MỘT VÀI NHẬN XÉT TRÊN SIÊU KHÔNG GIAN PIXLEY-ROY

SOME REMARKS ON PIXLEY-ROY HYPERSPACE

Lương Quốc Tuyển, Huỳnh Thị Oanh Triều, Trần Nam Tiến*

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng[1]

*Tác giả liên hệ: tntiendn@gmail.com

(Nhận bài: 21/6/2022; Chấp nhận đăng: 29/8/2022)

Tóm tắt - Trong những năm gần đây, một trong những hướng được nhiều người quan tâm là nghiên cứu về mối liên hệ giữa các tính chất topo trên không gian topo (X,τ) với các tính chất topo trên siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$ gồm các tập con hữu hạn khác rỗng của X. Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu về tính trù mật, không gian Lindelöf yếu, mạng Pytkeev chặt, *cn*-mạng và đã thu được những kết quả mới như sau: (1) Nếu $\mathcal{U}$ là một tập mở trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$, thì $\cup\mathcal{U}$ là một tập mở trong X. (2) Tồn tại T_1-không gian X sao cho $\cup\mathcal{A}$ mở trong X nhưng $\mathcal{A}$ không mở trong $PR[X]$. (3) Nếu $\mathcal{A}$ trù mật trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$, thì $\cup\mathcal{A}$ trù mật trong X. (4) Nếu siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là Lindelöf yếu, thì X cũng là không gian Lindelöf yếu. (5) Nếu X có mạng Pytkeev chặt, thì siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ có mạng Pytkeev chặt.

Từ khóa - Lindelöf yếu; Fréchet-Urysohn; T_1-không gian; mạng Pytkeev chặt; siêu không gian; Pixley–Roy.

Abstract - In recent years, the study of the relationship between topological properties on topological spaces (X,τ) with topological properties on Pixley–Roy hyperspaces $PR[X]$ consisting of finite subsets (X,τ) is one of the central problems of general topology. In this paper, the authors study about density, weak Lindelöf space, strict Pytkeev network, cn-network and have obtained new results as follows: (1) If $\mathcal{U}$ is an open subset of Pixley–Roy hyperspace $PR[X]$, then $\cup\mathcal{U}$ is an open subset of X. (2) Exists a T_1-space X such that $\cup\mathcal{A}$ is an open subset of X but $\mathcal{A}$ isn't an open subset of $PR[X]$. (3) If $\mathcal{A}$ is dense on Pixley–Roy hyperspace $PR[X]$, then $\cup\mathcal{A}$ is dense on X. (4) If Pixley–Roy hyperspace $PR[X]$ is weakly Lindelöf, then X is weakly Lindelöf. (5) If X has a strict Pytkeev network, then Pixley–Roy hyperspace $PR[X]$ has a strict Pytkeev network.

Key words - weakly Lindelöf; Fréchet-Urysohn; T_1-space; strict Pytkeev network; hyperspace; Pixley–Roy.

1. Giới thiệu

Năm 1978, David J. Lutzer đã đưa ra khái niệm về topo Pixley-Roy trên tập $PR[X]$ gồm tất cả các tập con khác rỗng hữu hạn của một không gian topo (X,τ), sau này người ta gọi là siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$. Tác giả đã thu được nhiều kết quả quan trọng về giả-đặc trưng đếm được, tính hoàn chỉnh của siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$ và mối quan hệ của các tính chất topo trên không gian topo (X,τ) với các tính chất topo trên siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$ của nó (xem [1]). Từ đó, siêu không gian Pixley-Roy đã thực sự thu hút nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu, nhiều kết quả thú vị đã thu được về không gian con, tính khả metric, tính compact, tính paracompact, tính Lindelöf, tính di truyền của topo Pixley-Roy, đặc biệt là các tính chất mạng (xem [2, 3, 4]).

Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu mối liên hệ của một số tính chất topo giữa không gian topo (X,τ) và siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ của nó.

