PHƯƠNG PHÁP NEWTON NỬA TRƠN CHO BÀI TOÁN BÙ PHI TUYẾN

SEMISMOOTH NEWTON METHOD FOR NONLINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEMS

Dương Xuân Hiệp[1], Phạm Quý Mười[2], Phan Đức Tuấn[2]*

[1]*Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam*

[2]*Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng*

Tác giả liên hệ: pdtuan@ued.udn.vn

(Nhận bài: 30/4/2022; Chấp nhận đăng: 29/8/2022)

Tóm tắt - Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu phương pháp Newton nửa trơn cho bài toán bù phi tuyến trong không gian $\mathbb{R}^n$. Sử dụng hàm NCP $\phi(a,b) = \min\{a,b\}$, nhóm tác giả chuyển bài toán bù phi tuyến về bài toán tìm nghiệm của phương trình không trơn trong không gian $\mathbb{R}^n$. Để có thể áp dụng được phương pháp Newton nửa trơn cho phương trình không trơn vừa nhận được, nghiên cứu tính khả vi Newton của hàm số NCP cũng như hàm số ở bên trái của phương trình này. Tính khả nghịch và bị chặn của đạo hàm Newton của hàm số được chứng minh với một số điều kiện phù hợp. Từ đó, trình bày phương pháp Newton nửa trơn để giải phương trình không trơn. Phương pháp được chứng minh có tốc độ hội tụ bậc hai địa phương đến nghiệm của bài toán. Đây là kết quả chính của bài báo này.

Từ khóa - Đạo hàm Newton; Khả vi Newton; đạo hàm Newton mạnh; Khả vi Newton mạnh; Phương pháp Newton nửa trơn

Abstract - In this paper, we study the semismooth Newton method for nonlinear complementarity problem in space $\mathbb{R}^n$. Using NCP function $\phi(a,b) = \min\{a,b\}$, we rewrite the problem as a nonsmooth equation in space $\mathbb{R}^n$. In order to apply the semismooth Newton method to this nonsmooth equation, we study the Newton differentiability of NCP function and the function on the right hand side of the equation. The inverse property and boundedness of Newton derivative of the function on the right hand side of the equation is obtained under some mild conditions. Then, we present the semismooth Newton method to solve the equation. The method is proved to have the local convergence rate of second order. This is a main result in this paper.

Key words - Newton Derivative; Newton differential; Strong Newton Derivative; Strong Newton differential; Semismooth Newton method

1. Đặt vấn đề

Trong bài báo này, nhóm tác giả kí hiệu $I = \{1,2,\dots,n\}$ và nghiên cứu bài toán bù phi tuyến $NCP(F)$ như sau: Tìm $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$x_i \geq 0, F_i(x) \geq 0, x_i F_i(x) = 0, \forall i \in I, \qquad (1)$$

Trong đó, hàm số $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ là hàm khả vi liên tục và $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Bài toán bù phi tuyến được áp dụng trong rất nhiều ứng dụng như nghiên cứu các toán tử, hệ cân bằng kinh tế cũng như trong khoa học kĩ thuật và được giới thiệu lần đầu trong luận án tiến sĩ của Cottle năm 1964. Phương pháp thường dùng để giải bài toán bù phi tuyến này là đưa về bài toán tìm nghiệm của phương trình tương đương. Sau đó, sử dụng phương pháp số để tìm nghiệm của phương trình này. Một trong các phương pháp thường được sử dụng là đưa bài toán $NCP(F)$ về giải hệ phương trình $\Phi(x) = 0$ của Mangasarian được giới thiệu trong [1] và sử dụng giải thuật Newton để tìm nghiệm.

