MỘT VÀI NHẬN XÉT TRÊN SIÊU KHÔNG GIAN PIXLEY-ROY

SOME REMARKS ON PIXLEY-ROY HYPERSPACE

Phan Thị Quỳnh Như*, Trần Nam Tiến, Lương Quốc Tuyển

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng[1]

*Tác giả liên hệ: phannhu04@gmail.com

(Nhận bài: 23/6/2022; Chấp nhận đăng: 09/11/2022)

Tóm tắt – Bài báo nghiên cứu về mối quan hệ giữa các tiên đề tách trong không gian tôpô (X,τ) và siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ của nó gồm các tập con hữu hạn của (X,τ) là một trong những bài toán trọng tâm của tôpô đại cương. Trong bài báo này, nhóm tác giả đã chứng minh rằng: (1) Nếu (X,τ) là một không gian tôpô bất kỳ, thì siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là một T_0-không gian. (2) Tồn tại một không gian tôpô (X,τ) sao cho siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là T_0-không gian nhưng (X,τ) không là T_0-không gian. (3) (X,τ) là T_1-không gian khi và chỉ khi siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ cũng là T_1-không gian. (4) Nếu (X,τ) là T_1-không gian, thì siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ là T_3-không gian. (5) Nếu (X,τ) là T_1-không gian, thì trên siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ ta có $\mathrm{Cl}([H,V])\subset[H,\bar{V}]$. Tuy nhiên, nếu (X,τ) là T_0-không gian, thì khẳng định không còn đúng nữa.

Từ khóa - T_0-không gian; T_1-không gian; T_2-không gian; T_3-không gian; siêu không gian; Pixley–Roy.

Abstract - The study of the relationship between topological properties on topological spaces (X,τ) with topological properties on Pixley–Roy hyperspaces $PR[X]$ consisting of finite subsets of (X,τ) is one of the central problems of general topology. In this paper, the authors proved that: (1) If (X,τ) is any topology space, then Pixley-Roy hyperspace $PR[X]$ is a T_0-space. (2) There has been a topology space (X,τ) such that Pixley-Roy hyperspace $PR[X]$ is a T_0-space but (X,τ) isn't T_0-space. (3). (X,τ) is a T_1-space if and only if Pixley-Roy hyperspace $PR[X]$ is a T_1-space. (4) If (X,τ) is T_1-space, then Pixley-Roy hyperspace $PR[X]$ is a T_3-space. (5) If (X,τ) is a T_1-space, then on Pixley-Roy hyperspace $PR[X]$ we have $\mathrm{Cl}([H,V])\subset[H,\bar{V}]$. However, if (X,τ) is a T_0-space, then the assertion is no longer true.

Key words - T_0-space; T_1-space; T_2-space; T_3-space; hyperspace; Pixley–Roy.

1. Giới thiệu

Vào mùa xuân năm 1969, tại Hội nghị tôpô được tổ chức hàng năm tại Đại học Auburn, Hoa Kỳ, một trong những kết quả thú vị đã được trình bày. Tại đây, C. Pixley và P. Roy đã đưa ra một cấu trúc tôpô hoàn toàn mới về một ví dụ trong Lý thuyết không gian Moore. Sau nhiều năm nghiên cứu, người ta khẳng định rằng cấu trúc tôpô mà Carl Pixley và Prabir Roy đưa ra đã thực sự quan trọng trong việc nghiên cứu về không gian Moore. Đến năm 1978, D. J. Lutzer đã chính thức đưa ra khái niệm về tôpô Pixley-Roy trên tập $PR[X]$ bao gồm tất cả các tập con khác rỗng và hữu hạn của một không gian tôpô X, sau này người ta gọi $PR[X]$ là siêu không gian Pixley-Roy. Tác giả đã thu được nhiều kết quả quan trọng về tính đếm được, mối liên hệ giữa các tính chất tôpô trên X với các tính chất tôpô trên $PR[X]$ (Xem [1]). Từ đó, sức hút của tôpô Pixley-Roy rất lớn, các nhà toán học đã dành nhiều thời gian để nghiên cứu về nó, nhiều kết quả hấp dẫn đã thu được về không gian con, tính compact,… (Xem [2, 3, 4]).

Trong những năm gần đây, các nhà toán học dành nhiều nghiên cứu về mối liên hệ giữa các tính chất tôpô trên không gian tôpô (X,τ) với các tính chất tôpô trên siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$. Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu mối liên hệ về tiên đề tách trong không gian tôpô (X,τ) và siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ của nó (Xem [4, 5, 6]).

