CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA $PC2$ – MÔĐUN

SOME CHARACTERIZATIONS OF $PC2$ – MODULES

Trương Thị Thúy Vân[1,2]*

[1]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

[2]Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long, Việt Nam

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: vanttt@vlute.edu.vn

(Nhận bài / Received: 20/12/2022; Sửa bài / Revised: 18/3/2023; Chấp nhận đăng / Accepted: 20/3/2023)

Tóm tắt - Xét môđun M thỏa mãn điều kiện: "Nếu với mọi A, B là các môđun con của M sao cho $A \cong B$, A là hạng tử trực tiếp của M $A \neq M$ thì B cũng là một hạng tử trực tiếp của M" và gọi điều kiện này là $PC2$. Trong bài báo này, tác giả đưa ra một số đặc trưng của môđun thỏa mãn điều kiện $PC2$, còn gọi là $PC2$ -môđun. Môđun M là $PC2$ -môđun khi và chỉ khi với mỗi R -đơn cấu $\alpha : P \to M$, trong đó P là một hạng tử trực tiếp của M $P \neq M$ và $P \neq M$ $\pi \neq 1_M$ thỏa mãn $\pi(M) = P$ thì tồn tại $\beta \in End(M)$ sao cho $\pi \circ \beta \circ \alpha = 1_P$. Tác giả cũng đã chỉ ra rằng mỗi môđun thỏa mãn điều kiện $C2$ thì thỏa mãn điều kiện $PC2$ và mỗi môđun thỏa mãn điều kiện $PC2$ cũng thỏa mãn điều kiện $C3$. Đồng thời, bài báo cũng đề cập đến một số đặc trưng của vành $PC2$ Vành R là vành $PC2$ phải khi và chỉ khi mọi đẳng cấu $aR \to eR$, $a \in R$, $e^2 = e \in R$, $e \neq 1$ đều mở rộng đến R

Từ khóa - $PC2$ -môđun; $C2$ -môđun; $C3$ – môđun

Abstract - Considering module M to satisfy the condition: "Whenever A and B are submodules of M with $A \cong B$, and A is a direct summand of M $A \neq M$ then B is a direct summand of M" and the author call this condition is $PC2$. In this paper, we give some characterizations of the module to satisfy the condition $PC2$ also known as the $PC2$ -module. Module M is a $PC2$ -module if and only if an R -monic $\alpha : P \to M$ where P is a direct summand of M $P \neq M$ and $P \neq M$ $\pi \neq 1_M$ satisfies $\pi(M) = P$, exists $\beta \in End(M)$ with $\pi \circ \beta \circ \alpha = 1_P$ The author also show that each module satisfying condition $C2$ satisfies condition $PC2$ and every module satisfying condition $PC2$ also satisfies condition $C3$. At the same time, the article also mentions some characterizations of $PC2$ ring. R is a right $PC2$ ring if and only if every R -isomorphism $aR \to eR$, $a \in R$, $e^2 = e \in R$, $e \neq 1$, extends to R

Key words - $PC2$ -module; $C2$ -module; $C3$ – module

1. Giới thiệu vấn đề

Khái niệm môđun nội xạ được Baer giới thiệu đầu tiên vào năm 1940. Những năm sau đó, khái niệm này và các khái niệm mở rộng của nó đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Nhiều tác giả đã nghiên cứu cấu trúc vành và các lớp môđun liên quan thông qua các điều kiện $C1, C2, C3$ ([1], [2], [3], [4]). Theo đó, điều kiện $C1, C2, C3$ như sau:

$C1$: Mọi môđun con của M đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của M.

$C2$: Nếu A và B là các môđun con của M, $A \cong B$ và A là hạng tử trực tiếp của M thì B cũng là hạng tử trực tiếp của M.