Hiện nay, có một số kỹ thuật để đưa bài toán $NCP(F)$ về bài toán giải hệ $\Phi(x) = 0$ trong đó hàm $\Phi(x)$ được chọn khác nhau, xem [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Tuy nhiên, các hàm Φ đều là các hàm không trơn nên người ta cần mở rộng giải thuật Newton cho bài toán $NCP(F)$. Cách tiếp cận thứ nhất là sử dụng giải thuật Newton nửa trơn cho hàm $\Phi(x)$ dựa trên khái niệm dưới vi phân của Clarke [8], của Qi và Sun [9]. Một trong những giải thuật Newton nửa trơn được đưa ra sớm nhất là của Harker và Pang [10] và được phát triển bởi Kanzow [11]. Tuy nhiên, với cách chọn hàm $\Phi(x)$ gồm các hàm thành phần là $\phi(a,b) = \min\{a,b\}$, các bài viết này chỉ mới nghiên cứu cho bài toán bù phi tuyến với F là hàm tuyến tính. Một cách tiếp cận khác là sử dụng hàm Φ gồm các hàm thành phần là $\phi(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - (a+b)$ của Fisher-Burmeister, xem trong [3, 4]. Sau này, giải thuật được cải tiến để nhận được sự hội tụ toàn cục cũng như tốc độ hội tụ tuyến tính bởi Luca [6], Qi [12], Facchine và Soares [2]. Một trong những ưu điểm của phương pháp này là có thể áp dụng linh hoạt cho các bài toán bù phi tuyến $NCP(F)$.

Cách tiếp cận thứ hai được sử dụng rộng rãi trong những năm gần đây là xấp xỉ hàm $\Phi(x)$ bởi hàm $\Phi_\mu(x)$ với $\mu > 0$, được gọi là tham số trơn hóa, thỏa mãn $\lim_{\mu\to 0} \Phi_\mu(x) = \Phi(x)$. Từ đây, thay vì giải hệ $\Phi(x) = 0$, ta giải hệ $\Phi_\mu(x) = 0$. Phương pháp này có những ưu điểm là có thể áp dụng trực tiếp giải thuật Newton để tìm nghiệm trực tiếp của bài toán. Đến nay, đã có rất nhiều bài báo sử dụng phương pháp này như Kanzow [5, 13].

Kỹ thuật để đưa bài toán bù phi tuyến $NCP(F)$ về bài toán tìm nghiệm của phương trình phi tuyến là sử dụng hàm NCP. Hàm NCP là một ánh xạ $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có tính chất

$$\varphi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0.$$

Trong bài báo này, nhóm tác giả sẽ dùng một hàm NCP cụ thể. Đó là hàm φ xác định bởi

$$\varphi(a,b) = min\{a,b\}. \qquad (2)$$

[1] Vietnam Academy of Science and Technology - Institute of Mathematics (Duong Xuan Hiep)

[2] The University of Danang - University of Science and Education (Pham Quy Muoi, Phan Duc Tuan)

Lúc này, nếu ta định nghĩa toán tử $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

thì ta có: x^* là nghiệm của bài toán $NCP(F)$ khi và chỉ khi x^* là nghiệm của phương trình $\Phi(x) = 0$. Vì vậy, giải bài toán $NCP(F)$ tương đương với việc giải phương trình phi tuyến $\Phi(x) = 0$.

Trong các phần tiếp theo của bài báo, nhóm tác giả sẽ trình bày phương pháp Newton nửa trơn để giải phương trình $\Phi(x) = 0$ với Φ là hàm cho bởi (3).

2. Một số tính chất của toán tử Φ

Bổ đề 2.1 *Hàm φ xác định bởi (2) là hàm liên tục Lipschitz và khả vi theo hướng tại mọi điểm trong $\mathbb{R}^2$.*

Chứng minh. Trước hết, dễ dàng nhận thấy hàm φ xác định bởi (2) có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|].$$

Khi đó với mọi $x = (a_1, b_1); y = (a_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|$$
$$\leq \frac{1}{2}[|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)| + |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|]$$
$$\leq \frac{1}{2}(|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)| + |(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)|)$$
$$\leq \frac{1}{2}(|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)| + |(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)|)$$
$$\leq \frac{1}{2}.2\sqrt{2}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$
$$\leq \sqrt{2}|x - y|.$$

Do đó, hàm φ xác định bởi (2) là hàm liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $L = \sqrt{2}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh hàm φ xác định bởi (2) là khả vi theo hướng tại mọi điểm $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ với đạo hàm theo hướng $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\varphi'(x; d) = \begin{cases} d_1, & \text{nếu } a < b, \\ d_2, & \text{nếu } a > b, \\ \min\{d_1, d_2\}, & \text{nếu } a = b. \end{cases}$$

Nếu $a < b$ thì ta có thể chọn $\lambda \to 0^+$ đủ bé sao cho $a + \lambda d_1 < b + \lambda d_2$. Khi đó,

$$\varphi'(x; d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|\varphi(x+\lambda d) - \varphi(x)|}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} d_1 = d_1.$$

Do đó, $\varphi'(x; d) = d_1$. Tương tự, nếu $a > b$ thì $\varphi'(x; d) = d_2$.

