TÍNH CHẤT CO RÚT TUYỆT ĐỐI CỦA CÁC TẬP LỒI COMPACT TRONG CÁC KHÔNG GIAN METRIC TUYẾN TÍNH CÓ CƠ SỞ

THE AR-PROPERTY OF COMPACT CONVEX SETS IN METRIC LINEAR SPACES WITH A BASIS

Lê Hoàng Trí[1], Trần Lê Thương[2]*

[1]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

[2]*Lớp cao học K42, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*

*Tác giả liên hệ: thuong14st@gmail.com

(Nhận bài: 06/10/2022; Chấp nhận đăng: 04/11/2022)

Tóm tắt – Trong [1], giả thuyết Schauder phát biểu rằng mỗi tập lồi, compact trong một không gian metric tuyến tính đều có tính chất điểm bất động(?) Ta biết rằng mỗi không gian metric compact, co rút tuyệt đối đều có tính chất điểm bất động (Định lý Borsuk, xem [2]). Do đó, Giả thuyết Schauder liên quan đến bài toán AR sau: Mỗi tập lồi, compact trong một không gian metric tuyến tính bất kỳ đều là một AR (co rút tuyệt đối), xem [1]. Bài toán AR đã được giải quyết cho trường hợp không gian metric tuyến tính lồi địa phương. Trong bài báo này, nhóm tác giả sẽ chứng minh khẳng định cho Bài toán AR trong trường hợp không gian metric tuyến tính có cơ sở (Schauder), có nghĩa rằng chứng minh mỗi tập lồi, compact trong một không gian metric tuyến tính có cơ sở đều là một co rút tuyệt đối (do đó, cũng có tính chất điểm bất động). Nhóm tác giả cũng cho ví dụ về các không gian metric tuyến tính có cơ sở mà không lồi địa phương.

Từ khóa – Không gian metric tuyến tính; giả thuyết Schauder; cơ sở Schauder; tính chất điểm bất động; không gian co rút tuyệt đối.

Abstract – In [1], The Schauder Conjecture states that every convex, compact set in any linear metric space has the property of fixed points(?) We know that every compact, absolutely retract metric space has the property of fixed points (Borsuk's theorem, see [2]). Therefore, the Schauder Conjecture is related to the following AR Problem: Every convex, compact set in a linear metric space is an AR (absolute retract), see [1]. The AR problem has been solved for the case of a local convex linear metric space. In this paper, we will prove the claim for the AR Problem in the case of a linear metric space having a basis (Schauder), i.e., proving that every compact, convex set in a linear metric space having a basis has an absolute retract (thus, it also has the property of fixed points). We also give some examples of basic linear metric spaces having a basis, but nonlocal convexity.

Key words - Linear metric spaces; Schauder conjecture; Schauder basis; fixed point property; absolute retract spaces.

1. Đặt vấn đề

Cho X là một không gian topo và A là một tập con của X, A được gọi là một co rút của X nếu tồn tại một ánh xạ liên tục $r: X \to A$ sao cho $r(a) = a$, với mỗi $a \in A$.

Ta nhận xét rằng nếu X là không gian topo Hausdorff và A là một co rút của X thì A đóng trong X.

Một không gian topo khả metric Y được gọi là một co rút tuyệt đối nếu thỏa mãn điều kiện nếu Y đồng phôi với một tập con A đóng của một không gian metric X thì A là một co rút của X.

Mỗi không gian topo tuyến tính là một không gian tuyến tính, có topo mà phép cộng trên không gian tuyến tính và phép nhân mỗi phần tử của phần tử trên không gian tuyến tính với vô hướng đều liên tục.

Mỗi không gian metric tuyến tính là một không gian tuyến tính, có metric mà phép cộng trên không gian tuyến tính và phép nhân mỗi phần tử của phần tử trên không gian tuyến tính với vô hướng đều liên tục.

Cho X là một không gian metric tuyến tính với metric ρ ta có thể chọn một metric d trên X tương đương với ρ, hơn nữa d là metric bất biến (có nghĩa là với mỗi $x, y, z \in X, d(x+z, y+z) = d(x, y)$.

Nếu ρ là metric đầy đủ thì d cũng là metric đầy đủ. Khi đó, X được gọi là một không gian metric tuyến tính đầy đủ (xem [3]).