$C3$: Nếu A và B là các hạng tử trực tiếp của M và $A \cap B = 0$ thì $A \oplus B$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là *$C2$ – môđun* nếu thỏa mãn điều kiện $C2$. Môđun M được gọi là *$C3$ – môđun* nếu thỏa mãn điều kiện $C3$. Trong các tác giả nghiên cứu thành công nhất về môđun thỏa mãn điều kiện $C1, C2, C3$ phải kể đến Utumi, Yousif, Oshiro,... Họ đã đưa ra nhiều đặc trưng của các lớp vành cổ điển thông qua các điều kiện $C1, C2, C3$. Tác giả Utumi đã chứng minh vành tự nội xạ thỏa mãn cả 3 điều kiện $C1, C2, C3$ ([4]). Mọi môđun thỏa điều kiện $C2$ thì cũng thỏa điều kiện $C3$ ([2]). Các kết quả của họ đã đóng góp cho sự phát triển của lý thuyết vành và môđun. Trong bài báo này, tác giả xét thêm giả thiết $A \neq M$ trong điều kiện $C2$ và gọi là điều kiện $PC2$: nếu với mọi A, B là các môđun con của M sao cho $A \cong B$, A là hạng tử trực tiếp của M, $A \neq M$ thì B cũng là hạng tử trực tiếp của M. Môđun M được gọi là *$PC2$ – môđun* nếu M thỏa mãn điều kiện $PC2$. Vành R được gọi là *vành $PC2$* phải nếu R_R là $PC2$ – môđun. Mục đích nghiên cứu trong bài báo là nghiên cứu mối liên hệ giữa môđun thỏa mãn điều kiện $PC2$ với môđun thỏa mãn điều kiện $C2$, $C3$; Làm rõ đặc trưng của môđun $PC2$ và vành $PC2$. Tác giả đã chứng minh được mọi môđun thỏa mãn điều kiện $PC2$ thì cũng thỏa mãn điều kiện $C3$, mỗi $C2$ – môđun là $PC2$ – môđun và hạng tử trực tiếp của $PC2$ – môđun cũng là $PC2$ – môđun; Đồng thời đưa ra các điều kiện tương đương của $PC2$ – môđun. Các điều kiện tương đương của vành $PC2$ được trình bày trong Mệnh đề 9. Hơn nữa, nếu R là vành $PC2$ phải thì eRe cũng là vành $PC2$ phải với $e \in R$, $e \neq 1$ là phần tử lũy đẳng thỏa mãn điều kiện $ReR = R$. Việc nghiên cứu điều kiện $PC2$ có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết vành và môđun. Điều này tạo nên động lực thúc đẩy các nhà nghiên cứu quan tâm đến sự mở rộng của lớp môđun này.

[1] The University of Danang – University of Science and Education, Vietnam (Truong Thi Thuy Van)

[2] Vinh Long University of Technology Education, Vietnam (Truong Thi Thuy Van)

Bài báo này, tác giả luôn giả thiết vành R là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi $R-$ môđun được xét là môđun unita. Ta ký hiệu M_R để chỉ M là $R-$ môđun phải. Khi không sợ nhầm lẫn gì về phía của môđun, viết M thay cho M_R. Ký hiệu $N \leq M$ (tương ứng $N \leq^{\oplus} M$) để chỉ N là môđun con của M (tương ứng N là hạng tử trực tiếp của M). Các khái niệm và ký hiệu được dùng trong bài báo tham khảo từ các tài liệu ([2], [5], [6], [7]).

2. Kết quả

Trước hết, định nghĩa môđun và vành $PC2$ như sau:

Định nghĩa 1. Cho M là một $R-$ môđun. Ta xét điều kiện sau:

$PC2$: Nếu A và B là các môđun con của M, $A \cong B$ và A là hạng tử trực tiếp của M, $A \neq M$ thì B cũng là hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là $PC2-$*môđun* nếu M thỏa mãn điều kiện $PC2$. Một vành R được gọi là *vành* $PC2$ phải nếu R_R là $PC2-$ môđun.

Ví dụ 2. (1) Mỗi môđun không phân tích được là $PC2-$ môđun.

Thật vậy, giả sử $A \cong B \leq^{\oplus} M$, $B \neq M$. Vì M không phân tích được nên $B=0$. Do đó $0 = A \leq^{\oplus} M$.

Đặc biệt, $\mathbb{Z}-$ môđun $\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện $PC2$ nhưng không thỏa mãn điều kiện $C2$.

(2) Vành địa phương R có 2 lũy đẳng là 0 và 1 nên R_R là môđun không phân tích được. Vậy R là vành $PC2$.

Tiếp theo, tác giả đưa ra mối liên hệ giữa điều kiện $PC2$ và $C3$ như sau:

Mệnh đề 3. Nếu môđun M thỏa mãn điều kiện $PC2$ thì M thỏa mãn điều kiện $C3$.

