MỘT SỐ BẢO TỒN BỞI CÁC ÁNH XẠ GIẢ-MỞ

SOME PRESERVATIONS BY PSEUDO-OPEN MAPPINGS

Lương Quốc Tuyển[1], Phạm Thị Ái Lài[2*]

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[2]*Sinh viên của Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[*]Tác giả liên hệ: laipham2101@gmail.com

(Nhận bài: 29/6/2021; Chấp nhận đăng: 21/10/2021)

Tóm tắt - Tanaka [1] đã chứng minh rằng, một không gian topo X là s-ảnh giả-mở và liên tục của một không gian metric khi và chỉ khi nó là không gian Fréchet-Urysohn, với $cs*$ - mạng điểm -đếm được. Sau đó, Gruenhage, Michael và Tanaka [2] đã nghiên cứu tính bất biến của các phủ điểm-đếm được qua các ánh xạ giả -mở, và đặt ra bài toán mở rằng "Không gian Fréchet-Urysohn với cs*-mạng điểm-đếm được có bảo tồn qua s-ánh xạ giả-mở và liên tục hay không?". Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu về sự bảo tồn các tính chất topo thông qua các s-ánh xạ, và chứng minh rằng không gian Fréchet-Urysohn với $wcs*$-mạng điểm-đếm được là bảo tồn qua các ánh xạ sau: 1) s-ánh xạ giả-mở và liên tục; 2) s-ánh xạ đóng (hoặc mở), liên tục và toàn ánh. Nhờ đó, nhóm tác giả thu được câu trả lời một phần cho bài toán trên.

Từ khóa - $wcs*$-mạng; phủ điểm-đếm được; không gian Fréchet-Urysohn; s-ánh xạ; ánh xạ giả-mở

Abstract - Tanaka [1] proved that a X topology space is a pseudo-open and continuous s-image of a metric one if and only if it is a Fréchet-Urysohn space, with a point-countable $cs*$-network. Later, Gruenhage, Michael and Tanaka [2] have studied the immutability of the point-countable covers by the pseudo-open mappings, and given a question that "Is Fréchet-Urysohn space with point-countable cs*-network preserved by a pseudo-open and continuous s-mapping?" In this paper, the authors have examined the preservation of topology properties by s-mappings, and proved that a Fréchet-Urysohn space with a point-countable $wcs*$-network is preserved by these following mappings: 1) Pseudo-open and continuous s-mapping; 2) Close (or open), surjective and continuous s-one. Hence, the authors have got a partial answer to the above question.

Key words - $wcs*$-network; point-cointable cover; Fréchet-Urysohn space; s-mapping; pseudo-open mapping

1. Giới thiệu

Năm 1984, Gruenhage, Michael và Tanaka [1] đã nghiên cứu về không gian được xác định bởi các phủ điểm-đếm được, nhờ đó đã thu được bảo tồn của một số tính chất phủ thông qua các ánh xạ giả-mở. Hơn nữa, các tác giả đã đặt ra bài toán mở sau.

Bài toán 1. *Không gian Fréchet-Urysohn có cs^*-mạng điểm-đếm được có bảo tồn qua s-ánh xạ, giả-mở và liên tục hay không?*

Bài toán này đã thu hút rất nhiều nhà nghiên cứu topo đại cương trên thế giới quan tâm. Họ đã nghiên cứu bài toán theo nhiều khía cạnh khác nhau, nhờ đó rất nhiều khái niệm mới về mạng và nhiều bảo tồn các tính chất mạng qua ánh xạ giả-mở là thu được (xem [3-8]). Gần đây, Lin và Liu [6] đã nghiên cứu về cn-mạng, sp-mạng và đã chứng minh được rằng, không gian Fréchet-Urysohn với cn-mạng hoặc sp-mạng được bảo tồn qua ánh xạ giả-mở, và không gian với $cs*$-mạng hoặc cs'-mạng được bảo tồn qua ánh xạ thương-dãy.