Khi nói một không gian metric tuyến tính thì ta quy ước metric được xét là metric bất biến.

Một không gian topo tuyến tính (hay metric tuyến tính) được gọi là lồi địa phương nếu bất kỳ một lân cận của phần tử không đều chứa một lân cận lồi của phần tử không đó.

Một không gian topo X được gọi là có tính chất điểm bất động nếu bất kỳ một ánh xạ liên tục $f: X \to X$ đều có điểm bất động (có nghĩa là tồn tại một phần tử $x_0 \in X : f(x_0) = x_0$).

Năm 1910, Brouwer chứng minh được mỗi đơn hình đóng trong một không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều bất kỳ đều có tính chất điểm bất động. Sau đó, năm 1930, Schauder mở rộng kết quả này cho các tập lồi, compact trong một không gian tuyến tính định chuẩn bất kỳ (không nhất thiết là hữu hạn chiều). Đến năm 1935, Tychonoff mở rộng kết quả trên cho các tập lồi, compact trong một không gian topo tuyến tính lồi địa phương bất kỳ. (xem [4]).

Schauder đặt ra giả thuyết là kết quả trên cũng đúng cho các không gian không lồi địa phương.

Giả thuyết 1.1 *(Giả thuyết Schauder). Mỗi tập lồi, compact của một không gian metric tuyến tính bất kỳ đều có tính chất điểm bất động? (xem [1]).*

[1] The University of Danang - University of Science and Education (Le Hoang Tri)

[2] Student of Mathematics, The University of Danang – University of Science and Education (Tran Le Thuong)

Có vài tác giả "công bố" đã giải quyết được giả thuyết này nhưng các "lời giải" này cũng đang được tranh cãi.

Tính chất điểm bất động và tính chất co rút tuyệt đối có sự liên quan theo định lý sau.

Định lý 1.2 *(Định lý Borsuk, xem [2])****.*** *Mỗi AR compact đều có tính chất điểm bất động.*

Do đó, giả thuyết Schauder có liên quan với bài toán sau:

Bài toán AR: Mỗi tập lồi, compact của một không gian metric tuyến tính bất kỳ đều là một AR? (xem [1]).

Năm 1951, Dugundji chứng minh được rằng mỗi tập lồi trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương bất kỳ đều là một co rút tuyệt đối (xem [3]). Như vậy, Bài toán trên được giải quyết cho trường hợp không gian metric tuyến tính lồi địa phương, hiện nay người ta chưa giải quyết được bài toán này cho trường hợp tổng quát.

Có một số trường hợp riêng của Giả thuyết Schauder và Bài toán AR được giải quyết trong [5], [6], [7] và [8].

Cho X là một không gian metric tuyến tính đầy đủ, hệ vector $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ được gọi là một cơ sở (Schauder) của X nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ mà $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Một không gian metric tuyến tính được gọi là có cơ sở nếu không gian metric tuyến tính đó đầy đủ và có một cơ sở. Bên cạnh đó, cũng có các không gian metric tuyến tính không có cơ sở (xem [9]).

Trong bài báo này, nhóm tác giả sẽ chứng minh rằng mỗi tập lồi, compact trong một không gian metric tuyến tính có cơ sở đều là co rút tuyệt đối. Như vậy, chúng có tính chất điểm bất động theo Định lý Borsuk.

Nhóm tác giả cũng cho các ví dụ về các không gian metric tuyến tính có cơ sở không lồi địa phương, cũng như các không gian metric tuyến tính có cơ sở khác các không gian $l_p (0 < p < 1)$. Do đó, bài báo này là thực sự mở rộng của [7] trong trường hợp compact.

2. Các kết quả

Trước khi chứng minh kết quả chính, chúng ta nêu một không gian metric tuyến tính cần thiết.

Cho $E = \{u = (u_1, u_2, ...u_n, ...) / u_n \in R, \forall n \in N^*\}$. Với mỗi $u = (u_1, u_2, ...u_n, ...), v = (v_1, v_2, ...v_n, ...) \in E$,

$$\rho(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1 + |u_n - v_n|}.$$

Khi đó, E là một không gian metric tuyến tính với metric bất biến ρ. Bây giờ ta kiểm tra E là không gian metric tuyến tính lồi địa phương.

Với mỗi $r > 0$, do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên ta tìm được một số nguyên $n_0 \in N^*$: $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{r}{4}$.