Chứng minh. Giả sử $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B = 0$. Ta cần chứng minh $A \oplus B \leq^{\oplus} M$.

Nếu $A=0$ hoặc $B=0$ thì $A \oplus B \leq^{\oplus} M$.

Nếu $A \neq 0$ và $B \neq 0$ thì $A \neq M$ và $B \neq M$.

Vì $A \leq^{\oplus} M$ nên $M = A \oplus A'$ với $A' \leq M$. Xét phép chiếu $\pi : M \to A'$ với $\ker \pi = A$. Với mọi $b \in B \leq M$, $b = a + a'$, trong đó $a \in A$, $a' \in A'$, ta có:

$$\pi(b) = \pi(a+a') = a' \in A'$$

nên $\pi(B) \subseteq A'$.

Rõ ràng, đồng cấu $\pi|_B : B \to \pi(B)$ là đẳng cấu. Do đó, để chứng minh $A \oplus B \leq^{\oplus} M$ ta sẽ chứng minh $A \oplus \pi(B) \leq^{\oplus} M$. Vì M thỏa mãn điều kiện $PC2$ và $B \leq^{\oplus} M$, $B \neq M$, $B \cong \pi(B)$ nên $\pi(B) \leq^{\oplus} M$. Mà $\pi(B) \subseteq A'$ nên $A' = \pi(B) \oplus C$ với $C \leq A'$. Suy ra, $M = A \oplus \pi(B) \oplus C$. Vậy M thỏa mãn điều kiện $C3$.

Hệ quả 4. Nếu $M \oplus M$ là $PC2-$ môđun thì M là $C2-$ môđun.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3, $M \oplus M$ là $C3-$ môđun; Nếu $M \oplus M$ là $C3-$ môđun thì M là $C2-$ môđun (theo [5]). Vậy M là $C2-$ môđun khi $M \oplus M$ là $PC2-$ môđun.

Nhận xét 5. Từ định nghĩa môđun $PC2$, mỗi môđun $C2$ là môđun $PC2$ nên ta được mối liên hệ giữa $C2-$ môđun, $C3-$ môđun và $PC2-$ môđun như sau:

$$C2-\text{môđun} \Rightarrow PC2-\text{môđun} \Rightarrow C3-\text{môđun}.$$

Mệnh đề 6. Hạng tử trực tiếp của một $PC2-$ môđun cũng là một $PC2-$ môđun.

Chứng minh. Giả sử M là $PC2-$ môđun và L là hạng tử trực tiếp của M. Ta cần chứng minh L là $PC2-$ môđun. Gọi A là hạng tử trực tiếp của L sao cho $A \neq L$ và $A \cong B$ với $B \leq L$, ta cần chứng minh $B \leq^{\oplus} L$.

Vì $A \leq^{\oplus} L$ nên $L = A \oplus X$ với $X \leq L$, $X \neq 0$. Mà $L \leq^{\oplus} M$ nên $M = L \oplus Y$ với $Y \leq M$. Từ đó suy ra $M = A \oplus X \oplus Y$ nên $A \leq^{\oplus} M$ và $A \neq M$ (do $A \neq L$). Vì M là $PC2-$ môđun và $A \cong B$ nên $B \leq^{\oplus} M$. Do đó $M = B \oplus Z$. Theo luật modular ta có:

$$L = M \cap L = (B \oplus Z) \cap L = B \oplus (Z \cap L).$$

Do đó $B \leq^{\oplus} L$. Vậy L là $PC2-$ môđun.

Định lý sau đây cho ta các điều kiện cần và đủ để một môđun là $PC2-$ môđun.

Định lý 7. Cho môđun M_R và $E = End(M_R)$. Khi đó, các điều kiện sau tương đương:

(1) M_R là $PC2-$ môđun;

(2) Với $N \leq M$, P là hạng tử trực tiếp của M và $P \neq M$, nếu $\sigma : N \to P$ là $R-$ đẳng cấu thì σ mở rộng tới $\beta \in E$;

(3) Nếu $\alpha : P \to M$ là $R-$ đơn cấu với P là một hạng tử trực tiếp của M và $P \neq M$ thì tồn tại $\beta \in E$ sao cho $\beta \circ \alpha = i$, trong đó $i : P \to M$ là đồng cấu nhúng;

(4) Nếu $\alpha : P \to M$ là $R-$ đơn cấu với P là một hạng tử trực tiếp của M, $P \neq M$ và $\pi^2 = \pi \in E$, $\pi \neq 1_M$ thỏa mãn $\pi(M) = P$ thì tồn tại $\beta \in E$ sao cho $\pi \circ \beta \circ \alpha = 1_P$.