Tất cả các khái niệm và thuật ngữ trong bài báo nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường. Ngoài ra, nhóm tác giả sử dụng thêm một số ký hiệu: $\bar{A}$ là bao đóng của A trong X, còn nếu $\mathcal{A}$ là tập con của siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$ thì nhóm tác giả ký hiệu $\mathrm{Cl}(\mathcal{A})$ là bao đóng của $\mathcal{A}$ trong $PR[X]$.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

Giả sử (X,τ) là một không gian tôpô và kí hiệu $PR[X]$ là họ gồm tất cả các tập con khác rỗng hữu hạn của X.

Với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta đặt

$$PR_n[X] = \{A \subset X: 1 \le |A| \le n\}.$$

Khi đó, $PR[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} PR_n[X]$.

Giả sử $F, A \subset X$, ta đặt

$$[F, A] = \{H \in PR[X]: F \subset H \subset A\}.$$

Trên $PR[X]$. ta xét họ

$$\mathfrak{B} = \{[F, V]: F \in PR[X], V \in \tau\}.$$

Bổ đề 2.1.1 ([1]). $\mathfrak{B}$ là cơ sở của một tôpô nào đó trên siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$.

Định nghĩa 2.1.2 ([1]). Tôpô được xác định trong Bổ đề 2.1.1 được gọi là *tôpô Pixley–Roy* của $PR[X]$ và

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Phan Thi Quynh Nhu, Tran Nam Tien, Luong Quoc Tuyen)

$PR[X]$ cùng với tôpô này được gọi là *siêu không gian Pixley–Roy.*

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Nhóm tác giả sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa, khái quát hóa nhằm đưa ra những kết quả mới cho mình.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Bổ đề 3.1.1. *Giả sử* (X,τ) *là không gian* tôpô. *Khi đó, các khẳng định sau là đúng:*

(1) *Nếu* X *là* T_1*-không gian và* $H\subset V\subset X$*, thì* $[H,V]$ *là tập con đóng của* $PR[X]$.

(2) *Nếu* $\mathcal{U}$ *là một tập mở trong* $PR[X]$ *thì* $\bigcup\mathcal{U}$ *là một tập mở trong* X.

Chứng minh.

(1) Giả sử $H\subset V\subset X$, khi đó:

- *Trường hợp 1:* Nếu H là tập con vô hạn của X, thì $[H,V]=\varnothing$. Do đó, $[H,V]$ là tập con đóng $PR[X]$.

- Trường hợp 2: Nếu H là tập con hữu hạn của X, thì ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$\mathcal{K}=PR[X]\backslash[H,V]$$

là tập con mở trong $PR[X]$.

Giả sử $F\in\mathcal{K}$, khi đó $F\notin[H,V]$. Suy ra

$$H\not\subset F \text{ hoặc } F\not\subset V.$$

(a) Nếu $F\not\subset V$, thì

$$[F,X]\cap[H,V]=\varnothing.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại

$$A\in[F,X]\cap[H,V].$$

Khi đó, $F\subset A\subset V$, đây là một mâu thuẫn. Do đó,

$$F\in[F,X]\subset PR[X]\backslash[H,V]=\mathcal{K}.$$

Bởi vì, $X\in\tau$ nên $[F,X]$ là lân cận mở của F trong $PR[X]$. Do đó, $\mathcal{K}$ mở trong $PR[X]$.

(b) Nếu $H\not\subset F$, thì tồn tại $a\in H\setminus F$. Mặt khác, vì X là T_1-không gian nên $\{a\}$ đóng trong X. Ta đặt $U=X\setminus\{a\}$, khi đó

$$U\in\tau,\ F\subset U,\ H\not\subset U.$$

Như vậy, nếu

$$[H,V]\cap[F,U]\neq\varnothing,$$

thì tồn tại

$$G\in[H,V]\cap[F,U].$$

Suy ra

$$H\subset G\subset V \text{ và } F\subset G\subset U,$$

kéo theo $H\subset U$, đây là một mâu thuẫn. Như vậy,

$$[H,V]\cap[F,U]=\varnothing,$$

kéo theo

$$F\in[F,U]\subset PR[X]\backslash[H,V]=\mathcal{K}.$$

Bởi vì $U\in\tau$ nên $[F,U]$ mở trong $PR[X]$. Do đó, $\mathcal{K}$ mở trong $PR[X]$.

