}}{\rho e^{i\theta} - re^{it}}\right) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(t - \theta) + r^2}.$$

Theo định nghĩa của $\tau_\Delta(z, \omega)$ ta có:

$$\tau_\Delta^{-1}(z, \omega) h_\xi(\omega) \le h_\xi(z) \le \tau_\Delta(z, \omega) h_\xi(\omega).$$

Tương đương với:

$$\tau_\Delta^{-1}(z, \omega) h_\xi(\omega) \le \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(t - \theta) + r^2} \le \tau_\Delta(z, \omega) h_\xi(\omega),$$

với mọi $0 \le \theta < 2\pi$. Chọn $\theta = t$ ta có:

$$\tau_\Delta^{-1}(z, \omega) h_\xi(\omega) \le \frac{\rho + r}{\rho - r} \le \tau_\Delta(z, \omega) h_\xi(\omega).$$

Do $h_\xi(\omega) = 1$ nên ta có:

$$\tau_\Delta(z, \omega) \ge \frac{\rho + r}{\rho - r} = \frac{\rho + |z - \omega|}{\rho - |z - \omega|} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Sau đây ta sẽ phát biểu và chứng minh nguyên lý giảm của khoảng cách Harnack qua ánh xạ phân hình. Đặc biệt là bất biến qua ánh xạ bảo giác. Về ánh xạ phân hình và ánh xạ bảo giác xem thêm [8].

Định lý 2.3 Cho $f: D_1 \to D_2$ là ánh xạ phân hình giữa các miền D_1 và D_2 trong $\mathbb{C}_\infty$. Khi đó ta có:

$$\tau_{D_2}\big(f(z), f(w)\big) \le \tau_{D_1}(z, w) \ (z, w \in D_1).$$

Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu f là ánh xạ bảo giác của D_1 lên D_2.

Chứng minh: Lấy $z, w \in D_1$. Nếu h là một hàm điều hòa dương trên D_2 thì $h \circ f$ cũng là một hàm điều hòa dương trên D_1. Theo định nghĩa của $\tau_{D_1}(z, w)$ ta có:

$$\tau_{D_1}^{-1}(z, w) h((f(w)) \le h\big(f(z)\big) \le \tau_{D_1}(z, w) h\big(f(w)\big).$$

Đánh giá trên đúng với mọi hàm điều hòa dương h trên D_2. Do đó, theo định nghĩa của $\tau_{D_2}(f(z), f(w))$ ta suy ra:

$$\tau_{D_2}\big(f(z), f(w)\big) \le \tau_{D_1}(z, w) \ (z, w \in D_1).$$

Cuối cùng, nếu f là một ánh xạ bảo giác của D_1 lên D_2 thì tồn tại f^{-1} và $f^{-1}: D_2 \to D_1$ cũng là một ánh xạ chỉnh hình. Áp dụng kết quả vừa chứng minh ta có:

$$\tau_{D_1}\Big(f^{-1}\big(f(z)\big), f^{-1}\big(f(w)\big)\Big) \le \tau_{D_2}\big(f(z), f(w)\big),$$

hay $\quad \tau_{D_1}(z, w) \le \tau_{D_2}\big(f(z), f(w)\big).$

Vậy ta có:

$$\tau_{D_1}(z, w) = \tau_{D_2}\big(f(z), f(w)\big).$$

Định lý 2.4 Nếu D là một miền con của $\mathbb{C}_\infty$ thì $log\tau_D$ là một nửa metric liên tục trên D.

Chứng minh:

Trước hết, ta chứng minh $log\tau_D$ là nửa metric:

- Từ định nghĩa ta có: $\tau_D(z,w) \geq 1$ và $\tau_D(z,z) = 1$ nên ta suy ra $log\tau_D(z,w) \geq 0$ và $log\tau_D(z,z) = 0$.

- Từ định nghĩa ta có: $\tau_D(z,w) = \tau_D(w,z)$ nên suy ra $log\tau_D(z,w) = log\tau_D(w,z)$.

- Lấy $z, w, u \in D$. Khi đó với mọi hàm điều hòa dương h trên D ta có:

$$\tau_{\mathrm{D}}^{-1}(z,w)h(w) \leq h(z) \leq \tau_D(z,w)h(w),$$
$$\tau_{\mathrm{D}}^{-1}(w,u)h(u) \leq h(w) \leq \tau_\Delta(w,u)h(u).$$

Từ đó suy ra

$$\tau_{\mathrm{D}}^{-1}(z,w)\tau_{\mathrm{D}}^{-1}(w,u)h(u) \leq h(z) \leq \tau_D(z,w)\tau_\Delta(w,u)h(u).$$

Suy ra

$$\tau_D(z,u) \leq \tau_D(z,w)\tau_\Delta(w,u).$$
$$log\tau_D(z,u) \leq log\tau_D(z,w) + log\tau_\Delta(w,u).$$

Vậy $log\tau_D$ là một nửa metric trên D.