Chứng minh.

$(1) \Rightarrow (2)$ Cho $N \leq M$, P là hạng tử trực tiếp của M, $P \neq M$ và $\sigma : N \to P$ là $R-$ đẳng cấu, M_R là $PC2-$ môđun nên $N \leq^{\oplus} M$. Do đó, tồn tại $N' \leq M$ thỏa $M = N \oplus N'$. Xét đồng cấu $\sigma' : M \to M$ xác định bởi $\sigma'(n+n') = \sigma(n)$ với mọi $n \in N, n' \in N'$, ta có $\sigma'|_N = \sigma$. Vậy σ' là mở rộng của σ.

$(2) \Rightarrow (3)$ Giả sử $\alpha : P \to M$ là $R-$ đơn cấu với P là một hạng tử trực tiếp của M, $P \neq M$. Khi đó,

$\sigma:\alpha(P)\to P$ với $\sigma(\alpha(p))=p$, $p\in P$ là $R-$ đẳng cấu. Theo (2), σ mở rộng đến $\beta\in E$. Khi đó, với mọi $p\in P$, ta có:

$$\beta\circ\alpha(p)=\beta(\alpha(p))=\sigma(\alpha(p))=p=i(p)$$

nên $\beta\circ\alpha=i$.

$(3)\Rightarrow(4)$ Giả sử $\alpha:P\to M$ là $R-$ đơn cấu với P là một hạng tử trực tiếp của M, $P\neq M$. Khi đó, tồn tại $\beta\in E$ sao cho $\beta\circ\alpha=i$, trong đó $i:P\to M$ là đồng cấu nhúng. Suy ra với mọi $p\in P$, ta có:

$$\pi\circ\beta\circ\alpha(p)=\pi\circ i(p)=p.$$

Vì vậy $\pi\circ\beta\circ\alpha=1_P$.

$(4)\Rightarrow(1)$ Giả sử $N\le M$, $N\cong P$ với $P\le^{\oplus}M$, $P\neq M$, gọi $\alpha:P\to N$ là $R-$ đẳng cấu. Ta chứng minh $N\le^{\oplus}M$. Vì $P\le^{\oplus}M$ nên tồn tại $\pi^2=\pi\in E$ sao cho $\pi(M)=P$. Bởi (4), tồn tại $\beta\in E$ sao cho $\pi\circ\beta\circ\alpha=1_P$.

Đặt $\theta=\alpha\circ\pi\circ\beta\in E$. Với mọi $m\in M$, ta có

$$\theta^2(m)=(\alpha\circ\pi\circ\beta\circ\alpha\circ\pi\circ\beta)(m)=(\alpha\circ 1_P\circ\pi\circ\beta)(m)$$
$$=(\alpha\circ\pi\circ\beta)(m)=\theta(m),$$

Suy ra, $\theta^2=\theta$. Từ đó suy ra

$$\theta(M)=\alpha\circ\pi\circ\beta(M)\subseteq\alpha\circ\pi(M)=\alpha(P)\subseteq N.$$

Do đó, $\theta(M)\subseteq N$.

Lại có $\theta\circ\alpha=\alpha\circ\pi\circ\beta\circ\alpha=\alpha\circ 1_P=\alpha$ và

$$N=\alpha(P)=\theta(\alpha(P))\subseteq\theta(M).$$

Vậy $\theta(M)=N$. Ta có $\theta\in E$ và $\theta^2=\theta$ nên $M=\operatorname{Im}\theta\oplus\ker\theta=N\oplus\ker\theta$, suy ra $N\le^{\oplus}M$. Vậy M_R là $PC2-$ môđun.

Sau đây là đặc trưng của vành $PC2$.

