

VỀ TÍNH UGN CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT TRÊN CÁC ĐỒ THỊ RỜI RẠC CHU TRÌNH

ON THE UGN PROPERTY OF LEAVITT PATH ALGEBRAS ON THE DISCRETE CYCLE GRAPHS

Vũ Nhân Khánh, Ngô Tấn Phúc

Trường Đại học Đồng Tháp; vunhankhanh12@gmail.com, ntpduc@dthu.edu.vn

Tóm tắt - Năm 1962, W. Leavitt đã đề xuất khái niệm UGN như sau: một vành R được gọi là thỏa mãn điều kiện UGN nếu có một đơn ánh từ R^m đến R^n thì $m \leq n$. Khái niệm này đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết vành hay lý thuyết mô-đun nói chung. Năm 2005, Abrams – Aranda Pino đã xây dựng đại số đường đi Leavitt với hệ tử trên một trường và vật sinh từ một đồ thị mở rộng của một đồ thị có hướng. Gần đây, Abrams – Nam – Phúc đã chỉ ra điều kiện cần và đủ trên các đồ thị có hướng để đại số đường đi Leavitt của chúng có tính chất UGN. Trong bài viết này, nhóm tác giả chứng minh tính chất UGN của đại số đường đi Leavitt trên các đồ thị rời rạc chu trình. Áp dụng kết quả trên, nhóm tác giả xét tính UGN của đại số đường đi Leavitt của một số lớp đồ thị cảm sinh từ các nhóm hữu hạn.

Từ khóa - đại số đường đi Leavitt; đồ thị Cayley; đồ thị chia; đồ thị lũy thừa; tính chất UGN.

1. Đặt vấn đề

Trong [5], W. Leavitt đã đề xuất khái niệm UGN như sau: một vành R được gọi là thỏa mãn điều kiện UGN nếu có một đơn ánh từ R^m đến R^n thì $m \leq n$. Khái niệm này đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết vành hay lý thuyết mô-đun nói chung. Một số kết quả gần đây về tính UGN có thể tham khảo tại [1], [3], [6].

Cho một đồ thị (trực tiếp) E và một trường số K , Abrams - Aranda Pino trong [2] đã giới thiệu lớp đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ của đồ thị E . Lớp đại số này là mở rộng của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ trong [5]. Trong [1], Abrams, Nam, Phúc đã chỉ ra các điều kiện về đồ thị E để $L_K(E)$ thỏa mãn tính UGN.

Nội dung chính của bài viết này là chứng minh tính chất UGN của đại số đường đi Leavitt của các đồ thị rời rạc chu trình. Tiếp theo, nhóm tác giả áp dụng kết quả trên để xét tính UGN của đại số đường đi Leavitt của một số lớp đồ thị cảm sinh từ lý thuyết nhóm.

2. Tính UGN của đại số đường đi Leavitt

Trong phần này, bài báo giới thiệu lại kết quả chính trong [1] mà nhóm tác giả sẽ sử dụng xuyên suốt trong bài viết của mình. Trước tiên là nhắc lại một số khái niệm về đồ thị trực tiếp và đại số đường đi Leavitt.

Một đồ thị $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một bộ bao gồm hai tập hợp E^0 và E^1 và hai ánh xạ $r, s: E^1 \rightarrow E^0$. Các phần tử của E^0 được gọi là các đỉnh và các phần tử của E^1 được gọi là các cạnh. Đối với mỗi cạnh e trong E^1 , $s(e)$ được gọi là điểm đầu của e và $r(e)$ được gọi là điểm cuối của e . Đồ thị E được gọi là hữu hạn nếu các tập E^0 và E^1 là các

Abstract - In 1962, W. Leavitt described the UGN property as follows: a ring R is considered to have UGN property if there is a monomorphism from R^m to R^n then $m \leq n$. In 2005, Abrams – Aranda Pino constructed the Leavitt path algebras with coefficients in a field and generators in an extended graph of a digraph. Recently, Abrams – Nam – Phúc have given the necessary and sufficient conditions for the digraph which imply that their Leavitt path algebra has UGN property. In this paper, the authors give a proof for the UGN property of Leavitt path algebras of the discrete cycle graphs. Then, the authors investigate the UGN property of the Leavitt path algebras of certain graphs arising from finite groups.