(2) Giả sử $x\in\bigcup\mathcal{U}$, khi đó tồn tại $F\in\mathcal{U}$ sao cho $x\in F$. Bởi vì $F\in\mathcal{U}$ nên tồn tại tập V mở trong X sao cho

$$F\in[F,V]\subset\mathcal{U}.$$

Mặt khác, vì $F\subset V$ nên $x\in V$. Do đó, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $V\subset\bigcup\mathcal{U}$.

Thật vậy, giả sử $z\in V$, khi đó

$$F\subset\{z\}\cup F\subset V.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$\{z\}\cup F\in[F,V]\subset\mathcal{U}.$$

Suy ra

$$z\in\{z\}\cup F\subset\bigcup\mathcal{U}.$$

Như vậy, $V\subset\bigcup\mathcal{U}$, do đó $\bigcup\mathcal{U}$ là một tập mở trong X.

Định lí 3.1.2. *Giả sử* (X,τ) *là một không gian tôpô. Khi đó,* $PR[X]$ *là* T_0*-không gian.*

Chứng minh

Giả sử $A,B\in PR[X]$ sao cho $A\neq B$. Khi đó, bởi vì $X\in\tau$ nên $\mathcal{U}=[A,X]$ là lân cận mở của A và $\mathcal{V}=[B,X]$ là lân cận mở của B trong $PR[X]$. Ta xét các trường hợp sau

- *Trường hợp 1:* $A\subset B$.

Bởi vì $A\neq B$ nên $B\not\subset A$, kéo theo $A\notin\mathcal{V}$.

- *Trường hợp 2:* $B\subset A$.

Bởi vì $A\neq B$ nên $A\not\subset B$, kéo theo $B\notin\mathcal{U}$.

- *Trường hợp 3:* $A\not\subset B$ và $B\subset A$.

Rõ ràng rằng $A\notin\mathcal{V}$ và $B\notin\mathcal{U}$.

Như vậy, $PR[X]$ là T_0-không gian.

Ví dụ 3.1.3. Tồn tại không gian tôpô (X,τ) sao cho $PR[X]$ là T_0-không gian nhưng X không là T_0-không gian.

Chứng minh.

Giả sử $X=\{a,b\}$ và $\tau=\{\varnothing,X\}$. Khi đó,

$$PR[X]=\{\{a\},\{b\},X\};$$
$$\mathfrak{B}=\{[\{a\},X],[\{b\},X],[X,X]\}.$$

Theo Định lí 3.1.2, ta suy ra $PR[X]$ là T_0-không gian. Tuy nhiên, X không là T_0-không gian.

Thật vậy, ta xét $x=a$ và $y=b$. Khi đó, chỉ có một lân cận mở của x trong X là X. Mặt khác, vì $y\in X$ nên X không là T_0-không gian.

Định lí 3.1.4. *Giả sử* (X,τ) *là một không gian tôpô. Khi đó,* X *là* T_1*-không gian khi và chỉ khi* $PR[X]$ *là* T_1*-không gian.*

Chứng minh

Điều kiện cần. Giả sử X là T_1-không gian và $A, B \in PR[X]$ sao cho $A \neq B.$ Ta chứng minh tồn tại các lân cận mở $\mathcal{U}$ của A và $\mathcal{V}$ của B trong $PR[X]$ sao cho

$$A \notin \mathcal{V},\ B \notin \mathcal{U}.$$

Thật vậy, bởi vì X là T_1-không gian nên tập một điểm $\{x\}$ là tập đóng trong X với mọi $x \in X$. Do đó, $X \setminus \{x\}$ là tập mở trong X với mọi $x \in X$.

- Nếu $A \subset B,$ thì tồn tại $x_0 \in B \setminus A,$ kéo theo

$$A \subset X \setminus \{x_0\} \in \tau.$$

Ta đặt

$$\mathcal{U} = [A, X \setminus \{x_0\}],\ \ \mathcal{V} = [B, X].$$

Khi đó, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ lần lượt là lân cận mở của A, B trong $\mathrm{PL}[X]$ thỏa mãn rằng $A \notin \mathcal{V}$ và $B \notin \mathcal{U}.$

- Nếu $A \not\subset B,$ thì tồn tại $y_0 \in A \setminus B,$ kéo theo

$$B \subset X \setminus \{y_0\} \in \tau.$$

Ta đặt

$$\mathcal{U} = [A, X],\ \ \mathcal{V} = [B, X \setminus \{y_0\}].$$

Khi đó, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ lần lượt là lân cận mở của A, B trong $PR[X].$ thỏa mãn $A \notin \mathcal{V}$ và $B \notin \mathcal{U}.$

Như vậy, $PR[X]$ là T_1-không gian.