Hệ quả 8. Cho R là một vành. Khi đó, các điều kiện sau tương đương:

(1) R là vành $PC2$ phải;

(2) Mỗi $R-$ đẳng cấu $\sigma:N\to P$ đều mở rộng đến tự đồng cấu β của R_R trong đó N là iđêan phải của R, P là hạng tử trực tiếp thật sự của R;

(3) Với mỗi $R-$ đơn cấu $\alpha:P\to R$, luôn tồn tại tự đồng cấu β của R_R sao cho $\beta\circ\alpha=i$, trong đó P là hạng tử trực tiếp thật sự của R, $i:P\to R$ là đồng cấu nhúng;

(4) Với mỗi $R-$ đơn cấu $\alpha:P\to R$, $\pi^2=\pi$ là tự đồng cấu của R_R, $\pi\neq 1_R$ thỏa mãn điều kiện $\pi(R)=P$, trong đó P là một hạng tử trực tiếp thật sự của R, luôn tồn tại tự đồng cấu β của R_R sao cho $\pi\circ\beta\circ\alpha=1_P$.

Mệnh đề 9. Cho R là một vành. Khi đó, các điều kiện sau tương đương với nhau:

(1) R là một vành $PC2$ phải;

(2) Mọi đẳng cấu $aR\to eR$, $a\in R$, $e^2=e\in R$, $e\neq 1$ đều mở rộng tới R;

(3) Nếu $r(a)=r(e)$, $a\in R$, $e^2=e\in R$, $e\neq 1$ thì $e\in Ra$;

(4) Nếu $r(a)=r(e)$, $a\in R$, $e^2=e\in R$, $e\neq 1$ thì $Re=Ra$;

(5) Nếu $Ra\subseteq Re\subseteq lr(a)$, $a\in R$, $e^2=e\in R$, $e\neq 1$ thì $Re=Ra$;

(6) Nếu aR là xạ ảnh, $a\in R$ và $r(a)\neq 0$ thì aR là một hạng tử trực tiếp của R_R.

Chứng minh.

$(1)\Rightarrow(2)$ Gọi $\phi:aR\to eR$ là đẳng cấu. Ta có $eR\le^{\oplus}R$, $e\neq 1$ nên $eR\neq R$. Hơn nữa, R là một vành $PC2$ phải nên $aR\le^{\oplus}R$. Đặt $f=\phi\circ p$ với $p:R\to aR$ là phép chiếu chính tắc. Khi đó, $f\circ i=\phi\circ p\circ i=\phi$ và vì vậy f là mở rộng của ϕ.

$(2)\Rightarrow(3)$ Với $r(a)=r(e)$, $a\in R$, $e^2=e\in R$ và $e\neq 1$, ta chứng minh $e\in Ra$. Xét $\phi:aR\to eR$ với $\phi(ar)=er$. Ta kiểm tra được ϕ là đồng cấu.

Với mọi $ar_1,ar_2\in aR$ thỏa mãn $\phi(ar_1)=\phi(ar_2)$. Khi đó, $er_1=er_2$ nên $e(r_1-r_2)=0$, suy ra $r_1-r_2\in r(e)=r(a)$. Do đó $a(r_1-r_2)=0$ hay $ar_1=ar_2$. Vậy ϕ là đơn cấu. Với mọi $y\in eR$, $y=er_1$, $r_1\in R$, ta có $ar_1\in aR$ và $\phi(ar_1)=er_1=y$ nên ϕ là toàn cấu. Do đó ϕ là đẳng cấu.

Theo (2) thì tồn tại $\overline{\phi}:R\to R$ sao cho $\overline{\phi}\big|_{aR}=\phi$. Ta có $e=\phi(a)=\overline{\phi}(a)=\overline{\phi}(1)\cdot a\in Ra.$

$(3)\Rightarrow(4)$ Với $r(a)=r(e)$, $a\in R$, $e^2=e\in R$ và $e\neq 1$, ta được $e\in Ra$ nên $Re\subseteq Ra$. Lại có $r(e)\subseteq r(a)$ nên $a\in lr(e)=l((1-e)R)=Re$. Do đó $Ra\subseteq Re$. Vậy $Ra=Re$.

$(4)\Rightarrow(5)$ Với $Ra\subseteq Re\subseteq lr(a)$, $e^2=e\in R$ và $e\neq 1$. Ta chứng minh $Re=Ra$. Từ $Ra\subseteq Re$ ta được $r(a)\supseteq r(e)$. Mà $Re\subseteq lr(a)$ nên $r(e)\supseteq rlr(a)=r(a)$. Do đó $r(a)=r(e)$. Theo (4), ta được $Re=Ra$.