Key words - Leavitt path algebra; Cayley graph; divisibility graph; power graph; UGN property.

tập hữu hạn phần tử. Trong bài viết này, ta chỉ xét những đồ thị hữu hạn.

Một đường đi trong một đồ thị E là chuỗi các cạnh $p = e_1 e_2 \dots e_n$ sao cho $r(e_i) = s(e_{i+1})$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$. Đường đi p được gọi là một chu trình nếu như $s(p) := s(e_1) = r(e_n) = r(p)$ và $s(e_i) \neq s(e_j)$ đối với mọi $i \neq j$. Nói cách khác, một chu trình là một đường đi mà bắt đầu và kết thúc trên cùng một đỉnh và không đi qua bất kỳ đỉnh nào quá một lần. Ký hiệu p^0 là tập tất cả các đỉnh trong p . Nếu c là một chu trình thì các phần tử trong tập c^0 được gọi là tập đỉnh của một chu trình. Đồ thị E được gọi là rời rạc chu trình nếu E không chứa chu trình hoặc hai chu trình phân biệt trong E không có điểm chung.

Trong đồ thị E , một đỉnh v được gọi là ngọn nếu như $s^{-1}(v) = \emptyset$ và v được gọi là gốc nếu như $r^{-1}(v) = \emptyset$, nếu v không phải là ngọn thì được gọi là đỉnh chính quy. Với hai đỉnh $u, v \in E^0$ kí hiệu $u < v$ nếu tồn tại một đường đi p mà $s(p) = u, r(p) = v$.

Cho một đồ thị trực tiếp $E = (E^0, E^1, s, r)$ và một trường bất kỳ K , đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ tử trên K là một K -đại số sinh bởi tập E^0 và E^1 , cùng với tập cạnh ảo $\{e^* \mid e \in E^1\}$, thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $v, w \in E^0$ và $e, f \in E^1$:

- (1) $vw = \delta_{v,w} w$, (δ là kí hiệu Kronecker);
- (2) $s(e)e = e = er(e)$ và $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$;
- (3) $e^*f = \delta_{e,f} r(e)$.

(4) $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$ với mọi đỉnh chính quy v .

Trong [1] các tác giả đã chỉ ra các điều kiện sau đây (Định lý 1 và Định lý 2) về điều kiện của đồ thị E để $L_K(E)$ thỏa mãn tính UGN.

Định lý 1. [1, Theorem 3.9] Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị hữu hạn và không có gốc, K là một trường. Khi đó $L_K(E)$ thỏa điều kiện UGN nếu và chỉ nếu E chứa một chu trình c sao cho $|r^{-1}(v)|=1$ với mọi $v \in c^0$.

Chu trình c thỏa mãn điều kiện $|r^{-1}(v)|=1$ với mọi $v \in c^0$ như trên được gọi là *chu trình nguồn* (theo nghĩa không có cạnh nào bên ngoài đi đến chu trình này).

Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị, và $v \in E^0$ là một gốc. Ta gọi *đồ thị thu gọn gốc* $E_{\setminus v}$ của E là đồ thị được xác định như sau: $(E_{\setminus v})^0 = E^0 \setminus \{v\}$, $(E_{\setminus v})^1 = E^1 \setminus s^{-1}(v)$, $s_{E_{\setminus v}} = s|_{(E_{\setminus v})^1}$ và $r_{E_{\setminus v}} = r|_{(E_{\setminus v})^1}$. Nói cách khác, $E_{\setminus v}$ là đồ thị có được từ E bằng cách bỏ đi v và các cạnh trong E có điểm đầu là v . Trong trường hợp E là đồ thị chỉ có một đỉnh v và không có cạnh nào (còn gọi là đỉnh cô lập) thì ta quy ước $E_{\setminus v} = E$.