Tất cả các không gian topo trình bày trong bài báo này được nhóm tác giả quy ước là không gian Hausdorff, còn khái niệm và thuật ngữ khác nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường. Ngoài ra, nhóm tác giả sử dụng thêm một số ký hiệu: $\overline{A}$ là bao đóng của A trong X, còn nếu $\mathcal{A}$ là tập con của siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$, thì ký hiệu $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ là bao đóng của $\mathcal{A}$ trong $PR[X]$ và $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\{U:U\in\mathcal{A}\}$.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Giả sử (X,τ) là một không gian topo và kí hiệu $PR[X]$ là họ gồm tất cả các tập con khác rỗng hữu hạn của X.

Với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta đặt

$$PR_n[X]=\{A\subset X:1\le|A|\le n\}.$$

Khi đó, $PR[X]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}PR_n[X].$

Giả sử $F,A\subset X$, ta đặt

$$[F,A]=\{H\in PR[X]:F\subset H\subset A\}.$$

Trên $PR[X]$ ta xét họ

$$\mathfrak{B}=\{[F,V]:F\in PR[X],\ V\in\tau\}.$$

Bổ đề 2.1.1 ([1])**.** *$\mathfrak{B}$ là cơ sở của một topo nào đó trên siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$.*

Định nghĩa 2.1.2 ([1])**.** Topo được xác định trong Bổ đề 2.1.1 được gọi là *topo Pixley–Roy* của $PR[X]$, và $PR[X]$ cùng với topo này được gọi là *siêu không gian Pixley–Roy*.

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Luong Quoc Tuyen, Huynh Thi Oanh Trieu, Tran Nam Tien)

Định nghĩa 2.1.3 ([2]). Không gian topo (X,τ) được gọi là *Lindelöf* nếu mọi phủ mở $\mathcal{U}$ của X, tồn tại phủ con đếm được.

Không gian topo (X,τ) được gọi là *Lindelöf yếu* nếu mọi phủ mở $\mathcal{U}$ của X, tồn tại họ con đếm được $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ sao cho $\bigcup\mathcal{V}$ trù mật trong X.

Nhận xét 2.1.4 ([2]). Mỗi không gian Lindelöf là không gian Lindelöf yếu.

Định nghĩa 2.1.5 ([2]). Giả sử (X,τ) là một không gian topo, $A\subset X$ và $x\in X$. Khi đó, ta nói A *tụ tại điểm* x hay x là *điểm tụ của* A nếu mọi lân cận của x chứa vô hạn phần tử của A.

Định nghĩa 2.1.6 ([2]). Giả sử (X,τ) là một không gian topo và $\mathcal{P}$ là một phủ gồm các tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là cn*-mạng* của X nếu với mỗi lân cận U của x trong X, tập hợp $\bigcup\{P\in\mathcal{P}: x\in P\subset U\}$ là lân cận của x.

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng Pytkeev* của X nếu nó là mạng của X và với mỗi lân cận U của x trong X, và với mỗi tập con A trong X có điểm tụ là x, tồn tại $P\in\mathcal{P}$ sao cho $P\cap A$ là vô hạn và $P\subset U$.

(3) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng Pytkeev chặt* của X nếu nó là mạng của X và với mỗi lân cận U của x trong X, và với mỗi tập con A trong X có điểm tụ là x, tồn tại $P\in\mathcal{P}$ sao cho $P\cap A$ là vô hạn và $x\in P\subset U$.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Nhóm tác giả sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa, khái quát hóa nhằm đưa ra những kết quả mới cho mình.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Bổ đề 3.1.1. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, nếu $\mathcal{U}$ là một tập mở trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$, thì $\bigcup\mathcal{U}$ là một tập mở trong X.*

Chứng minh. Giả sử $x\in\bigcup\mathcal{U}$, khi đó tồn tại $F\in\mathcal{U}$ sao cho $x\in F$. Bởi vì $F\in\mathcal{U}$ nên tồn tại tập V mở trong X sao cho

$$F\in[F,V]\subset\mathcal{U}.$$

Mặt khác, vì $F\subset V$ nên $x\in V$. Do đó, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $V\subset\bigcup\mathcal{U}$.