Nếu V là tập con của E được cho bởi:

$$\left\{ v = (v_1, v_2, ..., v_n, ...) / |v_k| < \frac{r}{4}, \forall k \in \{1, 2, ..., n_0\} \right\},$$

thì V là một tập lồi. Khi đó, với mỗi $v = (v_1, v_2, ..., v_n, ...) \in V$,

$$\rho(0, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|v_n|}{1 + |v_n|} \le \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{|v_n|}{1 + |v_n|} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|v_n|}{1 + |v_n|}$$
$$\le \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{r}{4} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \le \frac{r}{4} + \frac{r}{4} < r.$$

Do đó, $V \subset B(0, r)$ (quả cầu tâm gốc tọa độ, bán kính r trong E). Vì vậy, E là một không gian metric tuyến tính lồi địa phương.

Kết quả chính là định lý

Định lý 2.1. *Mỗi tập lồi, compact trong một không gian metric tuyến tính có cơ sở đều là co rút tuyệt đối.*

Chứng minh.

Cho (X, d) là một không gian metric tuyến tính với cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$. Ở đây, d là một metric bất biến. Với mỗi $n \in N^*$, với mỗi $x \in X$, tồn tại duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ mà $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Nếu $f_n(x) = \alpha_n$ thì $f_n : X \to R$ là hàm tuyến tính liên tục (xem [7], trang 69, 70).

Cho $F : X \to E$ được xác định bởi

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...), \forall x \in X.$$

Khi đó, F là một ánh xạ tuyến tính giữa các không gian metric tuyến tính. Để chứng minh F liên tục ta chỉ cần chứng minh nó liên tục tại phần tử *0*.

Với mỗi $\varepsilon > 0$, do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên ta tìm được một số nguyên $n_0 \in N^*$: $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$, do các hàm $f_1 : X \to R$, $f_2 : X \to R$,..., $f_{n_0} : X \to R$ liên tục nên tồn tại một $\delta > 0$ sao cho khi $d(0, x) < \delta$ thì

$$|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, |f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, ..., |f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Do đó, nếu $d(0, x) < \delta$ thì

$$\rho(F(0), F(x)) = \rho(0, F(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|}$$
$$\le \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|}$$
$$\le \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Vì vậy, $F : X \to E$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục tại 0 nên cũng là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

Bây giờ cho K là một tập lồi, compact bất kỳ trong X.

Khi đó, $F(K)$ là một tập lồi, compact trong không gian metric tuyến tính lồi địa phương E. Do K là tập compact nên $F(K)$ đồng phôi với K Do $F(K)$ là một tập lồi trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương nên nó là một co rút tuyệt đối. Vì thế, K đồng phôi với nó cũng là một co rút tuyệt đối (xem [3] hoặc [2]).

Một vài ví dụ về các không gian metric tuyến tính không lồi địa phương.

Các không gian metric tuyến tính không lồi địa phương đơn giản nhất là các không gian $l_p (0 < p < 1)$ như sau:

$\forall p \in (0,1)$, l_p là tập hợp tất cả các dãy số thực $x = (x_n)$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ (chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ là chuỗi hội tụ). Ta có

$$\forall x = (x_n), (y_n) \in l_p, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < +\infty,$$

$$\forall \alpha \in R, x = (x_n) \in l_p, \alpha x = (\alpha x_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_n|^p < +\infty.$$

Do đó, l_p là một không gian vector. Ta đặt:

$$\forall x = (x_n), (y_n) \in l_p, d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$$

thì d là một metric bất biến trên l_p, ta có nhận xét sau:

Định lí 2.2. *Không gian $l_p (0 < p < 1)$ là một không gian metric tuyến tính không lồi địa phương có cơ sở.*

Chứng minh.

Đầu tiên ta chứng minh l_p là không gian metric tuyến tính không lồi địa phương.