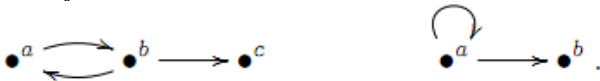
Nhận xét 1. Nếu $E = (E^0, E^1, r, s)$ là đồ thị hữu hạn không chứa chu trình thì tồn tại dãy thu gọn gốc $E = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_i \rightarrow \dots \rightarrow E_t = E_{sf}$ sao cho E_{sf} là đồ thị chỉ có một đỉnh cô lập.

Định lý 2. [1, Theorem 3.16] Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Đặt

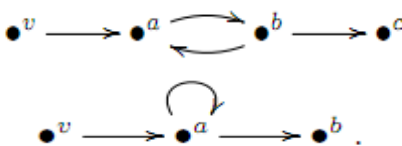
$$E = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_i \rightarrow \dots \rightarrow E_t = E_{sf}$$

là một dãy các đồ thị thu gọn gốc, trong đó E_{sf} là đồ thị không có gốc. Khi đó $L_K(E)$ thỏa điều kiện UGN khi và chỉ khi $\exists 0 \leq j \leq t$ để E_j chứa một điểm cô lập, hoặc E_{sf} chứa một chu trình c với $|r^{-1}(v)|=1$ với mọi $v \in c^0$.

Ví dụ 1. Một số đồ thị sau đây thỏa mãn điều kiện của Định lý 1:



Ví dụ 2. Các đồ thị sau đây không thỏa mãn điều kiện của Định lý 1 nhưng thỏa mãn điều kiện của Định lý 2:



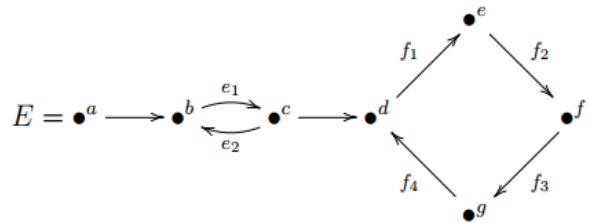
3. Kết quả chính

Định nghĩa 1. (i) Giả sử c_1 và c_2 là hai chu trình trong

đồ thị E . Nếu có một đường đi p mà $s(p) \in c_1^0$, $r(p) \in c_2^0$ (điểm đầu tại một đỉnh thuộc c_1^0 và điểm cuối tại một đỉnh thuộc c_2^0) thì ta nói chu trình c_1 kéo theo chu trình c_2 . Kí hiệu $c_1 < c_2$.

(ii) Chu trình c trong đồ thị E được gọi là *gần nhất* nếu trong E không tồn tại bất cứ chu trình nào khác c kéo theo chu trình c .

Ví dụ 3. Trong đồ thị dưới đây thì chu trình $c_1 = e_1 e_2$ kéo theo chu trình $c_2 = f_1 f_2 f_3 f_4$ và c_1 là chu trình gần nhất trong đồ thị E .



Định lý 3. Cho E là một đồ thị hữu hạn rời rạc chu trình. Khi đó nếu E chứa chu trình thì trong E tồn tại chu trình gần nhất.

Chứng minh. Giả sử mọi chu trình trong E đều không là chu trình gần nhất. Gọi c_1 là một chu trình trong E . Vì c_1 không là chu trình gần nhất nên trong E tồn tại chu trình c_2 kéo theo chu trình c_1 . Lại tiếp tục vì c_2 không là chu trình gần nhất nên trong E tồn tại chu trình c_3 kéo theo chu trình c_2 . Vì E không chứa chu trình gần nhất nên quá trình trên lặp lại vô hạn lần. Tức là ta được một dãy vô hạn các chu trình trong E :

$$\{c_1, c_2, \dots, c_k, \dots\}$$

trong đó c_{i+1} kéo theo c_i với mọi $i \geq 1$. Điều này mâu thuẫn với tính hữu hạn của E .