$(5)\Rightarrow(6)$ Nếu aR là xạ ảnh, $a\in R$ và $r(a)\neq 0$ thì toàn cấu $\xi:R\to aR$ với $\xi(r)=ar$ chẻ ra. Suy ra $\ker\xi\le^{\oplus}R$. Mà

$$\ker\xi=\{x\in R\mid ax=0\}=\{x\in R\mid x\in r(a)\}=r(a)$$

nên, suy ra tồn tại phần tử lũy đẳng e' sao cho $r(a) = e'R = r(1-e')$. Đặt $e = 1 - e'$ thì $r(a) = r(e)$ với $e^2 = e$, $e \neq 1$ (do $r(a) \neq 0$). Suy ra $lr(a) = lr(e) = Re$ nên $a \in Re$. Do đó $Ra \subseteq Re$.

Mặt khác, $r(a) \subseteq r(e)$ nên $e \in lr(a)$. Từ đó ta được $Ra \subseteq Re \subseteq lr(a)$. Theo (5), ta được $Ra = Re$.

Do $Ra = Re$ nên $e = r_0 a$ và $a = r_1 e$, $r_0, r_1 \in R$, suy ra $ae = ar_0 a$ và $ae = a$ nên $a = ar_0 a$. Khi đó $ar_0 = ar_0 ar_0$. Đặt $e'' = ar_0$ ta được $e''^2 = e''$. Lại có $a = ar_0 a = e'' a \in e'' R$ nên $aR \subseteq e''R$. Mặt khác, $e'' = ar_0 \in aR$ nên $e''R \subseteq aR$. Suy ra $aR = e''R \leq^{\oplus} R$. Vậy aR là một hạng tử trực tiếp của R_R.

$(6) \Rightarrow (1)$ Giả sử $N \leq R_R$, $N \cong eR$ với $eR \neq R$. Ta chứng minh $N \leq^{\oplus} R_R$.

Gọi $\phi : eR \to N$ là đẳng cấu. Đặt $a = \phi(e)$ ta được $aR = \phi(eR) = N$. Ta kiểm tra được $r(a) = r(e)$. Thật vậy, nếu $x \in r(a)$ thì $ax = 0$ hay $\phi(ex) = \phi(e)x = 0$. Mà ϕ là đơn cấu nên suy ra $ex = 0$. Do đó $x \in r(e)$ hay $r(a) \subseteq r(e)$. Ngược lại, nếu $x \in r(e)$ thì $ex = 0$. Suy ra $0 = \phi(ex) = \phi(e)x = ax$. Do đó $x \in r(a)$ nên $r(e) \subseteq r(a)$.

Nếu $r(a) = 0$ thì $r(e) = 0$. Suy ra $lr(e) = l(0) = R$ nên $Re = R$. Mà $Re \cap R(1-e) = 0$ nên $R(1-e) = 0$. Suy ra $e = 1$ nên $eR = R$ (mâu thuẫn giả thiết). Do đó $r(a) \neq 0$. Từ (6), ta được $aR \leq^{\oplus} R_R$. Vậy R là vành $PC2$ phải.

Mệnh đề 10. Nếu R là vành $PC2$ phải thì eRe cũng là vành $PC2$ phải với $e \in R$, $e \neq 1$ là phần tử lũy đẳng thỏa $ReR = R$.

Chứng minh. Đặt $S = eRe$. Giả sử $r_S(a) = r_S(f)$ với $a \in S$, $f^2 = f \in S$, $f \neq 1$. Cần chứng minh $f \in Sa$.

Trước tiên, chứng minh $r_R(a) = r_R(f)$. Thật vậy, với mọi $r \in r_R(a)$ ta có $ar = 0$. Lại có $a \in S$ nên $a = er_1 e$ với $r_1 \in R$, suy ra với mọi $x \in R$ ta có

$$a(erxe) = aerxe = (er_1 e)erxe = (er_1 e)rxe = arxe = 0$$

Và $erxe \in S = eRe$ nên $erxe \in r_S(a) = r_S(f)$. Do đó, $f(erxe) = 0$. Lại có $f \in S$ nên $f = er_2 e$ với $r_2 \in R$, suy ra $0 = f(erxe) = (er_2 e)erxe = (er_2 e)rxe = frxe$.