Giả sử l_p lồi địa phương. Khi đó, ta tìm được một lân cận lồi V của 0 mà $V \subset B(0,1)$, ta chọn $\varepsilon > 0$: $B(0, \varepsilon) \subset V$,

$$\forall n \in N^*, u_1 = ((\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}, 0, 0, ..., 0, 0, 0, ...),$$

$$u_2 = (0, (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}, 0, ..., 0, 0, 0, ...), ...,$$

$$u_n = (0.0, 0...., (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}, 0, 0, ...) \in B(0, \varepsilon) \subset V$$

Do V là tập lồi nên

$$u = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + ... + u_n) \in V$$

$$\Rightarrow u = (\frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}, ..., \frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}, 0, ...) \in V$$

$$\Rightarrow d(0, u) = \frac{n}{n^p}\frac{\varepsilon}{2} = n^{1-p}\frac{\varepsilon}{2}$$

Do $u \in V \subset B(0,1)$ nên $n^{1-p}\frac{\varepsilon}{2} < 1$ điều này vô lý khi chọn n đủ lớn; Như vậy không gian l_p không lồi địa phương.

Bây giờ ta chứng minh l_p có cơ sở:

Ta đặt

$$e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), e_3 = (0, 0, 1, ...), ... \in l_p.$$

Khi đó, $\forall x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...) \in l_p$, ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, có các tổng riêng là $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, $\forall n \in N^*, d(x, S_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^p$, do $x \in l_p \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p$ là chuỗi hội tụ, do đó $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^p = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} d(x, S_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = x \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Bây giờ giả sử $x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$, ta sẽ chỉ ra $\alpha_n = \beta_n, \forall n \in N^*$. Thật vậy, giả sử ngược lại thì $\exists m \in N^* : \alpha_m \ne \beta_m$, ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$, có các tổng riêng là $T_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$, do $x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ nên $\lim_{n\to\infty} T_n = x$ ta cũng có:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x, T_n) = 0, \lim_{n\to\infty} d(x, S_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T_n, S_n) = 0.$$

Mà với mỗi $n \ge m$,

$$d(T_n, S_n) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k|^p \ge |\alpha_m - \beta_m|^p.$$

Điều này mâu thuẫn với $\lim_{n\to\infty} d(T_n, S_n) = 0$.

Nên $\alpha_n = \beta_n, \forall n \in N^*$.

Từ đó, hệ vector $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n, ...\}$ là một cơ sở của l_p và l_p là không gian metric tuyến tính không lồi địa phương có cơ sở. □

Như vậy theo Định lý 2.1, mỗi tập lồi, compact trong không gian $l_p (0 < p < 1)$ đều là một co rút tuyệt đối (xem [7]).

Một ví dụ về một không gian metric tuyến tính không lồi địa phương có cơ sở mà không là l_p.

Cho dãy số thực $\{p_n\}$ mà $p_n \in (0,1), \forall n \in N^*$,

Cho X là tập hợp tất cả các dãy số thực $x = (x_n)$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} < +\infty$ (chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n}$ là chuỗi hội tụ).

$\forall x = (x_n), (y_n) \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{p_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p_n} < +\infty,$$

$\forall \alpha \in R, x = (x_n) \in l_p, \alpha x = (\alpha x_n),$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^{p_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{p_n} |x_n|^{p_n} < \max\{1, |\alpha|\} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} < +\infty$$

Do đó X là một không gian vector, ta đặt

$$\forall x=(x_n),(y_n)\in X, d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^{p_n}$$

thì d là một metric bất biến trên X ta có nhận xét sau

Định lí 2.3. *Không gian X là một không gian metric tuyến tính có cơ sở và nó lồi địa phương khi* $\sup\{p_n / n\in N^*\}<1.$

Chứng minh.

Đầu tiên ta chứng minh X là không gian metric tuyến tính không lồi địa phương khi $\sup\{p_n / n\in N^*\}<1.$

Ta đặt $p=\sup\{p_n / n\in N^*\}<1$. Giả sử X lồi địa phương; Khi đó, ta tìm được một lân cận lồi V của *0* mà $V\subset B(0,1)$, ta chọn $\varepsilon>0: B(0,\varepsilon)\subset V,$

$$\forall n\in N^*, u_1=((\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p_1}},0,0,...,0,0,0,...),$$

$$u_2=(0,(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p_2}},0,...,0,0,0,...),...,$$

$$u_n=(0.0,0....,(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p_n}},0,0,...)\in B(0,\varepsilon)\subset V$$

