MỘT SỐ TÍNH CHẤT TƯƠNG ĐƯƠNG GIỮA KHÔNG GIAN TOPO X VÀ SIÊU KHÔNG GIAN PIXLEY-ROY $PR[X]$

SOME EQUIVALENT PROPERTIES BETWEEN TOPOLOGICAL SPACE X AND PIXLEY-ROY HYPERSPACE $PR[X]$

Huỳnh Thị Oanh Triều*, Nguyễn Xuân Trúc, Lương Quốc Tuyển

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng[1]

*Tác giả liên hệ: oanhtrieuhuynh@gmail.com

(Nhận bài: 27/6/2022; Chấp nhận đăng: 16/9/2022)

Tóm tắt - Trong những năm gần đây, một trong những hướng được nhiều người quan tâm là nghiên cứu về mối liên hệ giữa các tính chất topo trên không gian topo (X,τ) với các tính chất topo trên siêu không gian Pixley-Roy $PR[X]$ gồm các tập con hữu hạn khác rỗng của X. Trong bài báo này, nhóm tác giả chứng minh rằng: (1) (X,τ) là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất khi và chỉ khi siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất; (2) (X,τ) là không gian topo rời rạc khi và chỉ khi siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian topo rời rạc; (3) Siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian khả ly khi và chỉ khi X là tập đếm được; (4) Siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian Lindelöf khi và chỉ khi X là tập đếm được.

Từ khóa - Khả li; Lindelöf; rời rạc; siêu không gian; Pixley–Roy.

Abstract - In recent years, one of the directions of great interest is the study of the relationship between the topological properties on the topological space (X,τ) with the topological properties on the Pixley-Roy $PR[X]$ hyperspace including: non-empty finite subsets of X. In this paper, we prove that: (1) (X,τ) is a first-countable space if and only if Pixley-Roy hyperspace $\mathrm{PR}[X]$ is a first-countable space; (2) (X,τ) is a discrete topological space if and only if the Pixley-Roy hyperspace Pixley-Roy $\mathrm{PR}[X]$ is a discrete topological space; (3) The Pixley–Roy hyperspace $\mathrm{PR}[X]$ is a separable space if and only if X is a countable set; (4) The Pixley–Roy hyperspace $\mathrm{PR}[X]$ is a Lindelöf space if and only if X is a countable set.

Key words - Separable; Lindelöf; discrete; hyperspace; Pixley–Roy.

1. Giới thiệu

Năm 1931, K. Borsulk và S. Ulam đã giới thiệu khái niệm tích đối xứng cấp n và siêu không gian Vietoris của một không gian topo X, lần lượt được ký hiệu là $\mathcal{F}_n(X)$ và $\mathcal{F}(X)$. Nhờ đó, các tác giả đã đưa ra một số tính chất quan trọng của siêu không gian $\mathcal{F}_n(X)$ và $\mathcal{F}(X)$ (xem [1]). Nghiên cứu về mối quan hệ giữa các tính chất topo trên không gian topo (X,τ) với các tính chất topo trên siêu không gian Vietoris $\mathcal{F}(X)$ tương ứng của nó là một trong những bài toán của topo đại cương.

Tương tự như việc nghiên cứu các tính chất mạng trên siêu không gian Vietoris, lần đầu tiên Ljubisa D. R. Kočinac, L. Q. Tuyen và O. V. Tuyen (xem [2]) đã nghiên cứu mối quan hệ giữa các tính chất mạng trên không gian topo X với các tính chất mạng trên siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ tương ứng của nó và đã thu được những kết quả quan trọng. Cụ thể là nếu siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ có cn-mạng đếm được (tương ứng, sp-mạng và mạng Pytkeev chặt), thì X cũng vậy và nếu siêu không gian Pixley-Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian cosmic (tương ứng, P_0 -không gian, và P_0 -không gian chặt), thì X cũng vậy.

Bên cạnh đó, các tác giả đã đặt ra một số bài toán mở liên quan đến siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ (xem [2])

Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu mối liên hệ của một số tính chất topo giữa không gian topo (X,τ) và siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ của không gian topo (X,τ).

Tất cả các không gian topo trình bày trong bài báo này được quy ước là không gian Hausdorff, còn khái niệm và thuật ngữ khác nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường (xem [3]). Ngoài ra, nhóm tác giả sử dụng thêm ký hiệu: $\bigcup\mathcal{U}=\bigcup\{A: A\in\mathcal{U}\}$.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Giả sử (X,τ) là một không gian topo và kí hiệu $\mathrm{PR}[X]$ là họ gồm tất cả các tập con khác rỗng hữu hạn của X.