Để chứng minh $log\tau_D$ là liên tục trên $D \times D$, trước hết ta sẽ chứng minh khẳng định sau

$$\lim_{z\to w} log\tau_D(z,w) = 0.$$

Thật vậy. với $w \in D$. Chọn $\rho > 0$ sao cho $\Delta := \Delta(w,\rho) \subset D$. Khi đó, với mọi $z \in \Delta$, bởi Định lý 2.2 và Định lý 2.3 ta có:

$$0 \leq log\tau_D(z,w) \leq log\tau_\Delta(z,w) = log\left(\frac{\rho + |z-w|}{\rho - |z-w|}\right).$$

Cho $z \to w$ ta suy ra $\lim_{z\to w} log\tau_D(z,w) = 0$.

Lấy $(z_0, w_0) \in D \times D$. Khi đó, bởi bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$log\tau_D(z,w) \leq log\tau_D(z,z_0) + log\tau_D(z_0,w_0) + log\tau_D(z_0,w).$$

Lấy giới hạn hai vế khi $(z,w) \to (z_0,w_0)$ và áp dụng kết quả vừa chứng minh ở trên ta có:

$$\lim_{(z,w)\to(z_0,w_0)} log\tau_D(z,w) \leq log\tau_D(z_0,w_0). \quad (3)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$$log\tau_D(z_0,w_0) \leq log\tau_D(z_0,z) + log\tau_D(z,w) + log\tau_D(w,w_0).$$

Lấy giới hạn hai vế khi $(z,w) \to (z_0,w_0)$ và áp dụng kết quả vừa chứng minh ở trên ta có:

$$\lim_{(z,w)\to(z_0,w_0)} log\tau_D(z,w) \geq log\tau_D(z_0,w_0). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra

$$\lim_{(z,w)\to(z_0,w_0)} log\tau_D(z,w) = log\tau_D(z_0,w_0),$$

tức là $log\tau_D$ liên tục tại (z_0,w_0). Do (z_0,w_0) được chọn bất kỳ trên $D \times D$ nên suy ra $log\tau_D$ liên tục trên $D \times D$.

Chú ý 2.5 Khi D là một miền trong $\mathbb{C}_\infty$ thì $log\tau_D$ nói chung không không phải là một metric, tức là có thể xảy ra $log\tau_D(z,w) = 0$ nhưng $z \neq w$. Chẳng hạn khi $D = \mathbb{C}$. Do mọi hàm điều hòa dương trên $\mathbb{C}$ đều là hằng số (Định lý Liouville [2]) nên ta có: $log\tau_{\mathbb{C}}(z,w) = 0$ với mọi $z, w \in \mathbb{C}$.

3. Các kết quả chính

Bây giờ, sử dụng các kết quả ở trên để chứng minh một số kết quả liên quan đến khoảng cách Harnack. Ta sẽ chứng minh rằng $\boldsymbol{log\tau_D}$ là metric khi $\boldsymbol{D}$ là miền bị chặn và chỉ ra metric này tương đương với metric thông thường trên $\boldsymbol{D}$. Ngoài ra, ta cũng xây dựng công thức tính khoảng Harnack giữa hai điểm bất kỳ trên đĩa và áp dụng lý thuyết ánh xạ bảo giác xây dựng công thức tính khoảng cách Harnack giữa hai điểm bất kỳ trong một miền trong $\mathbb{C}_\infty$.

Định lý 3.1 Nếu D là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}$ thì $log\tau_D$ là một metric. Hơn nữa, tô pô sinh bởi metric đó tương đương với tô pô thông thường trên D.

Chứng minh: Lấy $z, w \in D$. Khi đó, bởi D là miền bị chặn nên tồn tại $R > 0$ sao cho $D \subset \Delta := \Delta(z,R)$. Áp dụng Định lý 2.2 và Định lý 2.3 ta có:

$$\tau_D(z,w) \geq \tau_\Delta(z,w) = \frac{R + |z-w|}{R - |z-w|}. (*)$$

Đặt $d_1 = log\tau_D$. Khi đó, bởi Định lý 2.4, d_1 là nửa metric trên D. Ta sẽ chứng minh nó là một metric trên D. Thật vậy: giả sử $d_1(z,w) = 0$. Bởi đánh giá $(*)$ ta suy ra

$$\frac{R + |z-w|}{R - |z-w|} \leq 1 \Leftrightarrow |z-w| \leq 0 \Leftrightarrow z = w.$$