Nếu $a = b$ thì

$$\varphi'(x; d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|\varphi(x+\lambda d) - \varphi(x)|}{\lambda}$$
$$= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{[(d_1 + d_2) - |d_1 - d_2|]}{2} = \min\{d_1, d_2\}.$$

Vậy, Bổ đề 2.1 được chứng minh. □

Định nghĩa 2.1 Cho U là một tập mở của $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và f là một ánh xạ xác định trên Ω. Ánh xạ $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ được gọi là khả vi Newton tại $x \in U$ nếu tồn tại ánh xạ $F: U \to \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - F(x+h)h||}{||h||} = 0, \quad (4)$$

Trong đó, $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ là tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ Ω vào $\mathbb{R}^n$. Khi đó, F được gọi là một đạo hàm Newton của f tại x.

Định nghĩa 2.2 Cho U là một tập mở của $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và f là một ánh xạ xác định trên Ω. Ánh xạ $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ được gọi là khả vi Newton mạnh tại $x \in U$ nếu tồn tại ánh xạ $F: U \to \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\operatorname{Lim}_{h \to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - F(x+h)h||}{||h||^2} = 0. \quad (5)$$

Khi đó, F được gọi là một đạo hàm Newton mạnh của f tại x.

Định lí 2.1 *Hàm φ xác định bởi (2) khả vi Newton mạnh tại mọi điểm với đạo hàm Newton mạnh cho bởi ma trận cỡ 1×2 sau:*

$$G(y) = (\varphi_1(y) \quad \varphi_2(y)),$$

trong đó $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } y_1 < y_2, \\ 0, & \text{nếu } y_1 > y_2, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } y_1 = y_2 \end{cases}$$

và

$$\varphi_2(y) = \varphi_2(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } y_1 < y_2, \\ 1, & \text{nếu } y_1 > y_2, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } y_1 = y_2. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $G(y) \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Thật vậy, $G(y)(\cdot)$ là một phiếm hàm tuyến tính và

Nếu $y_1 < y_2$ thì

$$||G(y)|| = \sup_{||h||=1} ||G(y)h|| \leq 1.$$

Nếu $y_1 > y_2$ thì tương tự như trên, ta có $||G(y)|| \leq 1$.

Nếu $y_1 = y_2$ thì

$$||G(y)|| = \sup_{||h||=1} ||G(y)h|| = \frac{1}{2}.$$

Vậy, ta có $G \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ và $||G(y)|| \leq 1$ với mọi y.

Tiếp theo, sẽ chứng minh G là một đạo hàm Newton mạnh của φ. Thật vậy, với mỗi $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ và $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Nếu $y_1 < y_2$ thì vì $h \to 0$ nên ta có thể chọn h sao cho $y_1 + h_1 < y_2 + h_2$. Khi đó,

$$\lim_{h \to 0} \frac{||\varphi(y+h) - \varphi(y) - G(y+h)h||}{||h||^2}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{||(y_1 + h_1) - y_1 - h_1||}{||h||^2} = 0.$$

Nếu $y_1 > y_2$ tương tự như trên ta có thể chọn h sao cho $y_1 + h_1 > y_2 + h_2$. Khi đó, ta cũng thu được

$$\lim_{h \to 0} \frac{||\varphi(y+h) - \varphi(y) - G(y+h)h||}{||h||^2} = 0.$$

Nếu $y_1 = y_2$ thì ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp $h_1 < h_2$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{||\varphi(y+h) - \varphi(y) - G(y+h)h||}{||h||^2}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{||(y_1 + h_1) - y_1 - h_1||}{||h||^2} = 0.$$

Trường hợp $h_1 > h_2$: tương tự như trên.