Với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta đặt

$$\mathrm{PR}_n[X]=\{A\subset X: 1\le |A|\le n\}.$$

Khi đó, $\mathrm{PR}[X]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{PR}_n[X].$

Giả sử $F, A\subset X$, ta đặt

$$[F,A]=\{H\in\mathrm{PR}[X]: F\subset H\subset A\}.$$

Trên $\mathrm{PR}[X]$ ta xét họ

---

[1] The University of Danang - University of Education (Huynh Thi Oanh Trieu, Nguyen Xuan Truc, Luong Quoc Tuyen)

$$\mathfrak{B} = \{[F,V] : F \in \mathrm{PR}[X], V \in \tau\}.$$

Bổ đề 2.1.1 ([4]). *$\mathfrak{B}$ là cơ sở của một topo nào đó trên siêu không gian Pixley-Roy $\mathrm{PR}[X]$.*

Định nghĩa 2.1.2 ([4]). Topo được xác định trong Bổ đề 2.1.1 được gọi là *topo Pixley–Roy* của $\mathrm{PR}[X]$, và $\mathrm{PR}[X]$ cùng với topo này được gọi là *siêu không gian Pixley–Roy*.

Định nghĩa 2.1.3 ([3], [4]). Cho (X,τ) là một không gian topo. Khi đó,

(1) (X,τ) được gọi là không gian thỏa mãn *tiên đề đếm được thứ nhất* nếu tại mỗi điểm của X, tồn tại cơ sở lân cận đếm được.

(2) (X,τ) được gọi là không gian *thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai* nếu X có cơ sở đếm được.

(3) (X,τ) được gọi là không gian *Lindelöf* nếu mỗi phủ mở của X, tồn tại phủ con đếm được.

(4) (X,τ) được gọi là không gian *compact* nếu mỗi phủ mở của X, tồn tại phủ con hữu hạn.

Nhận xét. Đối với không gian topo (X,τ), các khẳng định sau là đúng.

(1) Mỗi không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

(2) Mỗi không gian compact là không gian Lindelöf.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu lý thuyết được sử dụng trong quá trình thực hiện bài báo. Cụ thể, nhóm tác giả nghiên cứu các bài báo của các tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa, khái quát hóa nhằm đưa ra những kết quả mới cho mình.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Định lí 3.1.1. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, X là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất khi và chỉ khi siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Khi đó, với mọi $x \in X$, tồn tại cơ sở lân cận giảm và đếm được

$$\mathcal{B}_x = \{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Với mọi $F \in \mathrm{PR}[X]$, ta đặt

$$\mathfrak{B}_F = \Big\{[F, \bigcup_{x\in F} B_n(x)] : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Khi đó, $\mathfrak{B}_F$ là họ đếm được trong $\mathrm{PR}_n[X]$. Như vậy, để hoàn thành chứng minh, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $\mathfrak{B}_F$ là cơ sở lân cận của F trong $\mathrm{PR}_n[X]$.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{V}$ là lân cận của F trong $\mathrm{PR}_n[X]$. Khi đó, tồn tại V mở trong X sao cho

$$F \in [F,V] \subset \mathcal{V} \tag{1}$$

Bởi vì $F \subset V$ và V mở trong X nên ta suy ra với mọi $x \in F$, tồn tại $n_x \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x \in B_{n_x}(x) \subset V. \tag{2}$$

Bây giờ, ta đặt

$$n(F) = \sup\{n_x : x \in F\}.$$

Khi đó, vì F hữu hạn nên $n(F) = \max\{n_x : x \in F\}$. Hơn nữa, vì $\mathcal{B}_x$ là giảm với mọi $x \in F$ nên

$$B_{n(F)}(x) \subset B_{n_x}(x) \text{ với mọi } x \in F.$$

Kết hợp (2) ta thu được

$$\bigcup_{x\in F} B_{n(F)}(x) \subset \bigcup_{x\in F} B_{n_x}(x) \subset V. \tag{3}$$

Từ (1) và (3) ta suy ra

$$\Big[F, \bigcup_{x\in F} B_{n(F)}(x)\Big] \subset [F,V] \subset \mathcal{V}.$$

Như vậy $\mathfrak{B}_F$ là cơ sở lân cận tại F trong $\mathrm{PR}[X]$.