Điều kiện đủ. Giả sử $PR[X]$ là T_1-không gian. Ta chứng minh rằng X là T_1-không gian. Thật vậy, giả sử $x, y \in X$ sao cho $x \neq y.$ Khi đó, vì $PR[X]$ là T_1-không gian và $\{x\}, \{x, y\} \in PR[X],$ $\{x\} \neq \{x, y\}$ nên tồn tại các lân cận mở $\mathcal{U}$ của $\{x\}$ và $\mathcal{V}$ của $\{x, y\}$ trong $PR[X]$ sao cho $\{x, y\} \notin \mathcal{U};$ $\{x\} \notin \mathcal{V}.$ Ta lấy $U, W \in \tau$ sao cho

$$\{x\} \in [\{x\}, U] \subset \mathcal{U};$$
$$\{x, y\} \in [\{x, y\}, W] \subset \mathcal{V}.$$

Như vậy,

$$\{x, y\} \notin [\{x\}, U\}];\ \ \{x\} \notin [\{x, y\}, W].$$

Bởi vì $\{x\} \subset \{x, y\}$ và $\{x, y\} \notin [\{x\}, U]$ nên $\{x, y\} \not\subset U.$ Mặt khác, vì $x \in U$ nên ta suy ra $y \notin U.$ Do đó, tồn tại lân cận mở U của x sao cho $y \notin U.$

Tiếp theo, hoàn toàn tương tự như trên đối với cặp điểm $\{y\}, \{x, y\} \in PR[X]$ ta tìm được lân cận mở V của y sao cho $x \notin V.$

Như vậy, với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y,$ tồn tại các lân cận mở U của x và V của y sao cho $y \notin U$ và $x \notin V,$ do đó X là T_1-không gian.

Hệ quả 3.1.5. *Giả sử (X, τ) là một không gian tôpô. Khi đó, nếu X là T_1-không gian, thì $PR[X]$ là T_3-không gian. Do đó, $PR[X]$ là T_2-không gian.*

Chứng minh

Giả sử X là T_1-không gian. Khi đó, theo Định lí 3.1.4, ta suy ra $PR[X]$ là T_1-không gian. Như vậy, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $PR[X]$ là một không gian chính quy.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{A}$ là tập con đóng trong $PR[X]$ và $H \notin \mathcal{A}.$ Bởi vì $\mathcal{A}$ đóng nên $PR[X] \setminus \mathcal{A}$ mở trong $PR[X]$ và $H \in PR[X] \setminus \mathcal{A}.$ Do đó, tồn tại $U \in \tau$ sao cho

$$H \in [H, U] \subset PR[X] \setminus \mathcal{A}.$$

Suy ra

$$\mathcal{A} \subset PR[X] \setminus [H, U].$$

Bởi vì $H \subset U$ nên theo Bổ đề 3.1.1 (1), $[H, U]$ đóng trong $PR[X].$ kéo theo $PR[X] \setminus [H, U]$ là lân cận mở của $\mathcal{A}$ trong $PR[X].$ Do đó, nếu ta đặt

$$\mathcal{U} = [H, U],\ \ \mathcal{V} = PR[X] \setminus [H, U],$$

thì $\mathcal{U}$ là lân cận mở của H và $\mathcal{V}$ là lân cận mở của $\mathcal{A}$ trong $PR[X].$ thỏa mãn $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing,$ do đó $PR[X]$ là không gian chính quy.

Như vậy, $PR[X]$ là T_3-không gian, do đó $PR[X]$ là T_2-không gian.

Định lí 3.1.6. *Giả sử (X, τ) là T_1-không gian, $V \subset X$ và $H \in PR[X].$ Khi đó,*

$$\mathrm{Cl}([H, V]) \subset [H, \bar{V}].$$

Tuy nhiên, nếu X là một T_0-không gian, thì khẳng định không còn đúng nữa.