Do V là tập lồi nên $u=\frac{1}{n}(u_1+u_2+...+u_n)\in V$

$$\Rightarrow u=(\frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p_1}},\frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p_2}},...,\frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p_n}},0,...)\in V$$

$$\Rightarrow d(0,u)=(\frac{1}{n^{p_1}}+\frac{1}{n^{p_2}}+...+\frac{1}{n^{p_n}})\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq(\frac{1}{n^{p}}+\frac{1}{n^{p}}+...+\frac{1}{n^{p}})\frac{\varepsilon}{2}=n^{1-p}\frac{\varepsilon}{2}$$

Do $u\in V\subset B(0,1)$ nên $n^{1-p}\frac{\varepsilon}{2}<1$ điều này vô lý khi chọn n đủ lớn; Như vậy không gian X không lồi địa phương trong trường hợp $\sup\{p_n / n\in N^*\}<1.$

Bây giờ ta chứng minh X có cơ sở:

Ta đặt

$$e_1=(1,0,0,...), e_2=(0,1,0,...), e_3=(0,0,1,...),...\in X,$$

khi đó $\forall x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n,...)\in l_p$, ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$, có các tổng riêng là $S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$, $\forall n\in N^*, d(x,S_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\alpha|_k^{p_k}$, do $x\in X\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^{p_n}$ là chuỗi hội tụ, do đó $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\alpha_k|^{p_k}=0$

$$\lim_{n\to\infty}d(x,S_n)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=x\Rightarrow x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n.$$

Bây giờ giả sử $x=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n$, ta sẽ chỉ ra $\alpha_n=\beta_n,\forall n\in N^*$; Thật vậy, giả sử ngược lại thì $\exists m\in N^*:\alpha_m\neq\beta_m$, ta xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n$, có các tổng riêng là $T_n=\sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k$, do $x=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n$ nên $\lim_{n\to\infty}T_n=x$ ta cũng có $\lim_{n\to\infty}S_n=x$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d(x,T_n)=0,\lim_{n\to\infty}d(x,S_n)=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d(T_n,S_n)=0.$$

Mà với mỗi $n\geq m$,

$$d(T_n,S_n)=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k-\beta_k|^{p_k}\geq|\alpha_m-\beta_m|^{p_m}$$

Điều này mâu thuẫn với $\lim_{n\to\infty}d(T_n,S_n)=0.$

Nên $\alpha_n=\beta_n,\forall n\in N^*.$

Từ đó hệ vector $\{e_1,e_2,e_3,...,e_n,...\}$ là một cơ sở của l_p và l_p là không gian metric tuyến tính không lồi địa phương có cơ sở. □

Theo Định lý 2.1, mỗi tập lồi trong không gian X đều là một co rút tuyệt đối.

3. Kết luận

Như vậy ta đã chứng minh được:

(1) Mỗi tập lồi, compact trong một không gian metric tuyến tính có cơ sở là một co rút tuyệt đối, do đó có tính chất điểm bất động.

(2) Chứng minh $l_p(0<p<1)$ có cơ sở.

(3) Tìm được một số không gian metric tuyến tính không lồi địa phương có cơ sở ma không là các không gian l_p.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu được tài trợ bởi Tập đoàn Vingroup – Công ty CP và hỗ trợ bởi Chương trình học bổng thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn, mã số VINIF.2021.ThS.17.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ross Geoghegan, “Open problems in infinite dimensional topology”, *Topology Proc*. 4, 1979, 287-333.

[2] Andrzej Granas and James Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, 2003.

[3] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski, *Selected Topics in Infinite-dimensional Topology*, Warszawa, 1975.

[4] Sehie Park, *Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem*, Springer, 1999.

[5] Nguyen To Nhu and Le hoang Tri, “Every needle point space contains a compact convex AR – Set with no Extreme points”, *Proc. Amer. Math. Soc. Volume 120*, number 4, 1994, 1261-1265.

[6] Nguyen To Nhu and Le Hoang Tri, “No Roberts space is a counter – example to Schauder’s conjecture”, *Topology*, 33, 1994, 371-378.

[7] Le Hoang Tri, “The AR- property of bounder convex sets in the space $l_p(0<p<1)$ ”, *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, 13, 2006, 59-64.

[8] Le Hoang Tri, “The fixed point theory property for compact maps normal simplex in the space $l_p(0<p<1)$ ”, *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, 1(24), 2008, 93-96.

[9] Stefan Rolewicz, *Metric Linear Space*, Warszawa, 1985.