Thật vậy, giả sử $z\in V$, khi đó

$$F\subset\{z\}\cup F\subset V.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$\{z\}\cup F\in[F,V]\subset\mathcal{U}.$$

Suy ra

$$z\in\{z\}\cup F\subset\bigcup\mathcal{U}.$$

Như vậy, $V\subset\bigcup\mathcal{U}$, do đó $\bigcup\mathcal{U}$ là một tập mở trong X.

Ví dụ 3.1.2. Tồn tại T_1-không gian X sao cho $\bigcup\mathcal{A}$ mở trong X nhưng $\mathcal{A}$ không mở trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$.

Chứng minh. Giả sử X là tập vô hạn với topo Zariski

$$\tau=\{A\subset X: A=\varnothing \text{ hoặc } X\setminus A \text{ hữu hạn}\}.$$

Khi đó, X là T_1-không gian. Thật vậy, giả sử $a,b\in X$ sao cho $a\neq b.$ Ta đặt

$$A=X\setminus\{b\},\quad B=X\setminus\{a\}.$$

Lúc này, $a\in A,\ b\in B.$ Hơn nữa, vì

$$X\setminus A=\{b\}, X\setminus B=\{a\}$$

nên $X\setminus A$ và $X\setminus B$ là các tập con hữu hạn của X, do đó $A,B\in\tau.$ Như vậy, A và B lần lượt là các lân cận mở của a,b trong X thỏa mãn $a\notin B$ và $b\notin A.$ Bởi thế, X là T_1-không gian.

Bây giờ, ta đặt

$$\mathcal{A}=\{\{x\}: x\in X\}.$$

Rõ ràng $\bigcup\mathcal{A}=X$ là mở trong X. Tuy nhiên, $\mathcal{A}$ không mở trong $PR[X]$.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $\mathcal{A}$ mở trong $PR[X]$. Bởi vì $\{x\}\in\mathcal{A}$ nên tồn tại $V\in\tau$ sao cho

$$\{x\}\in[\{x\},V]\subset\mathcal{A}.$$

Mặt khác, vì $\{x\}\neq\varnothing$ và $X\setminus\{x\}$ vô hạn nên $\{x\}\notin\tau.$ Hơn nữa, vì $V\in\tau$ và $x\in V$ nên ta suy ra $V\neq\{x\}$, do đó tồn tại $y\in V\setminus\{x\}$. Bởi vì

$$\{x\}\subset\{x,y\}\subset V$$

nên ta suy ra $\{x,y\}\in\mathcal{A}$, đây là một mâu thuẫn. Như vậy, $\mathcal{A}$ không là tập con mở trong $PR[X]$.

Định lí 3.1.3. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, nếu siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là Lindelöf yếu, thì X cũng là không gian Lindelöf yếu.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{U}$ là một phủ mở của X. Ta đặt

$$\mathfrak{U}=\{[\{x\},X]: x\in X\}.$$

Với mọi $F\in PR[X]$, ta có $F\neq\varnothing$, do đó tồn tại $x\in F$. Bởi vì

$$\{x\}\subset F\subset X$$

nên ta suy ra $F\in[\{x\},X]$, kéo theo $F\in\bigcup\mathfrak{U}$. Mặt khác, vì $[\{x\},X]$ mở trong $PR[X]$ với mọi $x\in X$ nên $\mathfrak{U}$ là một phủ mở của $PR[X]$.