Trường hợp $h_1 = h_2$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{||\varphi(y+h)-\varphi(y)-G(y+h)h||}{||h||^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{||(y_1+h_1)-y_1-\frac{1}{2}(h_1+h_2)||}{||h||^2}=0.$$

Do vậy G là một đạo hàm Newton mạnh của hàm φ xác định bởi (2) tại mọi điểm. □

Định lí 2.2 *Hàm Φ xác định bởi*

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\varphi(x_1,F_1(x))\\ \vdots\\ \varphi(x_n,F_n(x))\end{pmatrix},$$

khả vi Newton mạnh tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}^n$ với đạo hàm Newton mạnh cho bởi

$$\Phi'(x)=A(x)+B(x)F'(x), \tag{6}$$

Trong đó

$$A(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x_1,F_1(x)) & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \varphi_1(x_n,F_n(x))\end{pmatrix},$$

$$B(x)=\begin{pmatrix}\varphi_2(x_1,F_1(x)) & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \varphi_2(x_n,F_n(x))\end{pmatrix},$$

và

$$F'(x)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) \text{ là ma trận Jacobi của } f \text{ tại } x.$$

Chứng minh. Với mỗi $x\in\mathbb{R}^n$ và $\omega\in\mathbb{R}^n$, xét hiệu $\Phi(x+\omega)-\Phi(x)-\Phi'(x+\omega)\omega$. Bằng cách khai triển và tính toán trực tiếp ta thu được vectơ biểu diễn hiệu trên với hàng thứ i xác định bởi

$$\begin{aligned}M_i &= \varphi(x_i+\omega_i,F_i(x+\omega))-\varphi(x_i,F_i(x))\\ &-\varphi_1(x_i+\omega_i,F_i(x+\omega))\omega_i\\ &-\varphi_2(x_i+\omega_i,F_i(x+\omega))\textstyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\omega_j.\end{aligned}$$

Đặt

$$\alpha=\{j|x_j<F_j(x)\},$$

$$\beta=\{j|x_j>F_j(x)\},$$

$$\gamma=\{j|x_j=F_j(x)\}.$$

Ta xét các trường hợp sau:

Với $i\in\alpha$, chọn ω đủ bé sao cho $x_i+\omega_i<F_i(x+\omega)$, ta có:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{|M_i|}{||\omega||}=\lim_{\omega\to 0}\frac{|x_i+\omega_i-x_i-\omega_i|}{||\omega||}=0.$$

Với $i\in\beta$, chọn ω đủ bé sao cho $x_i+\omega_i>F_i(x+\omega)$, ta có:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{|M_i|}{||\omega||}=\lim_{\omega\to 0}\frac{|F_i(x+\omega)-F_i(x)-\sum_{j=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\omega_j|}{||\omega||}=0.$$

do F_i là các hàm khả vi.

Với $i\in\gamma$, ta có

Nếu $x_i+\omega_i<F_i(x+\omega)$ thì tương tự trường hợp $i\in\alpha$, ta có

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{|M_i|}{||\omega||}=0.$$

Nếu $x_i+\omega_i>F_i(x+\omega)$ thì tương tự trường hợp $i\in\beta$, ta có

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{|M_i|}{||\omega||}=0.$$

Nếu $x_i+\omega_i=F_i(x+\omega)$, thì ta có

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{|M_i|}{||\omega||}$$

$$=\lim_{\omega\to 0}\frac{|F_i(x+\omega)-F_i(x)-\frac{1}{2}\omega_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\omega_j|}{||\omega||}$$

$$=\lim_{\omega\to 0}\frac{|\frac{1}{2}(F_i(x+\omega)-F_i(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\omega_j)|}{||\omega||}=0.$$

Do đó, trong tất cả các trường hợp ta đều có

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{||\Phi(x+\omega)-\Phi(x)-\Phi'(x+\omega)\omega||}{||\omega||}$$

$$\le\sum_{i=1}^n\lim_{\omega\to 0}\frac{|M_i|}{||\omega||}=0.$$

Vậy Φ' xác định bởi (6) là một đạo hàm Newton mạnh của hàm Φ. □

Định nghĩa 2.3 Một ma trận $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ được gọi là P-ma trận nếu với mỗi $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, tồn tại một tập chỉ số $i_0=i_0(x)\subset I$ sao cho $x_{i_0}[Mx]_{i_0}>0$.