Chứng minh. Giả sử $H \in PR[X]$ và $V \subset X.$ Khi đó,

Trường hợp 1: $H \not\subset V.$

Bởi vì $H \not\subset V$ nên $[H, V] = \varnothing,$ kéo theo

$$\mathrm{Cl}([H, V]) = \varnothing.$$

Do đó, $\mathrm{Cl}([H, V]) = \varnothing \subset [H, \bar{V}].$

Trường hợp 2: $H \subset V.$

Theo Bổ đề 3.1.1 (1), $[H, V]$ là tập con đóng trong $PR[X].$ Do đó,

$$\mathrm{Cl}([H, V]) = [H, V].$$

Mặt khác, vì $V \subset \bar{V}$ nên

$$\mathrm{Cl}([H, V]) = [H, V] \subset [H, \bar{V}].$$

Tuy nhiên, nếu X là T_0-không gian, thì đẳng thức không xảy ra. Thật vậy, giả sử $X = \{a, b, c\}$ và

$$\tau = \big\{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}\big\}.$$

Khi đó,

- X là T_0-không gian.

  Thật vậy, lấy $x, y \in X$ mà $x \neq y.$

  - Nếu $x = a$ và $y = b,$ thì tồn tại lân cận mở $\{a\}$ của x trong X sao cho $y \notin \{a\}.$
  - Nếu $x = a$ và $y = c,$ thì tồn tại lân cận mở $\{a\}$ của x trong X sao cho $y \notin \{a\}.$
  - Nếu $x = b$ và $y = c,$ thì tồn tại lân cận mở $\{b\}$ của x trong X sao cho $y \notin \{b\}.$

- X không là T_1-không gian.

Thật vậy, ta xét $x = a$ và $y = c$, khi đó X và $\{a, c\}$ là tất cả các lân cận mở của y trong X. Tuy nhiên, $x \in X$ và $x \in \{a, c\}$.

Bây giờ, ta chứng minh rằng đẳng thức không xảy ra. Thật vậy, ta có

$$PR[X] = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Ta lấy

$$H = \{a\} \text{ và } V = \{a, b\},$$

khi đó $H \subset V$. Hơn nữa, theo Bổ đề 3.1.1 (1), ta thu được $[H, V]$ là tập đóng trong $PR[X]$, kéo theo

$$\mathrm{cl}[H, V] = [H, V] = \{\{a\}, \{a, b\}\}. \quad (1)$$

Mặt khác, tất cả các tập đóng trong X là

$$\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \{a, c\}.$$

Suy ra chỉ có một tập đóng trong X và chứa V là X, kéo theo $\bar{V} = X$. Do đó,

$$[H, \bar{V}] = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}. \quad (2)$$

Nhờ (1) và (2), ta suy ra $[H, \bar{V}] \not\subset \mathrm{cl}[H, V]$.

3.2. Đánh giá

Các kết quả chính trong bài báo được thể hiện ở các Định lí 3.1.2, Ví dụ 3.1.3, Định lí 3.1.4, Định lí 3.1.5, Định lí 3.1.6, trong đó:

- Định lí 3.1.2 và Ví dụ 3.1.3 nghiên cứu về mối liên hệ giữa tính chất T_0-không gian trên X và trên $PR[X]$.

- Định lí 3.1.4 khẳng định về sự tương đương của tính chất T_1-không gian trên X và trên $PR[X]$. Nhờ đó, chúng ta thu được Hệ quả 3.1.5 rằng, nếu X là T_1-không gian, thì $PR[X]$ là T_3-không gian.

- Định lí 3.1.6 là một tính chất liên quan đến bao đóng của một tập trong $PR[X]$.

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả đã đưa ra và chứng minh chi tiết 4 kết quả mới về mối liên hệ giữa tiên đề tách trong không gian tôpô (X, τ) với siêu không gian Pixley–Roy $PR[X]$ của nó. Các kết quả này phần nào đó làm phong phú cho lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết về mạng, lý thuyết k-mạng trong tôpô đại cương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. J. Lutzer, "Pixley-Roy topology", *Topology Proceedings*, 3, 1978, 139-158.

[2] M. Sakai, "The Fréchet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces", *Topology and its Applications*, 159, 2012, 308-314.

[3] L. Kočinac, "The Pixley-Roy topology and selection principles", *Questions and Answers in General Topology*, 19, 2001, 219-225.

[4] L. Kočinac, L. Q. Tuyen, O. V. Tuyen, "Some results on Pixley-Roy hyperspaces", *Journal of Mathematics*, 2022, Art. ID 5878044, 8 pp.

[5] L. Q. Tuyen, O. V. Tuyen, "The σ-point-finite *cn*-networks (ck-networks) of Pixley-Roy hyperspaces", *Accepted in Matematički Vesnik*, 2022.

[6] Z. Li, "Remarks on *R*-Separability of Pixley–Roy Hyperspaces", *Filomat*,36 (3), 2022, 881–886.