Bởi vì $PR[X]$ là không gian Lindelöf yếu nên tồn tại họ con đếm được $\mathfrak{V}\subset\mathfrak{U}$ sao cho $\bigcup\mathfrak{V}$ trù mật trong $PR[X]$. Do đó, tồn tại dãy $\{x_n\}\subset X$ sao cho

$$\mathfrak{V}=\{[\{x_n\},X]:\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Bởi vì, $\mathcal{U}$ là phủ của X nên với mỗi $n\in\mathbb{N}$, tồn tại $U_n\in\mathcal{U}$ sao cho $x_n\in U_n$. Ta đặt

$$\mathcal{V}=\{U_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

Khi đó, $\mathcal{V}$ là một họ con đếm được của $\mathcal{U}$. Như vậy, để hoàn thành chứng minh ta chỉ cần chứng tỏ rằng $\bigcup\mathcal{V}$ trù mật trong X.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $\bigcup\mathcal{V}$ không trù mật trong X, nghĩa là

$$X\setminus\overline{\bigcup\mathcal{V}}\neq\varnothing.$$

Suy ra tồn tại $x\in X\setminus\overline{\bigcup\mathcal{V}}$. Bây giờ, giả sử V là một lân cận mở bất kì của x trong X. Khi đó, $[\{x\},V]$ là lân cận mở của $\{x\}$ trong $PR[X]$. Bởi vì $\{x\}\in PR[X]$ và $\bigcup\mathfrak{V}$ trù mật trong $PR[X]$ nên $\{x\}\in \mathtt{Cl}(\bigcup\mathfrak{V})$. Do đó,

$$[\{x\},V]\cap(\bigcup\mathfrak{V})\neq\varnothing.$$

Suy ra tồn tại $H\in\bigcup\mathfrak{V}$ sao cho

$$\{x\}\subset H\subset V.$$

Bởi vì $H\in\bigcup\mathfrak{V}$ nên tồn tại $n\in\mathbb{N}$ sao cho

$$H\in[\{x_n\},X].$$

Do đó,

$$\{x_n\}\subset H\subset X,$$

kéo theo $x_n\in V$. Mặt khác, vì

$$x_n\in U_n\in\mathcal{V}$$

nên $x_n\in\bigcup\mathcal{V}$. Suy ra

$$x_n\in V\cap(\bigcup\mathcal{V}),$$

kéo theo

$$V\cap(\bigcup\mathcal{V})\neq\varnothing$$

và $x\in\overline{\bigcup\mathcal{V}}$, đây là một mâu thuẫn.

Định lí 3.1.4. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, nếu $\mathcal{A}$ trù mật trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$, thì $\bigcup\mathcal{A}$ trù mật trong X.*

Chứng minh. Giả sử rằng

$$X\setminus\overline{\bigcup\mathcal{A}}\neq\varnothing.$$

Khi đó, tồn tại $x\in X\setminus\overline{\bigcup\mathcal{A}}$. Bởi vì $\mathtt{Cl}(\mathcal{A})=PR[X]$ nên $\{x\}\in\mathtt{Cl}(\mathcal{A})$. Mặt khác, vì $[\{x\},X]$ là một lân cận mở của $\{x\}$ trong $PR[X]$ nên ta suy ra

$$[\{x\},X]\cap\mathcal{A}\neq\varnothing.$$

Do đó, tồn tại $K\in[\{x\},X]\cap\mathcal{A}$. Bởi vì $K\in[\{x\},X]$ nên $x\in K$. Hơn nữa, vì $K\in\mathcal{A}$ suy ra $K\subset\bigcup\mathcal{A}$. Do đó,

$$x\in\bigcup\mathcal{A}\subset\overline{\bigcup\mathcal{A}},$$

đây là một mâu thuẫn. Như vậy, $\bigcup\mathcal{A}$ trù mật trong X.

Hệ quả 3.1.5. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, nếu siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là không gian khả li, thì X cũng là không gian khả li.*

Chứng minh. Giả sử $PR[X]$ là không gian khả li. Khi đó, tồn tại tập con đếm được $\mathcal{A}\subset PR[X]$ sao cho

$$\mathtt{Cl}(\mathcal{A})=PR[X].$$

Theo Định lí 3.1.4 ta suy ra $\overline{\bigcup\mathcal{A}}=X$. Bởi vì mỗi phần tử của $\mathcal{A}$ hữu hạn và $\mathcal{A}$ đếm được nên $\bigcup\mathcal{A}$ đếm được. Do đó, X khả li.