Định lý 4. Cho E là một đồ thị hữu hạn rời rạc chu trình và K là một trường. Khi đó $L_K(E)$ thỏa mãn điều kiện UGN.

Chứng minh. Trường hợp 1. E là đồ thị không chứa chu trình. Khi đó theo Nhận xét 1, tồn tại dãy thu gọn gốc $E = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_i \rightarrow \dots \rightarrow E_t = E_{sf}$ sao cho E_{sf} là đồ thị chỉ có một đỉnh cô lập. Kết hợp với Định lý 2 suy ra $L_K(E)$ thỏa mãn điều kiện UGN.

Trường hợp 2. E chứa chu trình. Khi đó theo Định lý 3, trong E tồn tại chu trình gần nhất. Ta gọi c là một chu trình gần nhất trong E . Khi đó có hai trường hợp có thể xảy ra:

Trường hợp 2.1. c là chu trình nguồn. Từ Định lý 1 suy ra $L_K(E)$ thỏa mãn điều kiện UGN.

Trường hợp 2.2. c không là chu trình nguồn. Vì c là một chu trình gần nhất nên các phần tử trong tập $\{v \in E^0 : v < u, v \neq u, \forall u \in c^0\}$ không là đỉnh của bất kỳ

chu trình nào trong E . Theo Nhận xét 1, tồn tại dãy các phép thu gọn gốc trong E

$$E = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_i \rightarrow \dots \rightarrow E_{st}$$

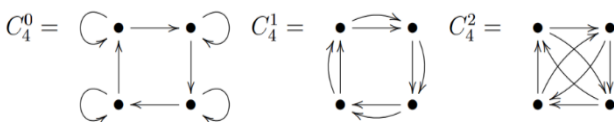
sao cho c là chu trình nguồn trong E_{st} . Suy ra $L_K(E)$ thỏa mãn điều kiện UGN theo Định lý 2.

4. Ứng dụng

Trong phần này, bài báo áp dụng kết quả chính ở trên để xét tính UGN của đại số đường đi Leavitt của một số lớp đồ thị cảm sinh từ lý thuyết nhóm.

Định nghĩa 2. [4, tr. 1] Cho G là một nhóm và S là tập sinh của G . Ta gọi *đồ thị Cayley của nhóm G ứng với tập sinh S* , kí hiệu là C_G^S , là đồ thị xác định như sau: tập đỉnh là tập các phần tử trong G và ta nói có một cạnh đi từ u đến v nếu tồn tại $s \in S$ để $u = vs$.

Ví dụ 4. Xét $G = \mathbb{Z}_n (n \geq 3)$ và chọn tập sinh $S = \{1, j\}, (1 < j < n)$. Đồ thị Cayley của G ứng với tập sinh S trong trường hợp này kí hiệu là C_n^j . Sau đây là hình vẽ của C_4^0, C_4^1 và C_4^2 .



Định lý 5. Cho G là nhóm hữu hạn nhiều hơn 2 phần tử, S là tập sinh của G và K là một trường. Khi đó, $L_K(C_G^S)$ thỏa mãn tính chất UGN khi và chỉ khi S là tập chỉ gồm một phần tử.

Chứng minh:

Nếu $S = \{a\}$ thì khi đó $G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$. Do đó C_G^S là một chu trình và theo Định lý 1, $L_K(C_G^S)$ thỏa tính UGN.