Điều kiện đủ. Giả sử $\mathrm{PR}[X]$ là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Ta chứng minh rằng, X cũng là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

Thật vậy, giả sử $x \in X$, và đặt

$$H = \{x\} \in \mathrm{PR}[X].$$

Bởi vì $\mathrm{PR}[X]$ là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nên tại H, tồn tại cơ sở lân cận đếm được. Do đó, tồn tại $\{U_n\} \subset \tau$ sao cho

$$\mathfrak{B}_H = \{[H,U_n] : H \subset U_n \in \tau, n \in \mathbb{N}\}.$$

Ta đặt

$$\mathcal{B}_x = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Để hoàn thành chứng minh ta chỉ cần chứng tỏ rằng $\mathcal{B}_x$ là cơ sở lân cận tại x trong X.

Thật vậy, giả sử U là một lân cận của x. Khi đó, tồn tại $W \in \tau$ sao cho

$$x \in W \subset U.$$

Bởi vì $[H,W]$ mở trong $\mathrm{PR}[X]$ và $\mathfrak{B}_H$ là cơ sở lân cận của H trong $\mathrm{PR}[X]$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$H \in [H,U_n] \subset [H,W].$$

Bây giờ, nếu $U_n \not\subset W$, thì tồn tại $z \in U_n \setminus W$. Rõ ràng rằng

$$[H, H\cup\{z\}] \subset [H,U_n] \subset [H,W]$$

Bởi vì $(H\cup\{z\}) \in [H, H\cup\{z\}]$ nên $(H\cup\{z\}) \in [H,W]$, kéo theo $(H\cup\{z\}) \subset W$, suy ra $z \in W$, đây là một mâu thuẫn. Do đó, $U_n \subset W$.

Như vậy, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$U_n \subset W \subset U,$$

Do đó, $\mathcal{B}_x$ là cơ sở lân cận đếm được tại x trong X.

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, nếu $\mathcal{U}$ là một tập mở trong siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$, thì $\bigcup\mathcal{U}$ là một tập mở trong X.*

Chứng minh.

Giả sử $x \in \bigcup\mathcal{U}$ khi đó tồn tại $F \in \mathcal{U}$ sao cho $x \in F$. Bởi vì $F \in \mathcal{U}$ nên tồn tại tập V mở trong X sao cho

$$F \in [F,V] \subset \mathcal{U}.$$

Mặt khác, vì $F \subset V$ nên $x \in V$. Do đó, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $V \subset \bigcup\mathcal{U}$.

Thật vậy, giả sử $z \in V$, khi đó

$$F \subset \{z\} \cup F \subset V.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$\{z\} \cup F \in [F,V] \subset \mathcal{U}.$$

Suy ra $\quad z \in \{z\} \cup F \subset \bigcup\mathcal{U}.$

Như vậy, $V \subset \bigcup\mathcal{U}$, do đó $\bigcup\mathcal{U}$ là một tập mở trong X.

Định lí 3.1.3. *Giả sử (X,τ) là một không gian topo. Khi đó, X là không gian topo rời rạc khi và chỉ khi siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian topo rời rạc.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử X là không gian topo rời rạc. Ta chứng minh rằng, $\mathrm{PR}[X]$ cũng là không gian topo rời rạc, nghĩa là mọi tập con bất kỳ của $\mathrm{PR}[X]$ đều là tập hợp mở.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{A} \subset \mathrm{PR}[X]$ và $F \in \mathcal{A}$. Khi đó,

$$F \in [F,F] \subset \mathcal{A}.$$

Bởi vì F là một tập mở trong X nên $[F,F]$ là một tập mở trong $\mathrm{PR}[X]$. Như vậy, $\mathcal{A}$ mở trong $\mathrm{PR}[X]$, do đó $\mathrm{PR}[X]$ là không gian topo rời rạc.

Điều kiện đủ. Giả sử $\mathrm{PR}[X]$ là một không gian topo rời rạc. Ta chứng minh rằng X cũng là không gian topo rời rạc.

Thật vậy, giả sử $F \subset X$, khi đó với $x \in F$ ta đặt $K = \{x\}$. Bởi vì $\{K\} \subset \mathrm{PR}[X]$ nên theo giả thiết điều kiện đủ ta suy ra $\{K\}$ mở trong $\mathrm{PR}[X]$. Nhờ Bổ đề 3.1.2 ta suy ra

$$\bigcup\{K\} = K = \{x\}$$

là tập mở trong X. Như vậy, $F = \bigcup_{x \in F}\{x\}$ là tập hợp mở trong X. Do đó, X là không gian topo rời rạc.