Ta có $ReR = R$ nên $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i e b_i$, với $a_i, b_i \in R$, suy ra

$$f(r) = \sum_{i=1}^{n} fra_i eb_i = \sum_{i=1}^{n} (fra_i e) b_i = 0$$

(do $frxe = 0$ với mọi $x \in R$). Do đó, $r \in r_R(f)$. Vậy $r_R(a) \subseteq r_R(f)$.

Với mọi $r \in r_R(f)$ hay $fr = 0$. Vì $fe = f$ nên $f(era_i e) = fra_i e = 0$. Lại có $era_i e \in S$ nên

$$era_i e \in r_S(f) = r_S(a).$$

Do đó $a(era_i e) = 0$. Mà $ReR = R$ nên $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i eb_i$, suy ra $ar = \sum_{i=1}^{n} ara_i eb_i = \sum_{i=1}^{n} (aera_i e) b_i = 0$ (do $ae = a$) Vậy $r \in r_R(a)$ hay $r_R(f) \subseteq r_R(a)$.

R là vành $PC2$ phải nên theo Mệnh đề 9 ta được $f \in Ra$. Mà

$$f = er_2 e = e(er_2 e) = ef \in eRa,$$

$$eRa = eR(er_1 e) = eRe(er_1 e) = Sa,$$

suy ra $f \in Sa$. Vậy eRe cũng là vành $PC2$ phải.

Định lý 11. Cho $R-$môđun M_R và $E = End(M_R)$. Khi đó, các điều kiện sau được thỏa mãn:

1. Nếu E là vành $PC2$ phải thì M_R là $PC2-$môđun.
2. Chiều ngược lại trong (1) đúng nếu $\ker\alpha$ được sinh ra bởi M với $r_E(\alpha) \leq^{\oplus} E_E$.

Chứng minh.

1. Gọi $\alpha : P \to M$ là $R-$đơn cấu với $P \leq^{\oplus} M$, $P \neq M$ và $\pi^2 = \pi \in E$ thỏa $\pi(M) = P$. Do $P \neq M$ nên $\pi \neq 1_M$. Khi đó, $M = \operatorname{Im}\pi \oplus \ker\pi = P \oplus Q$ với $\ker\pi = Q$. Ta định nghĩa $\overline{\alpha} \in E$ bởi $\overline{\alpha}(p+q) = \alpha(p)$, suy ra $\overline{\alpha}\big|_P = \alpha$. Ta có

$$\begin{aligned}\ker\overline{\alpha} &= \{p+q \mid p \in P,\ q \in Q,\ \overline{\alpha}(p+q) = 0\} \\ &= \{p+q \mid p \in P,\ q \in Q,\ \alpha(p) = 0\} \\ &= \{p+q \mid p \in P,\ q \in Q,\ p \in \ker\alpha\}.\end{aligned}$$

Vì α là đơn cấu nên $\ker\alpha = 0$, suy ra

$$\ker\overline{\alpha} = \{q \mid q \in Q\} = \ker\pi.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} r_E(\overline{\alpha}) &= \{\lambda \in E \mid \overline{\alpha} \circ \lambda = 0\} \\ &= \{\lambda \in E \mid \overline{\alpha} \circ \lambda(m) = 0, \forall m \in M\} \\ &= \{\lambda \in E \mid \lambda(m) \in \ker \overline{\alpha} = Q, \forall m \in M\} \\ &= \{\lambda \in E \mid \pi \circ \lambda(M) = 0\} = r_E(\pi). \end{aligned}$$

Vì E là $PC2-$ vành phải nên $\pi \in E\overline{\alpha}$, suy ra $\pi = \beta \circ \overline{\alpha}$ với $\beta \in E$. Với mọi $p \in P$,

$$\pi \circ \beta \circ \alpha(p) = \pi \circ \beta \circ \overline{\alpha}(p) = \pi \circ \pi(p) = \pi(p) = p.$$

Theo Định lý 7, M_R là $PC2-$ môđun.

2. Giả sử $r_E(\alpha) = r_E(\pi)$ trong đó $\alpha \in E$, $\pi^2 = \pi \in E$, $\pi \neq 1_M$. Để chứng minh E là $PC2-$ vành phải ta chứng minh $\pi \in E\alpha$.