Gọi d là metric thông thường trên D, tức là $d(z,w) = |z-w|$ với mọi $z, w \in D$. Để chứng minh tô pô trên D sinh bởi d và d_1 là tương đương ta sẽ chứng minh ánh xạ đồng nhất sau

$$id: (D,d) \to (D,d_1),$$

là một song ánh liên tục. Thật vậy:

- Ta chứng minh id liên tục: Lấy $z_0 \in D$. Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\Delta(z_0,\varepsilon) = \{z \in D: d(z,z_0) < \varepsilon\} \subset D.$$

Lấy dãy $(z_n) \subset D$ sao cho $z_n \to z_0$ khi $n \to \infty$. Không mất tính tổng quát ta có: thể giả sử $(z_n) \subset \Delta(z_0,\varepsilon)$. Khi đó ta có:

$$d_1(z_n,z_0) = log\tau_D(z_n,z_0) \leq log\tau_{\Delta(z_0,\varepsilon)}(z_n,z_0) \leq log\frac{\varepsilon + |z_n - z_0|}{\varepsilon - |z_n - z_0} \to 0, n \to \infty.$$

Tức là $z_n \to z_0$ theo metric d_1. Và suy ra id là liên tục.

- Ta chứng minh id^{-1} là liên tục. Lấy dãy $(z_n) \subset D$ mà $z_n \to z_0$ theo metric d_1. Từ $(*)$ ta có:

$$d_1(z_n,z_0) \geq log\frac{R + |z_n - z_0|}{R - |z_n - z_0|} \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$log\frac{R + |z_n - z_0|}{R - |z_n - z_0|} \to 0 \; khi \; n \to \infty.$$

Điều này tương đương với $|z_n - z_0| \to 0$ khi $n \to \infty$. Tức là id^{-1} liên tục.

Định lý 3.2 Giả sử D là miền bị chặn trong $\mathbb{C}$. Khi đó, không gian metric $(D, log\tau_D)$ là một không gian metric đầy.

Để chứng minh Định lý 3.2 ta cần bổ đề sau đây

Bổ đề 3.3 Giả sử D là miền bị chặn. Với $w \in D$ và $\xi \in \partial D$. Khi đó ta có:

$$\lim_{z\to\xi} \tau_D(z,w) = \infty.$$

Chứng minh: Lấy $(z_n) \subset D$ sao cho $z_n \to \xi$ khi $n \to \infty$. Do D là miền bị chặn nên tồn tại $R > 0$ sao cho $D \subset \Delta(0,R)$. Xét hàm số cho bởi công thức sau

$$h(z) := log\left|\frac{2R}{z-\xi}\right|.$$

Khi đó, h là hàm điều hòa dương trên D (Định lý 1 [8]). Theo định nghĩa $\tau_D(z_n, w)$ ta có:

$$\tau_D^{-1}(z_n, w)h(w) \le h(z_n) \le \tau_D(z_n.w)h(w).$$

Suy ra $\tau_D(z_n, w) \ge \frac{h(z_n)}{h(w)}$.

Do $\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \lim_{n\to\infty} log\left|\frac{2R}{z_n-\xi}\right| = \infty$,

nên suy ra $\lim_{n\to\infty} \tau_D(z_n, w) = \infty$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Chứng minh Định lý 3.2: Giả sử $(z_n) \subset D$ là một dãy Cauchy trong $(D, log\tau_D)$.

Xét $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ là bao đóng của D theo tô pô thông thường. Khi đó, tồn tại dãy con $(z_{n_k}) \subset (z_n)$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0,$$

với $z_0 \in \overline{D}$ theo tô pô thông thường. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $z_0 \in D$ thì bởi Định lý 3.1 ta có: metric Harnack tương đương với metric thông thường trên D ta có:

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0,$$

theo tô pô sinh bởi $log\tau_D$.

Vì (z_n) là dãy Cauchy theo $log\tau_D$ nên suy ra $z_n \to z_0$ khi $n \to \infty$ theo metric $log\tau_D$.

- Nếu $z_0 \in \partial D$ thì theo Bổ đề 3.3 với mỗi $m \ge 1$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} log\tau_D(z_n, z_m) = \infty.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (z_n) là dãy Cauchy theo $log\tau_D$.

Vậy chỉ có thể xảy ra trường hợp $z_0 \in D$, tức là dãy (z_n) hội tụ trong $(D, log\tau_D)$, hay $(D, log\tau_D)$ là không gian metric đầy.