Định lí 2.3 *Giả sử $F'(x)$ là một P-ma trận. Khi đó, đạo hàm Newton của Φ xác định bởi (6) khả nghịch.*

Chứng minh. Dễ thấy $A(x)$ và $B(x)$ là các ma trận đường chéo xác định dương. Hơn nữa $A(x)+B(x)$ xác định dương nên với giả thiết $F'(x)$ là P −ma trận, theo Định lí 2.7 trong [13] ta có điều phải chứng minh. □

Trong [14], ta đã biết rằng với A,B là các ma trận vuông và C là một ma trận có chiều thích hợp thì

$$(A+CBC^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}C(B^{-1}+C^TA^{-1}C)^{-1}C^TA^{-1}.$$

Xét ma trận vuông khối có dạng

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \tag{7}$$

Trong đó, A,B,C,D lần lượt là các ma trận cỡ $k\times m, k\times n, l\times m$ và $l\times n$ sao cho $k+l=m+n$. Khi đó, theo [15] và [16] ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1 *(i) Giả sử A khả nghịch. Khi đó, ma trận khối M xác định bởi (7) khả nghịch khi và chỉ khi phần bù Schur $D-CA^{-1}B$ của A khả nghịch và*

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix},$$

trong đó

$$m_{11}=A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1},$$

$$m_{12}=-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1},$$

$$m_{21}=-(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1},$$

$$m_{22}=(D-CA^{-1}B)^{-1}.$$

(ii) Giả sử D là ma trận khả nghịch. Khi đó, ma trận khối M xác định bởi (7) khả nghịch khi và chỉ khi phần bù Schur $A-BD^{-1}C$ của D khả nghịch và

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix},$$

trong đó

$$m_{11}=(A-BD^{-1}C)^{-1},$$

$$m_{12} = -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1},$$
$$m_{21} = -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1},$$
$$m_{22} = D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}.$$

Với mỗi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, ta kí hiệu các tập chỉ số như sau

$$\alpha = \{i \in I | x_i < F_i(x)\},$$
$$\beta = \{i \in I | x_i > F_i(x)\},$$
$$\gamma = \{i \in I | x_i = F_i(x)\}.$$

Cho M là một ma trận vuông cấp cấp n. Ta kí hiệu $M_{\alpha\beta}$ là ma trận con của M ứng với các hàng α và các cột β. Từ đây, ta định nghĩa các ma trận con của ma trận Jacobi $F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \left(F'_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ của f tại x:

$$F'_{\mu\rho} = (F'_{ij}), i \in \mu, j \in \rho,$$

với μ, ρ là tập các chỉ số của ma trận Jacobi $F'(x)$.

Khi đó, tính khả nghịch của ma trận

$$M(x) = \begin{pmatrix} F'_{\beta\beta}(x) & F'_{\beta\gamma}(x) \\ F'_{\gamma\beta}(x) & F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

được đưa ra trong định lí sau. □

Định lí 2.4 *(i) Nếu với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, $F'_{\beta\beta}(x)$ khả nghịch và phần bù Schur của $F'_{\beta\beta}(x)$ khả nghịch thì $\Phi'(x)$ xác định bởi (6) khả nghịch.*

(ii) Nếu với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, $F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma}$ khả nghịch và phần bù Schur của $F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma}$ khả nghịch thì $\Phi'(x)$ xác định bởi (6) khả nghịch.

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\varphi_1(x_i, F_i(x)) = 1, \varphi_2(x_i, F_i(x)) = 0, \forall i \in \alpha,$$
$$\varphi_1(x_i, F_i(x)) = 0, \varphi_2(x_i, F_i(x)) = 1, \forall i \in \beta,$$
$$\varphi_1(x_i, F_i(x)) = \tfrac{1}{2}, \varphi_2(x_i, F_i(x)) = \tfrac{1}{2}, \forall i \in \gamma.$$

Do đó, để đơn giản các kí hiệu ta viết lại các ma trận $A(x), B(x), F'(x), \Phi'(x)$ dưới dạng

$$A(x) := A = \begin{pmatrix} I_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I_\gamma \end{pmatrix},$$

$$B(x) := B = \begin{pmatrix} 0_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & I_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I_\gamma \end{pmatrix},$$

$$F'(x) := F' = \begin{pmatrix} F'_{\alpha\alpha} & F'_{\alpha\beta} & F'_{\alpha\gamma} \\ F'_{\beta\alpha} & F'_{\beta\beta} & F'_{\beta\gamma} \\ F'_{\gamma\alpha} & F'_{\gamma\beta} & F'_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

$$\Phi'(x) := \Phi' = \begin{pmatrix} \Phi'_\alpha \\ \Phi'_\beta \\ \Phi'_\gamma \end{pmatrix}.$$