Trong bài báo này, nhóm tác giả thu được câu trả lời riêng cho Bài toán 1 trong trường hợp không gian được nghiên cứu là Fréchet-Urysohn có $wcs*$-mạng điểm-đếm được. Nhờ đó, thu được một số kết quả tương tự cho sự bảo tồn không gian này qua s-ánh xạ, đóng (hoặc mở), liên tục và toàn ánh.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 2.1.1 ([1]). Giả sử $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là một ánh xạ. Khi đó,

(1) f được gọi là s-*ánh xạ* nếu $f^{-1}(y)$ khả ly trong X với mọi $y\in Y$.

(2) f được gọi là ánh xạ *giả-mở* nếu với mọi $y\in Y$ và với mọi lân cận mở U của $f^{-1}(y)$ trong X ta có $y\in \operatorname{Int} f(U)$.

(3) f được gọi là ánh xạ *mở* (tương ứng, *đóng)* nếu ảnh của mỗi tập mở (tương ứng, tập đóng) trong X là tập mở (tương ứng, tập đóng) trong Y.

Nhận xét 2.1.2. (1) Ánh xạ giả-mở là một toàn ánh. (2) Ánh xạ mở hoặc đóng là ánh xạ giả-mở.

Định nghĩa 2.1.3 ([1]). Giả sử rằng $\Im$ là một phủ của không gian topo (X,τ). Khi đó,

(1) $\Im$ được gọi là cs^*-*mạng* của X nếu với mọi dãy $\{x_n\}\subset X$ hội tụ đến $x\in U\in\tau$, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ và $F\in\Im$ sao cho:

$$\{x\}\bigcup\{x_{n_k}:k\in\mathbb{N}\}\subset F\subset U.$$

(2) $\Im$ được gọi là wcs^*-*mạng* của X nếu với mọi dãy

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Luong Quoc Tuyen)

[2] Student of Faculty of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education (Pham Thi Ai Lai)

$\{x_n\} \subset X$ hội tụ đến $x \in U \in \tau$, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ và $F \in \Im$ sao cho

$$\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset F \subset U.$$

(3) $\Im$ được gọi là *điểm-đếm được* của X nếu với mỗi $x \in X$ thuộc không quá đếm được phần tử của $\Im$.

(4) X được gọi là không gian *Fréchet-Urysohn* nếu với mọi tập con $A \subset X$ và với mọi $x \in \overline{A}$, tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset A$ sao cho $x_n \to x$.

Nhận xét 2.1.4. Mỗi cs^*-mạng là wcs^*-mạng.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Nhóm tác giả sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa, khái quát hóa nhằm đưa ra những kết quả mới cho mình.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Định lí 3.1.1. *Giả sử rằng (X,τ), (Y,σ) là hai không gian topo Hausdorff, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ là một s-ánh xạ, giả-mở và liên tục. Khi đó, nếu X là không gian Fréchet-Urysohn có wcs^*-mạng điểm-đếm được, thì Y cũng là Fréchet-Urysohn có wcs^*-mạng điểm-đếm được.*

Chứng minh. Giả sử $\wp$ là wcs^*-mạng điểm-đếm được của không gian Fréchet-Urysohn X. Khi đó,

Khẳng định 1: Y là không gian Fréchet-Urysohn.

Giả sử $A \subset Y$ và $y \in \overline{A}$. Khi đó,

(1.1) Tồn tại $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)}$.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng

$$f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)} = \varnothing.$$

Khi đó,

$$f^{-1}(y) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(A)}.$$

Như vậy, $X \setminus \overline{f^{-1}(A)}$ là một lân cận mở của $f^{-1}(y)$ trong X. Bởi vì f là ánh xạ giả-mở nên $f\left(X \setminus \overline{f^{-1}(A)}\right)$ là lân cận của y trong Y. Mặt khác, vì $y \in \overline{A}$ nên

$$f\left(X \setminus \overline{f^{-1}(A)}\right) \cap A \neq \varnothing. \text{ (a)}$$

Hơn nữa, vì $f^{-1}(A) \subset \overline{f^{-1}(A)}$ nên ta có

$$\left(X \setminus \overline{f^{-1}(A)}\right) \cap f^{-1}(A) \subset \left(X \setminus f^{-1}(A)\right) \cap f^{-1}(A) = \varnothing,$$

kéo theo

$$\left(X \setminus \overline{f^{-1}(A)}\right) \cap f^{-1}(A) = \varnothing.$$

Suy ra rằng

$$f\left(X \setminus \overline{f^{-1}(A)}\right) \cap A = \varnothing. \text{ (b)}$$