Định lí 3.1.4. *Siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian khả ly khi và chỉ khi X là tập đếm được.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử $\mathrm{PR}[X]$ là không gian khả ly nhưng X là tập quá đếm được. Bởi vì $\mathrm{PR}[X]$ là không gian khả ly nên trong $\mathrm{PR}[X]$, tồn tại tập con đếm được trù mật

$$\mathcal{A} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Hơn nữa, vì X là quá đếm được và $\bigcup\mathcal{A}$ đếm được nên tồn tại $x \in X$ sao cho $x \notin \bigcup\mathcal{A}$. Mặt khác, vì $\{x\} \in \mathrm{PR}[X]$ nên $\{x\} \in \mathrm{cl}(\mathcal{A})$. Khi đó, vì $[\{x\},X]$ là lân cận mở của $\{x\}$ nên

$$[\{x\},X] \cap \mathcal{A} \neq \varnothing.$$

Do đó, tồn tại $K \in \mathcal{A}$ sao cho $\{x\} \subset K \subset X$, kéo theo $x \in \bigcup\mathcal{A}$, đây là một mâu thuẫn. Như vậy, X đếm được.

Điều kiện đủ. Giả sử X là tập đếm được. Khi đó, $\mathrm{PR}[X]$ là tập đếm được. Như vậy, $\mathrm{PR}[X]$ là khả ly.

Định lí 3.1.5. *Siêu không gian Pixley–Roy $\mathrm{PR}[X]$ là không gian Lindelöf khi và chỉ khi X là tập đếm được.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử rằng $\mathrm{PR}[X]$ là không gian Lindelöf nhưng X là tập quá đếm được. Ta xét họ

$$\mathfrak{B} = \left\{[F,U] : F \in \mathrm{PR}[X], U \in \tau\right\}.$$

Khi đó, $\mathfrak{B}$ là một phủ mở của $\mathrm{PR}[X]$. Bởi vì $\mathrm{PR}[X]$ là không gian Lindelöf nên tồn tại phủ con đếm được

$$\mathfrak{P} = \left\{[F_n,U_n] : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Mặt khác, bởi vì X là quá đếm được và $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ đếm được nên tồn tại $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Hơn nữa, ta có

$$\{x\} \notin [F_n,U_n] \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\{x\} \in [F_n,U_n].$$

Khi đó,

$$F_n \subset \{x\} \subset U_n,$$

kéo theo

$$F_n = \{x\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Điều này mâu thuẫn với $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Như vậy, $\{x\} \notin \bigcup\mathfrak{P}$, mâu thuẫn với $\mathfrak{P}$ là phủ của $\mathrm{PR}[X]$. Do đó, X là đếm được.

Điều kiện đủ. Giả sử X là tập đếm được. Khi đó, $\mathrm{PR}[X]$ là tập đếm được. Như vậy, $\mathrm{PR}[X]$ là không gain Lindelöf.

3.2. Đánh giá

Các kết quả chính trong bài báo được thể hiện ở các Định lí 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4 và 3.1.5. Trong đó:

- Định lí 3.1.1 khẳng định rằng tính chất thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất là tương đương giữa không gian topo X và siêu không gian Pixley–Roy $\mathtt{PR}[X]$.

- Định lí 3.1.3 khẳng định rằng tính chất rời rạc là tương đương giữa không gian topo X và siêu không gian Pixley–Roy $\mathtt{PR}[X]$.

- Định lí 3.1.4 và 3.1.5 là điều kiện để siêu không gian Pixley–Roy $\mathtt{PR}[X]$ là khả ly, Lindelöf.

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả đã đưa ra và chứng minh chi tiết 4 kết quả mới về mối liên hệ giữa các tính chất topo của không gian topo (X,τ) với siêu không gian Pixley–Roy $\mathtt{PR}[X]$ của không gian topo (X,τ). Nhờ đó, các kết quả của bài báo đã góp phần làm phong phú cho lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết về mạng, lý thuyết *k*-mạng trong topo đại cương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K. Borsuk, S. Ulam, "On symmetric products of topological spaces", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 37, no. 12, pp. 875–882, 1931.

[2] Lj.D. R. Kočinac, L. Q. Tuyen, O. V. Tuyen, "Some results on Pixley-Roy hyperspaces", *Journal of Mathematics*, vol. 22, 2022, pp. 1-8.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] Lj.D. R. Kočinac, "The Pixley-Roy topology and selection principles", *Questions and Answers in General Topology*, vol. 19, no. 2, 2002, pp. 210–225.

[5] A. Bella, M. Sakai, "Compactifications of a pixley-roy hyperspace", *Topology and Its Applications*, vol. 196, 2015, pp. 173–182.