Tác giả sẽ chỉ ra $\ker \alpha = \ker \pi$. Ta có $\pi \circ (1-\pi) = 0$ nên $1 - \pi \in r_E(\pi) = r_E(\alpha)$, suy ra $\alpha \circ (1-\pi) = 0$ hay $\alpha = \alpha \circ \pi$. Lấy $x \in \ker \pi$ ta có $\pi(x) = 0$, nên $\alpha(x) = \alpha \circ \pi(x) = 0$ hay $x \in \ker \alpha$. Do đó $\ker \pi \subseteq \ker \alpha$. Mặt khác,

$$\ker \alpha = \sum \{\theta(M) \mid \theta \in H \subseteq E, \theta(M) \subseteq \ker \alpha\}.$$

Với mọi $\theta \in H$, ta có $\theta(M) \subseteq \ker \alpha$ nên $\alpha \circ \theta(M) = 0$. Suy ra $\theta \in r_E(\alpha) = r_E(\pi)$. Do đó, $\pi \circ \theta = 0$ nên $\theta(M) \subseteq \ker \pi$. Do đó, $\ker \alpha \subseteq \ker \pi$. Vậy $\ker \alpha = \ker \pi$.

Mặt khác $\pi^2 = \pi \in E$ nên $M = \operatorname{Im} \pi \oplus \ker \pi$. Đặt $\pi(M) = P$, $\ker \pi = Q$. Giả sử $P = M$, suy ra $\ker \pi = 0$ nên $(1-\pi)(M) = 0$. Do đó $\pi = 1_M$ (mâu thuẫn). Vì vậy $P \neq M$. Do đó $P \cap \ker \alpha = 0$ nên

$$\begin{aligned} \ker \alpha\big|_P &= \{x \in P \mid \alpha\big|_P(x) = 0\} \\ &= \{x \in P \mid \alpha(x) = 0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Suy ra, $\alpha\big|_P$ là đơn cấu. Vì M thỏa mãn điều kiện $PC2$ nên tồn tại $\beta \in E$ sao cho $\beta \circ \alpha\big|_P = i$ trong đó $i : P \to M$ là phép nhúng.

Ta chứng minh $\beta \circ \alpha = \pi$. Nếu $q \in Q$ thì $(\beta \circ \alpha)(q) = 0 = \pi(q)$, suy ra $\beta \circ \alpha = \pi$. Nếu $p \in P$ thì

$$(\beta \circ \alpha)(p) = (\beta \circ \alpha\big|_P)(p) = i(p) = p = \pi(p).$$

Với mọi $m \in M = P \oplus Q$ ta được $m = p + q$ với $p \in P$ và $q \in Q$,

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha(m) &= \beta \circ \alpha(p+q) = \beta \circ \alpha(p) + \beta \circ \alpha(q) \\ &= \pi(p) + \pi(q) = \pi(m). \end{aligned}$$

Do đó $\pi = \beta \circ \alpha \in E\alpha$. Vậy E là $PC2-$ vành phải.

3. Kết luận

Bài báo đã trình bày một số kết quả về $PC2-$ môđun. Mỗi $PC2-$ môđun cũng là $C3-$ môđun (Mệnh đề 3). Ngoài ra, các điều kiện tương đương của $PC2-$ môđun, $PC2-$ vành được trình bày trong Định lý 7, Hệ quả 8, Mệnh đề 9. Đồng thời, vành $End(M)$ là $PC2-$ vành khi M là $PC2-$ môđun. Hơn nữa, với e là phần tử lũy đẳng thỏa mãn điều kiện $ReR = R$, eRe sẽ là $PC2-$ vành khi R là $PC2-$ vành.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S. H. Mohamed and B. J. Muller, *Continuous and Discrete Module*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[2] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[3] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, "Weakly continuous and $C2-$ ring", *Communications in Algebra*, vol. 29, no. 6, pp. 2429-2446, 2001.

[4] Y. Utumi, "On continuous regular rings", *Canad. Math. Bull*, vol. 4, pp. 63-69, 1961.

[5] L. V. Thuyet and T. C. Quynh, *Textbook of Modules and Rings,* Hue University Publishing house, 2019.

[6] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and categories of Modules*, Spinger - Verlag, New York, 1974.

[7] F. Kasch, *Modules and Ring*, L.M.S Monograph No. 17, Academic Press, New York, 1982.