Khi đó, với $d, y \in \mathbb{R}^n$ bất kì, ta có

$$\Phi' d = y$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_\alpha & = y_\alpha \\ F'_{\beta\alpha}d_\alpha + F'_{\beta\beta}d_\beta + F'_{\beta\gamma}d_\gamma & = y_\beta \\ \frac{1}{2}d_\gamma + \frac{1}{2}F'_{\gamma\alpha}d_\alpha + \frac{1}{2}F'_{\gamma\beta}d_\beta + \frac{1}{2}F'_{\gamma\gamma}d_\gamma & = y_\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_\alpha & = y_\alpha \\ F'_{\beta\beta}d_\beta + F'_{\beta\gamma}d_\gamma & = y_\beta - F'_{\beta\alpha}d_\alpha \\ F'_{\gamma\beta}d_\beta + (F'_{\gamma\gamma} + I_{\gamma\gamma})d_\gamma & = 2y_\gamma - F'_{\gamma\alpha}d_\alpha \end{cases}$$

Từ đây suy ra Φ' khả nghịch khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_{\beta\beta}d_\beta + F'_{\beta\gamma}d_\gamma & = y_\beta - F'_{\beta\alpha}d_\alpha \\ F'_{\gamma\beta}d_\beta + (F'_{\gamma\gamma} + I_{\gamma\gamma})d_\gamma & = 2y_\gamma - F'_{\gamma\alpha}d_\alpha \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Hơn nữa, hệ trên có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi ma trận khối

$$M = \begin{pmatrix} F'_{\beta\beta} & F'_{\beta\gamma} \\ F'_{\gamma\beta} & F'_{\gamma\gamma} + I_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

khả nghịch. Do đó, ma trận của đạo hàm Φ' khả nghịch khi và chỉ khi ma trận khối M xác định ở trên khả nghịch. Theo Định lí 2.1 ta có các kết luận (i) và (ii). □

3. Phương pháp Newton nửa trơn

Trong phần này, nhóm tác giả trình bày giải thuật Newton nửa trơn cho bài toán bù phi tuyến. Giải thuật được mô tả như sau: Chọn $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Với mỗi $k \ge 0$, xét dãy $\{x^k\}$ xác định bởi

$$x^{k+1} = x^k - \Phi'(x^k)\Phi(x^k).$$

Giả thiết 1 *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở khác rỗng. Xét ma trận*

$$M(x) = \begin{pmatrix} F'_{\beta\beta}(x) & F'_{\beta\gamma}(x) \\ F'_{\gamma\beta}(x) & F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

với $\beta = \{i \in I | x_i > F_i(x)\}, \gamma = \{i \in I | x_i = F_i(x)\}$. Giả sử một trong hai điều kiện sau đây thỏa mãn

- *$F'_{\beta\beta}(x)$ khả nghịch và bị chặn đều trên Ω. Phần bù Schur của $F'_{\beta\beta}(x)$ khả nghịch và bị chặn đều trên Ω.*
- *$F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma}$ khả nghịch và bị chặn đều trên Ω. Phần bù Schur của $F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma}$ khả nghịch và bị chặn đều trên Ω.*

Định lí 3.1 *Giả sử Giả thiết 1 thỏa mãn. Khi đó, đạo hàm $\Phi'(x)$ khả nghịch với mọi $x \in \Omega$ và $[\Phi'(x)]^{-1}$ bị chặn đều trên D. Hơn nữa*

$$||\Phi'(x)^{-1}|| \le 1 + \| M^{-1}(x) \| \begin{pmatrix} 3 + \| F'_{\beta\alpha}(x) \| \\ + \| F'_{\gamma\alpha}(x) \| \end{pmatrix},$$

trong đó

$$M(x) = \begin{pmatrix} F'_{\beta\beta}(x) & F'_{\beta\gamma}(x) \\ F'_{\gamma\beta}(x) & F'_{\gamma\gamma}(x) + I_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

và

$$\alpha = \{i \in I | x_i < F_i(x)\},$$
$$\beta = \{i \in I | x_i > F_i(x)\},$$
$$\gamma = \{i \in I | x_i = F_i(x)\}.$$