Sau đây ta sẽ dựa vào lý thuyết ánh xạ bảo giác để xây dựng công thức tính khoảng cách Harnack giữa hai điểm thuộc một số miền cụ thể. Kết quả sau đây cho công thức tính trên đĩa đơn vị.

Định lý 3.4 Đặt $\Delta = \Delta(0,1)$. Chứng minh rằng với mọi $z, w \in \Delta$ ta có:

$$\tau_\Delta(z, w) = \frac{1 + \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|}.$$

Chứng minh: Lấy $z_0, w_0 \in \Delta$. Xét ánh xạ phân tuyến tính $f: \Delta \to \Delta$ cho bởi công thức

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}.$$

Khi đó, f là một ánh xạ bảo giác của Δ lên chính nó (Định lý 3 [8]) và $f(z_0) = 0$. Bởi Định lý 2.2 và Định lý 2.3 ta có:

$$\tau_\Delta(z_0, w_0) = \tau_\Delta(f(z_0), f(w_0)) = \tau_\Delta\left(0, \frac{w_0 - z_0}{1 - w_0\overline{z_0}}\right)$$

$$= \frac{1 + \frac{|w_0 - z_0|}{1 - w_0\overline{z_0}}}{1 - \frac{|w_0 - z_0|}{1 - w_0\overline{z_0}}}$$

Kết quả sau đây cho công thức tính trên miền nửa mặt phẳng phức phía trên.

Định lý 3.5 Cho $D = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$. Chứng minh rằng với mọi $z, w \in D$ ta có:

$$\tau_D(z, w) = \frac{1 + \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|}.$$

Chứng minh: Lấy $z_0, w_0 \in D$. Xét ánh xạ phân tuyến tính $f: D \to D$ cho bởi công thức

$$f(z) = \frac{z - w_0}{z - \overline{w_0}}.$$

Khi đó, f là một ánh xạ bảo giác của D lên đĩa đơn vị $\Delta = \Delta(0,1)$ (Định lý 3 [8]) và $f(w_0) = 0$. Bởi Định lý 2.2 và Định lý 2.3 ta có:

$$\tau_D(z_0, w_0) = \tau_D(f(z_0), f(w_0)) = \tau_\Delta\left(\frac{z_0 - w_0}{z_0 - \overline{w_0}}, 0\right)$$

$$= \frac{1 + \left|\frac{z_0-w_0}{z_0-\overline{w_0}}\right|}{1 - \left|\frac{z_0-w_0}{z_0-\overline{w_0}}\right|}.$$

4. Kết luận

Trong bài báo này nhóm tác giả đã trình bày một số kết quả của hàm điều hòa dương xác định trên một miền trong mặt phẳng phức hoặc trong mặt phẳng phức mở rộng. Rồi dựa vào các kết quả này để xây dựng metric Harnack trên miền bị chặn. Kết quả chính của bài báo là các Định lý 3.1 và Định lý 3.2, khẳng định metric Harnack là đầy đủ và tô pô sinh bởi metric này tương đương với tô pô sinh bởi metric thông thường trên $\mathbb{C}$. Ngoài ra, áp dụng tính chất bất biến của khoảng cách Harnack qua ánh xạ bảo giác để xây dựng công thức tính khoảng cách Harnack giữa hai điểm bất kỳ trong một số miền cụ thể (Định lý 3.4 và Định lý 3.5). Theo hiểu biết của nhóm tác giả thì đây là những kết quả mới, có giá trị thực hành cao và góp phần làm phong phú hơn các kết quả về lớp hàm điều hòa dương trong lý thuyết thế vị.

Lời cảm ơn: Các tác giả bài báo xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các phản biện đã dành thời gian đọc kỹ bài báo và cho các góp ý có giá trị, giúp bài báo rõ ràng và hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Herron D. A., "The harnack and other conformally invariant metrics", Kodai Math. J., 31 (1908), 9 - 19.

[2] Axler S., Bourdon P., Ramey W., Harmonic function theory, Springer – Verlag New York, (2001).

[3] Klimek M., Pluripotential Theory, Clarendon Press, Oxford, (1991).

[4] Helms L. L., Introduction to potential theory, John Wiley and Sons, (1969).

[5] Hiep P. H., *Singularities of plurisubharmonic functions*, Pub. Hou. Sci. and Tec. 2016.

[6] Quy H. N., "The topology on the space $\delta\mathcal{E}_\chi$", Univ. Iagel. Acta. Math. 51 (2014), 61 – 73.

[7] Hung V. V, Quy H. N., "The m-Hessian Operator on some weighted energy classes of delta m-subharmonic functions", Results in Math, 75:112 (2020), 68 – 92.

[8] Khue N. V, Hai L. M., *Hàm biến phức*, NXB ĐH QG Hà Nội, (1997).