Bổ đề 3.1.6. *Giả sử (X,τ) là T_1-không gian. Khi đó, $x\in X$ là điểm tụ của A khi và chỉ khi $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử x là điểm tụ của A và U là lân cận mở bất kỳ của x. Khi đó, U chứa vô hạn phần tử của A, suy ra U chứa vô hạn phần tử của tập $A\setminus\{x\}$. Như vậy,

$$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing.$$

Điều này kéo theo rằng $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$.

Điều kiện đủ. Giả sử $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$ và U là lân cận mở của x. Ta chứng minh rằng U chứa vô hạn phần tử của A. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng U chứa hữu hạn phần tử của A, giả sử rằng

$$U\cap(A\setminus\{x\})=\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Bởi vì X là T_1-không gian nên $\{x_1,\ldots,x_n\}$ đóng trong X. Do đó,

$$V=U\setminus\{x_1,\ldots,x_n\}$$

là lân cận mở của x và

$$V\cap(A\setminus\{x\})=\varnothing.$$

Điều này mâu thuẫn với $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$.

Bổ đề 3.1.7. *Giả sử (X,τ) là T_1-không gian. Khi đó, mỗi mạng Pytkeev chặt là cn-mạng của X.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{P}$ là mạng Pytkeev chặt của T_1-không gian X và U là lân cận của x trong X. Đặt

$$V=\bigcup\{P\in\mathcal{P} : x\in P\subset U\}.$$

Ta chỉ cần chứng minh V là lân cận của x. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng V không là lân cận của x. Khi đó,

$$W\not\subset V \text{ với mọi lân cận mở } W \text{ của } x,$$

nghĩa là tồn tại $y\in W\setminus V$. Do đó, với mọi lân cận mở W của x, ta có

$$W\cap(X\setminus V)=W\setminus V\neq\varnothing,$$

kéo theo $x\in\overline{X\setminus V}$. Mặt khác, vì $x\in V$ nên $x\notin X\setminus V$, kéo theo

$$X\setminus V=(X\setminus V)\setminus\{x\}.$$

Do đó,

$$x\in\overline{X\setminus V}=\overline{(X\setminus V)\setminus\{x\}}.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 3.1.6, vì X là T_1-không gian nên x là điểm tụ của $X \setminus V$. Bởi vì $\mathcal{P}$ là mạng Pytkeev chặt của X nên tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho $x \in P \subset U$ và $P \cap (X \setminus V)$ là vô hạn. Lại vì $P \subset V$ nên

$$P \cap (X \setminus V) \subset V \cap (X \setminus V) = \varnothing,$$

nghĩa là $P \cap (X \setminus V) = \varnothing$. Điều này mâu thuẫn với $P \cap (X \setminus V)$ là vô hạn. Như vậy, $\mathcal{P}$ là cn-mạng của X.

Định lí 3.1.8. *Giả sử (X, τ) là T_1-không gian và $\mathcal{P}$ là họ nào đó gồm các tập con của X. Với mỗi $F \in PR[X]$, ta đặt*

$$(\mathcal{P})_F = \{P \in \mathcal{P} : P \cap F \neq \varnothing\};$$

$$\mathfrak{B} = \{[F, \bigcup \mathcal{F}] : F \in PR[X],$$

$$\text{và } \mathcal{F} \text{ là họ con nào đó của } (\mathcal{P})_F\}.$$

Khi đó, nếu $\mathcal{P}$ là mạng Pytkeev chặt của X, thì $\mathfrak{B}$ là mạng Pytkeev chặt của $PR[X]$.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{P}$ là mạng Pytkeev chặt của X, $\mathcal{U}$ là lân cận của F trong $PR[X]$ và F là điểm tụ của $\mathcal{A}$ trong $PR[X]$. Khi đó, theo Bổ đề 3.1.7, vì X là T_1-không gian nên $\mathcal{P}$ là cn-mạng của X. Mặt khác, vì $\mathcal{U}$ là lân cận của F trong $PR[X]$ nên tồn tại $V \in \tau$ sao cho $F \subset V$ và