Chứng minh. Theo Định lí 2.4, $\Phi'(x)$ khả nghịch. Phần còn lại của định lí được chứng minh tương tự như chứng minh của Bổ đề 3.6 trong [17] và Bổ đề 3.4 trong [18]. Thật vậy, với $d, y \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\Phi'(x)d = y$, từ chứng minh của Định lí 2.4 và tính khả nghịch của $\Phi'(x)$, ta có

$$(\Phi'(x))^{-1}y = d = \begin{pmatrix} d_\alpha \\ d_\beta \\ d_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\alpha \\ M^{-1}(x)N(x) \end{pmatrix},$$

trong đó

$$N(x)=\begin{pmatrix} y_\beta - F'_{\beta\alpha}(x)y_\alpha \\ 2y_\gamma - F'_{\gamma\alpha}(x)y_\alpha \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\| \Phi'(x))^{-1}y \| = \left\| \begin{pmatrix} y_\alpha \\ M^{-1}(x)N(x) \end{pmatrix} \right\|$$
$$\le \| y_\alpha \| + \| M^{-1}(x) \| \| N(x) \|.$$

Hơn nữa,

$$\| N(x) \| \le \| y_\beta - F'_{\beta\alpha}(x)y_\alpha \| + \| 2y_\gamma - F'_{\gamma\alpha}(x)y_\alpha \|$$
$$\le \| y_\beta \| + \| F'_{\beta\alpha}(x) \| \| y_\alpha \| + 2 \| y_\gamma \| + \| F'_{\gamma\alpha}(x) \| \| y_\alpha \|.$$

Do đó,

$$\| (\Phi'(x))^{-1}y \|$$
$$\le \| y_\alpha \| + \| M^{-1}(x) \| \big(\| y_\beta \| + \| F'_{\beta\alpha}(x) \| \| y_\alpha \|$$
$$+2 \| y_\gamma \| + \| F'_{\gamma\alpha}(x) \| \| y_\alpha \| \big)$$
$$\le \Big(1 + \| M^{-1}(x) \| \big(1 + \| F'_{\beta\alpha}(x) \| + 2 + \| F'_{\gamma\alpha}(x) \| \big) \Big) \| y \|$$
$$\le \Big(1 + \| M^{-1}(x) \| \big(3 + \| F'_{\beta\alpha}(x) \| + \| F'_{\gamma\alpha}(x) \| \big) \Big) \| y \|. \quad \square$$

Định lí 3.2 *Giả sử hàm F thỏa mãn Giả thiết 1. Khi đó, với $x^0 \in \mathbb{R}^n$ đủ gần nghiệm $x^* \in \Omega$ của phương trình $\Phi(x) = 0$ thì giải thuật Newton nửa trơn xác định bởi*

$$x^{k+1} = x^k - [\Phi'(x^k)]^{-1}\Phi(x^k),$$

hội tụ bậc hai về nghiệm x^*.

Chứng minh. Vì Giả thiết 1 được thỏa mãn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\| [\Phi(x)]^{-1} \| \le M$ với mọi $x \in \Omega$. Mặt khác, vì Φ là hàm khả vi Newton mạnh nên tồn tại $\epsilon \in (0,1)$ sao cho với mọi $x \in B(x^*, \epsilon)$ ta có

$$\| \Phi(x) - \Phi(x^*) - \Phi'(x)(x - x^*) \| \le \frac{\epsilon}{M} \| x - x^* \|^2.$$

Khi đó, với $x_0 \in B(x^*, \epsilon)$ và giả sử $x_k \in B(x^*, \epsilon)$, ta có

$$\| x_{k+1} - x^* \|$$
$$= \| x_k - x^* - [\Phi'(x^k)]^{-1}\Phi(x^k) + [\Phi'(x^k)]^{-1}\Phi(x^*) \|$$
$$\le \| [\Phi'(x^k)]^{-1} \| \, \| \Phi(x_k) - \Phi(x^*) - \Phi'(x_k)(x_k - x^*) \|$$
$$\le M \frac{\epsilon}{M} \| x_k - x^* \|^2 = \epsilon \| x_k - x^* \|^2.$$