Nếu $|S| \geq 2$ thì ta chọn một phần tử $a \neq b \in S$. Giả sử $G = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$, do G là nhóm hữu hạn nên $G.a = G$ và $G.b = G$. Tức là ta có:

$$\begin{cases} \{a_1a; a_2a; \dots; a_na\} = \{a_1; a_2; \dots; a_n\} \\ \{a_1b; a_2b; \dots; a_nb\} = \{a_1; a_2; \dots; a_n\} \end{cases}$$

Như vậy, trong C_G^S chứa các cạnh mà tập điểm đầu $(\{a_1; a_2; \dots; a_n\})$ và tập điểm cuối $(\{a_1a; a_2a; \dots; a_na\}, \{a_1b; a_2b; \dots; a_nb\})$ là các hoán vị khác đồng nhất của nhau. Từ đó, ta luôn có thể chỉ ra được 2 chu trình c_1 và c_2 trong C_G^S như sau:

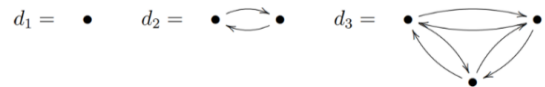
$$1) c_1^0 = c_2^0 = G.$$

2) c_1 gồm các cạnh đi từ a_i đến a_1a và c_2 gồm các cạnh đi từ a_i đến a_1b với $1 \leq i \leq n$.

Suy ra $c_1^0 \cap c_2^0 = G \neq \emptyset$ nên C_G^S không là đồ thị rời rạc chu trình. Theo Định lý 4, $L_K(C_G^S)$ không thỏa mãn tính chất UGN.

Định nghĩa 3. [4, tr. 1] Cho S là một vị nhóm giao hoán. Ta gọi *đồ thị chia của vị nhóm S* , kí hiệu là $d(S)$, là đồ thị xác định như sau: tập đỉnh là tập các phần tử trong S và ta nói có một cạnh đi từ u đến v nếu $u \neq v$ và tồn tại $s \in S$ để $u = vs$.

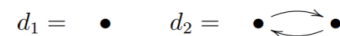
Ví dụ 5. Cho S là nhóm có n phần tử. Ta kí hiệu $d(S)$ là d_n . Khi đó:



Định lý 6. Cho S là nhóm hữu hạn có n phần tử và K là một trường. Khi đó, $L_K(d_n)$ thỏa mãn tính chất UGN khi và chỉ khi $n \leq 2$.

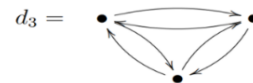
Chứng minh:

Với $n = 1, 2$ thì d_n là các đồ thị sau:



Để thấy các đồ thị này thỏa mãn tính chất chu trình rời rạc nên theo Định lý 4, $L_K(d_n)$ thỏa tính UGN.

Với $n \geq 3$ thì d_n là đồ thị chứa tập đỉnh là $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ và $n(n-1)$ cạnh. Giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có 2 cạnh nối chúng với nhau tạo thành một chu trình. Chẳng hạn như



Như vậy, đồ thị chứa các chu trình phân biệt nhưng có điểm chung. Do đó, theo Định lý 4 thì $L_K(d_n)$ không thỏa tính UGN.

Định nghĩa 4. [4, tr. 1] Cho S là một nhóm. Ta gọi *đồ thị lũy thừa của nhóm S* , kí hiệu là $P(S)$, là đồ thị xác định như sau: Tập đỉnh là tập các phần tử trong S và ta nói có một cạnh đi từ u đến v ($u, v \in S$) nếu $u \neq v$ và v là một lũy thừa của u .

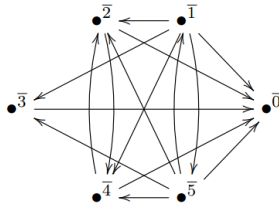
Trong bài viết này, ta kí hiệu $\mathbb{Z}_n$ là tập các số nguyên modulo n . Hiển nhiên $\mathbb{Z}_n$ là một nhóm cộng và ta viết $P(\mathbb{Z}_n) =: \Gamma_n$.

Nhận xét 2. Trên Γ_n , với mỗi $0 \leq i < n$ ta đặt $C(i) = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : (a, n) = i\}$. Khi đó:

(i) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in C(i)$ luôn có cạnh đi từ $\bar{a}$ đến $\bar{b}$ và ngược lại.