Nhờ các khẳng định (a) và (b) ta suy ra tồn tại

$$x \in f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)}.$$

(1.2) Bởi vì $x \in \overline{f^{-1}(A)}$ và X là một không gian Fréchet-Urysohn nên tồn tại dãy $\{x_n\} \subset f^{-1}(A)$ sao cho $x_n \to x$. Mặt khác, vì f là ánh xạ liên tục nên

$$f(x_n) \to f(x) = y.$$

Hơn nữa, vì $\{f(x_n)\} \subset A$ nên ta suy ra rằng, tồn tại dãy trong A hội tụ đến y trong Y. Do đó, Y là không gian Fréchet-Urysohn.

Khẳng định 2: *Y có wcs^*-mạng điểm-đếm được.*

Bởi vì f là s-ánh xạ nên với mỗi $y \in Y$, tồn tại tập con đếm được D_y trong X sao cho:

$$\overline{D_y} = f^{-1}(y).$$

Ta đặt

$$D = \bigcup\{D_y : y \in Y\};$$

$$\Im = \{f(P \cap D) : P \in \wp\}.$$

Khi đó,

(2.1) $\overline{D} = X$.

Thật vậy, giả sử $x \in X$, khi đó tồn tại $y \in Y$ sao cho $x \in f^{-1}(y)$. Suy ra:

$$x \in f^{-1}(y) = \overline{D_y} \subset \overline{D},$$

kéo theo $X \subset \overline{D}$. Mặt khác, bởi vì $\overline{D} \subset X$ nên ta suy ra rằng $\overline{D} = X$.

(2.2) $\Im$ là điểm-đếm được.

Thật vậy, giả sử rằng $y \in Y$, khi đó $y \in f(P \cap D)$ khi và chỉ khi tồn tại $x \in P \cap D$ sao cho $y = f(x)$, khi và chỉ khi

$$P \cap D_y = f^{-1}(y) \cap (P \cap D) \neq \varnothing.$$

Như vậy, ta có

$$\begin{aligned}\{G \in \Im : y \in G\} &= \left\{f(P \cap D) : P \in \wp,\ y \in f(P \cap D)\right\} \text{ (c)}\\ &= \left\{f(P \cap D) : P \in \wp,\ P \cap D_y \neq \varnothing\right\}.\end{aligned}$$

Bởi vì $\wp$ là điểm-đếm được và D_y là tập đếm được nên nhờ (c) ta suy ra $\left\{G \in \wp : y \in \wp\right\}$ là tập đếm được. Do đó, $\Im$ là điểm-đếm được.

(2.3) $\Im$ là wcs^*-mạng của Y.

Thật vậy, giả sử $\{y_n\}$ là dãy hội tụ đến $y \in U$ với U mở trong X. Ta có thể giả thiết rằng các phần tử của dãy $\{y_n\}$ là phân biệt. Đặt:

$$A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{y\}.$$

Khi đó, A không là tập đóng trong Y. Nếu $f^{-1}(A)$ là tập đóng trong X, thì $X \setminus f^{-1}(A)$ là tập mở trong X. Nhờ đẳng thức:

$$X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$$

ta suy ra $f^{-1}(Y \setminus A)$ là lân cận mở của $f^{-1}(y)$ trong X. Bởi vì f là ánh xạ giả-mở nên

$$y \in \operatorname{Int} f\left(f^{-1}(Y \setminus A)\right) \subset f\left(f^{-1}(Y \setminus A)\right) \subset Y \setminus A.$$

Do đó, $Y \setminus A$ là lân cận của y trong Y. Bởi vì $y_n \to y$ nên $y_n \in Y \setminus A$ với $n \in \mathbb{N}$ nào đó, đây là một mâu thuẫn. Như vậy, $f^{-1}(A)$ không đóng trong X.