Điều này chỉ ra rằng, $x_{k+1} \in B(x^*, \epsilon)$ và dãy $\{x_k\}$ hội tụ bậc hai về nghiệm x^*. $\square$

4. Kết luận

Trong bài báo này, đã trình bày giải thuật Newton nửa trơn cho bài toán bù phi tuyến. Nhóm tác giả sử dụng hàm NCP $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$ để đưa bài toán bù phi tuyến về bài toán tìm nghiệm của phương trình $\Phi(x) = 0$. Nghiên cứu chứng minh rằng, hàm Φ khả vi Newton mạnh và phương pháp Newton nửa trơn hội tụ địa phương bậc hai đến nghiệm của phương trình nếu Giả thiết 1 được thỏa mãn.

Lời cảm ơn: Một số kết quả trong bài báo này được tác giả Dương Xuân Hiệp nghiên cứu trong thời gian học thạc sĩ tại Viện toán học, Viện khoa học và công nghệ Việt Nam. Tác giả Dương Xuân Hiệp xin gửi lời cảm ơn Quỹ Unesco đã hỗ trợ trong đề tài nghiên cứu dành cho tài năng trẻ mã số ICRTM03_2021.03.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Q.L. Mangasarian and M.V. Solodov, "Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization", *Mathematical Programming*, 62(1), 1993, 277-297.

[2] F. Facchinei and J. Soares, "A new merit function for nonlinear complementarity problems and a related algorithm", *SIAM Journal on Optimization*, 7(1), 1997, 226-247.

[3] A. Fisher, "A special newton-type optimization method", *Optimization*, 24(3-4), 1992, 269-284.

[4] A. Fisher, "Solution of monotone complementarity problems with locally lipschitzian function", *Mathematical Programming*, 76(3), 1996, 513-532.

[5] C. Kanzow, "Nonlinear complementarity as unconstrained optimization", *Journal of Optimization theory and apllications*, 88(1), 1996, 139-155.

[6] T.D. Luca, F. Facchinei, and C. Kanzow, "A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems", *Mathematical programming*, 75(3), 1996, 407-439.

[7] Q.L. Mangasarian and M.V. Solodov, "Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization", *Mathematical Programming*, 62(1), 1993, 277-297.

[8] F.H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Society for Industrial an Applied Mathematics Philadelphia, 1990.

[9] L. Qi and J. Sun, "A nonsmooth verson of newton's method", *Mathematical Programming*, 58(1), 1993, 353–367.

[10] P.T. Harker and J.S. Pang, "A damped-newton method for the linear complementarity problem", *Lectures in applied mathematics*, 26, 1990, 265-284.

[11] A. Fischer and C. Kanzow, "On finite termination of an iterative method for linear complementarity problems", *Mathematical Programming*, 74, 1996, 279-292.

[12] H. Jiang and L. Qi, "A new nonsmooth equations approach to nonlinear complementarity problems", *Journal on Control and Optimization*, 35(1), 1997, 178–193.

[13] C. Kanzow and H. Kleinmichel, "A new class of semismooth newton-type methods for nonlinear complementarity problems", *Computational Optimization and Applications*, 11(1), 1998, 227-251.

[14] D.P. Bertsekas, *Constrained optimization and Lagrange multiplier method*, Academic Press, 1982.

[15] Z. Fuzhen, *The Schur complement and its application*, Springer Science and Business Media, 2005.

[16] L.T. Tzer and S.H. Shiou, "Inverses of 2x2 block matrics", *An International Journal Computers and Mathematics with Application*, 43(1-2), 2002, 119-29.

[17] P.Q. Muoi, D.N. Hao, P. Maass, and M. Pidcock, "Semismooth newton and quasi-newton methods in weighted l^1-regularization", *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 21(5), 2013, 665-693.

[18] P.Q. Muoi, D.N. Hao, S.K. Sahoo, D. Tang, N.H Cong, and D. Cuong, "Inverse problems with nonnegative and sparse solutions: algorithms and application to the phase retrieval problem", *Inverse Problems*, 34(5), 2018, 055007.