(ii) $\forall \bar{a} \in C(i), \forall \bar{b} \in C(j)$. Khi đó có cạnh đi từ $\bar{a}$ đến $\bar{b}$ khi và chỉ khi $i | j$.

Ví dụ 6. Trong Γ_6 thì $C(0) = \{\bar{0}\}$, $C(1) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ và $C(2) = \{\bar{2}, \bar{4}\}$, $C(3) = \{\bar{3}\}$. Ta được hình vẽ của Γ_6 là:



Nhận xét 3. (i) Trong Γ_n ta có $|C(1)| = \varphi(n)$ trong đó $\varphi(n)$ là giá trị của hàm số Euler tại số nguyên dương n .

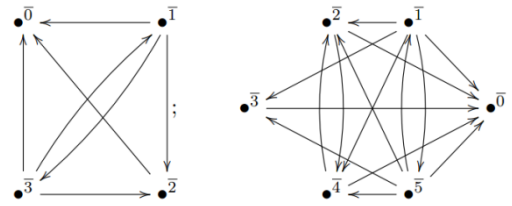
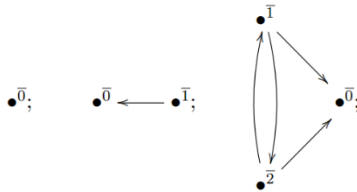
(ii) Nếu $n > 2$ thì trong Γ_n không có cạnh nối từ các đỉnh trong $C(i)$, $i > 1$ đến các đỉnh trong $C(1)$.

Áp dụng Định lý 4, ta thu được một tiêu chuẩn sau đây để kiểm tra tính UGN của đại số đường đi Leavitt của các đồ thị lũy thừa. Kết quả này đã được nêu ra trong [6]. Tuy nhiên, ở đây, nhóm tác giả cung cấp một chứng minh đơn giản hơn.

Định lý 7. [6, Định lý 4] Đại số đường đi Leavitt của Γ_n ($n \in \mathbb{N}$) thỏa mãn tính chất UGN khi và chỉ khi $\varphi(n) \leq 2$.

Chứng minh:

Theo các kết quả về hàm số Ole, $\varphi(n) \leq 2 \Leftrightarrow n = 1, 2, 3, 4, 6$. Khi đó Γ_n là các hình sau



Để thấy các đồ thị trên chỉ chứa các chu trình rời rạc nên theo Định lý 4, $L_K(\Gamma_n)$ thỏa mãn tính chất UGN.

Với $\varphi(n) > 2$, ta gọi $C(n) = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$, $k \geq 3$. Khi đó trên đồ thị Γ_n , giữa hai đỉnh bất kỳ a_i, a_j , ($1 \leq i \neq j \leq k$) luôn có các cạnh nối chúng với nhau tạo thành một chu trình. Như vậy sẽ có ít nhất hai chu trình phân biệt có điểm chung nên theo Định lý 4, $L_K(\Gamma_n)$ không thỏa tính UGN.

Ghi chú: Bài báo được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên mã số **SPD2017.02.36**.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc, "Leavitt Path Algebras Having Unbounded Generating Number", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 6(221), 2017, pp. 1322-1343.
- [2] G. Abrams and G. Aranda Pino, "The Leavitt Path Algebra of a Graph", *Journal of Algebra*, 293, 2005, pp. 319-334.
- [3] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer - Verlag, New York - Berlin, 1999.
- [4] A. V. Kelarev, "Directed Graphs and Combinatorial Properties of Semigroups", *Journal of Algebra*, 2(51), 2002, pp. 16-26.
- [5] W. G. Leavitt, "The Module Type of a Ring", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42, 1962, pp. 113-130.
- [6] N. H. Tính, N. T. Phúc, "Khảo sát tính UGN của đại số đường đi Leavitt trên các đồ thị lũy thừa", *Tạp chí Khoa học - Trường Đại học Đồng Tháp*, 28, 2017, trang 83-87.

(BBT nhận bài: 16/4/2018, hoàn tất thủ tục phản biện: 25/5/2018)