Bởi vì $f^{-1}(A)$ không là tập đóng trong X nên tồn tại

$$x \in \overline{f^{-1}(A)} \setminus f^{-1}(A). \text{ (d)}$$

Hơn nữa, ta có

$$\overline{f^{-1}(A)} = \overline{f^{-1}(A) \cap D}. \text{ (e)}$$

Thật vậy, rõ ràng rằng

$$\overline{f^{-1}(A) \cap D} \subset \overline{f^{-1}(A)}.$$

Bây giờ, giả sử rằng $x \in \overline{f^{-1}(A)}$ và W là một lân cận mở của x. Khi đó,

$$W \cap f^{-1}(A) \neq \varnothing.$$

Suy ra rằng, tồn tại $z \in A$ và $a \in W$ sao cho $z = f(a)$, nghĩa là:

$$a \in W \cap f^{-1}(z).$$

Bởi vì $f^{-1}(z) = \overline{D_z}$ và X là không gian Fréchet-Urysohn nên tồn tại dãy $\{z_k\} \subset D_z$ sao cho $z_k \to a$. Mặt khác, vì W mở và $a \in W$ nên W là lân cận của a, do đó tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $z_{k_0} \in W \cap D_z$.

Hơn nữa, vì $D_z \subset f^{-1}(z) \subset f^{-1}(A)$ và $D_z \subset D$ nên

$$z_{k_0} \in W \cap D_z \subset W \cap \left(f^{-1}(A) \cap D\right).$$

Suy ra rằng

$$W \cap \left(f^{-1}(A) \cap D\right) \neq \varnothing,$$

do đó $x \in \overline{f^{-1}(A) \cap D}$.

Như vậy, (e) thỏa mãn.

Nhờ (d) và (e) ta suy ra:

$$x \in \overline{f^{-1}(A) \cap D} \setminus f^{-1}(A).$$

Bởi vì X là không gian Fréchet-Urysohn nên tồn tại dãy $\{x_k\} \subset f^{-1}(A) \cap D$ sao cho $x_k \to x$. Nếu $\{x_k\}$ là dãy tầm thường, nghĩa là tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_k = x$ với mọi $k \geq k_0$, thì $x = x_{k_0} \in f^{-1}(A)$, đây là một mâu thuẫn. Như vậy, $\{x_k\}$ là một dãy không tầm thường. Hơn nữa, ta có:

- Với $k_1 = 1$, tồn tại $y_{n_{k_1}} \in A$ sao cho

$$x_1 \in f^{-1}(y_{n_1}) \cap D.$$

- Tồn tại $k_2, n_{k_2} \in \mathbb{N}$ sao cho $k_2 > k_1$, $n_{k_2} > n_{k_1}$ và

$$x_{k_2} \notin \bigcup_{j \leq n_{k_1}} f^{-1}(y_{n_{k_j}}),$$

$$x_{k_2} \in f^{-1}(y_{n_{k_2}}).$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng

$$x_k \in \bigcup_{j \leq n_{k_1}} f^{-1}(y_{n_{k_j}}) \text{ với mọi } k > k_1.$$

Khi đó, vì $\{x_k\}$ là dãy không tầm thường nên tồn tại $n_0 \leq n_{k_1}$ và dãy con $\{x_{k_j}\}$ của $\{x_k\}$ sao cho:

$$\{x_{k_j}\} \subset f^{-1}(y_{n_0}).$$

Mặt khác, vì f là ánh xạ liên tục và X là không gian Hausdorff nên $f^{-1}(y_{n_0})$ đóng trong X. Do đó,

$$x \in f^{-1}(y_{n_0}) \subset f^{-1}(A),$$

đây là một mâu thuẫn. Như vậy, tồn tại $k_2 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$x_{k_2} \notin \bigcup_{j \leq n_{k_1}} f^{-1}(y_{n_{k_j}}).$$