$$F \in [F, V] \subset \mathcal{U}.$$

Do đó, với mọi $x \in F$, tồn tại $P_x \in \mathcal{P}$ sao cho

$$x \in P_x \subset V,$$

và

$$\bigcup \{P \in (\mathcal{P})_x : P \subset V\}$$

là lân cận của x trong X, trong đó

$$(\mathcal{P})_x = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}.$$

Bây giờ, ta đặt

$$\mathcal{F} = \{P \in (\mathcal{P})_F : P \subset V\} = \bigcup_{x \in F} \{P \in (\mathcal{P})_x : P \subset V\}.$$

Suy ra với mọi $x \in F$, $\bigcup \mathcal{F}$ là lân cận của F trong X. Do đó, tồn tại $U \in \tau$ sao cho

$$F \subset U \subset \bigcup \mathcal{F} \subset V,$$

kéo theo

$$F \in [F, U] \subset [F, \bigcup \mathcal{F}] \subset [F, V].$$

Điều này chứng tỏ rằng $\mathcal{W} = [F, \bigcup \mathcal{F}]$ là lân cận của F trong $PR[X]$ thỏa mãn

$$\mathcal{W} \in \mathfrak{B} \text{ và } F \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U}.$$

Hơn nữa, bởi vì F là điểm tụ của $\mathcal{A}$ trong $PR[X]$ nên $\mathcal{W} \cap \mathcal{A}$ là vô hạn. Như vậy, $\mathfrak{B}$ là mạng Pytkeev chặt của $PR[X]$.

3.2. Đánh giá

Các kết quả chính trong bài báo được thể hiện ở các Bổ đề 3.1.1, Ví dụ 3.1.2, Định lí 3.1.3, 3.1.4 và 3.1.8. Trong đó:

- Bổ đề 3.1.1 và Ví dụ 3.1.2 là mối liên hệ giữa một tập mở $\mathcal{U}$ trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ với tập tập hợp $\bigcup \mathcal{U}$ trong không gian topo X.

- Định lí 3.1.3 khẳng định rằng, nếu siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là Lindelöf yếu, thì X cũng là không gian Lindelöf yếu. Tuy nhiên, chiều ngược lại của khẳng định này vẫn đang còn mở.

- Định lí 3.1.4 chỉ ra rằng, nếu $\mathcal{A}$ trù mật trong siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$, thì $\bigcup \mathcal{A}$ cũng trù mật trong X. Chiều ngược lại của khẳng định này vẫn đang còn mở.

- Định lí 3.1.8 chỉ ra rằng, nếu X có mạng Pytkeev chặt, thì siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ có mạng Pytkeev chặt. Chiều ngược lại của khẳng định này vẫn đang còn mở.

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả đã đưa ra và chứng minh chi tiết 5 kết quả mới về mối liên hệ giữa các tính chất topo của không gian topo (X, τ) với siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ của nó. Các kết quả này phần nào đó làm phong phú cho lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết về mạng, lý thuyết k-mạng trong topo đại cương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. J. Lutzer, "Pixley-Roy topology", *Topology Proceedings*, vol. 3, 1978, pp. 139-158.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] Lj.D. R. Kočinac, L. Q. Tuyen, O. V. Tuyen, "Some results on Pixley-Roy hyperspaces", *Journal of Mathematics*, vol. 22, 2022, pp. 1-8.

[4] M. Sakai, "The Fréchet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces", *Topology and its Applications*, vol. 159, 2012, pp. 308-314.