Do đó, tồn tại $n_{k_2} \in \mathbb{N}$ sao cho $n_{k_2} > n_{k_1}$ và

$$x_{k_2} \in f^{-1}(y_{n_{k_2}}).$$

- Bằng quy nạp, ta tìm được dãy con $\{x_{k_j}\}$ của $\{x_k\}$ và dãy con $\{y_{n_{k_j}}\}$ của $\{y_n\}$ sao cho:

$$x_{k_j} \in f^{-1}(y_{n_{k_j}}) \text{ với mọi } j \in \mathbb{N}.$$

Bởi vì $\wp$ là wcs^*-mạng của X nên tồn tại $P \in \wp$ và dãy con $\{x_{k_{j_l}}\}$ của $\{x_{k_j}\}$ sao cho

$$\{x_{k_{j_l}} : l \in \mathbb{N}\} \subset P \subset f^{-1}(U).$$

Điều này suy ra rằng

$$\{y_{n_{k_{j_l}}} : l \in \mathbb{N}\} \subset f(P) \subset f\left(f^{-1}(U)\right) \subset U.$$

Do đó, $\mathfrak{I}$ là wcs^*-mạng của Y.

Như vậy, Y là một không gian Fréchet-Urysohn có wcs^*-mạng điểm-đếm được.

Nhờ Định lí 3.1.1 và Nhận xét 2.1.2 ta thu được Hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.2. *Giả sử (X,τ), (Y,σ) là hai không gian topo Hausdorff, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ là một s-ánh xạ, đóng (hoặc mở), liên tục và toàn ánh. Khi đó, nếu X là không gian Fréchet-Urysohn có wcs^*-mạng điểm-đếm được, thì Y cũng là Fréchet-Urysohn có wcs^*-mạng điểm-đếm được.*

3.2. Đánh giá

Các kết quả mới trong bài báo được thể hiện ở Định lí 3.1.1, Hệ quả 3.1.2. Trong đó:

- Định lí 3.1.1 là sự bảo tồn của Fréchet-Urysohn có $wcs*$-mạng điểm-đếm được thông qua s-ánh xạ, giả-mở và liên tục. Nhờ Nhận xét 2.1.4 ta suy ra rằng, kết quả này là một câu trả lời riêng cho Bài toán 1.

- Hệ quả 3.1.2 là sự bảo tồn của Fréchet-Urysohn có $wcs*$-mạng điểm-đếm được thông qua s-ánh xạ, mở (hoặc đóng), liên tục và toàn ánh.

4. Kết luận

Bài báo đã nghiên cứu về sự bảo tồn của một số tính chất topo thông qua các ánh xạ. Nhờ đó, nhóm tác giả đã chứng minh được các kết quả mới rằng, không gian Fréchet-Urysohn có $wcs*$-mạng điểm-đếm được là bảo tồn qua các ánh xạ sau:

(1) s-ánh xạ, giả-mở và liên tục.

(2) s-ánh xạ, đóng (hoặc mở), liên tục và toàn ánh.

Với kết quả nghiên cứu này, nhóm tác giả đã thu được câu trả lời riêng cho bài toán được đặt ra bởi Gruenhage, Michael và Tanaka [2]. Những kết quả này đã góp phần làm phong phú cho lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết mạng, lý thuyết k-mạng trong topo đại cương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Y. Tanaka, "Point-countable covers and k-networks", *Topology Proceedings*, 12 (1987), 327-349.

[2] G. Gruenhage, E. Michael and Y. Tanaka, "Spaces determined by point-countable covers", *Pacific Journal of Mathematics*, 113 (1984), 303-332.

[3] C. Liu, "Notes on closed mappings", *Houston Journal of Mathematics*, 33 (2007), 249-259.

[4] L. Q. Tuyen, "Remarks on sequence-covering closed maps", *Fasciculi Mathematici*, 53 (2014), 161-165.

[5] L. Q. Tuyen, O. V. Tuyen, "On the n-fold symmetric product of a space with a σ-(P)-property cn-network (ck-network)", *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 61 (2020), 257-263.

[6] S. Lin, X. Liu, "Notes on pseudo-open mappings and sequentially quotient mappings", *Topology and its Applications*, 272 (2020), 107-090.

[7] X. Liu, C. Liu, S. Lin, "Strict Pytkeev networks with sensors and their applications in topological groups", *Topology and its Applications*, 258 (2019), 58–78.

[8] Y. Huang, Z. Tan, S. Lin, "On spaces with point-star networks consisting of cs-finite cs∗-coverings", *Topology and its Applications*, 258 (2020), 107–510.