

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM MICRO CƠ TÍNH BIẾN THIÊN THEO HAI PHƯƠNG VỚI LỖ RỔNG BẰNG TIẾP CẬN ĐẲNG HÌNH HỌC

FREE VIBRATION ANALYSIS OF BI-DIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED POROUS MICROPLATE USING ISOGEOMETRIC APPROACH

Nguyễn Tuấn Linh^{1*}, Đào Như Mai², Khuất Đức Dương¹

¹Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội, Việt Nam

²Viện Cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Việt Nam

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: nguyentuanlinh@hau.edu.vn

(Nhận bài / Received: 24/3/2023; Sửa bài / Revised: 11/5/2023; Chấp nhận đăng / Accepted: 22/5/2023)

Tóm tắt - Bài báo này sử dụng phân tích đẳng hình học (IGA), lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi kết hợp với lý thuyết tấm cô điển của Kirchhoff-Love để phân tích dao động riêng của tấm micro có lỗ rỗng và cơ tính biến thiên theo chiều dày và phương chiều dài. Toàn bộ tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak và cơ tính vật liệu theo hàm số mũ kết hợp với 2 kiểu lỗ rỗng là đều và không đồng đều. Điểm mới của nghiên cứu là xem xét hệ số tỷ lệ chiều dài thay đổi như cơ tính của vật liệu. Nguyên lý Hamilton được áp dụng để đưa ra phương trình xác định tần số dao động riêng cho tấm. Độ chính xác của phương pháp được kiểm chứng thông qua các so sánh số tin cậy. Hơn nữa, quá trình khảo sát số để đánh giá ảnh hưởng của các tham số: lỗ rỗng, hệ số tỷ lệ chiều dài, độ cứng nền đàn hồi và các yếu tố khác đến khả năng dao động riêng của tấm được thực hiện.

Từ khóa - Phân tích đẳng hình học; dao động riêng; tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương

1. Đặt vấn đề

Vật liệu được phân loại theo chức năng (FGM) đã được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kỹ thuật khác nhau do các đặc tính cơ, nhiệt và điện độ dẻo của chúng. Các tính chất của vật liệu thay đổi theo không gian thông qua chiều dày và chiều dài của vật liệu. Sự thay đổi không gian trong các thuộc tính này có thể được sử dụng để tối ưu hóa hiệu suất của các cấu trúc kỹ thuật. Những vật liệu này được ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như hàng không vũ trụ, cơ khí và kỹ thuật y sinh. Từ những năm đầu của thế kỷ XXI, với sự phát triển vượt bậc của các ngành khoa học vật liệu, các kết cấu có kích thước micro và nano được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi trong tất cả các ngành của đời sống xã hội. Đặc biệt, trong những năm gần đây, chúng ta đang trải qua giai đoạn của cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ IV trong lịch sử loài người. Trong đó, vật liệu đóng vai trò là nhân tố then chốt trong sự cạnh tranh toàn cầu giữa các siêu cường về khoa học và kỹ thuật, đặc biệt trong các lĩnh vực điện tử, chip bán dẫn, cảm biến sử dụng trong các thiết bị công nghệ cao. Với kết cấu dầm, tấm, vỏ có kích thước micro, chúng được sử dụng rộng rãi như các khối xây dựng của hệ thống cơ điện vi mô (MEMS) gồm các cảm biến vi mô, kính hiển vi siêu nhỏ, microantenna, microgripper, microactuator và microresonator. Các lý thuyết nghiên cứu cho kết cấu micro có thể kể đến như lý

Abstract - This work analyzes the free vibrations of porous microplates by using the Isogeometry Analysis (IGA), the modified couple stress theory, and Kirchhoff-classical Love's plate theory. In which the mechanical properties change along the x-length and thickness dimensions. The whole plate is supported by a Pasternak elastic foundation, and the exponential mechanical characteristics of the material, along with two different kinds of porosity, are both even and uneven. Consideration of the changeable length-scale characteristics as the material's mechanical properties is novel to this work. Using Hamilton's principle gives the equation for evaluating the plate's natural frequency of vibration. Through reliable numerical comparisons, the method's precision was determined. In addition, a numerical analysis is conducted to determine the effect of characteristics such as porosity, length-scale parameter, elastic foundation stiffness, and other coefficients on the plate's free vibration.

Key words - Isogeometric analysis; free vibration; bidirectional functionally graded microplate

thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi, lý thuyết gradient biến dạng, lý thuyết phi cục bộ, lý thuyết phi cục bộ gradient biến dạng, ... Tuy nhiên, lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi là được sử dụng rộng rãi nhất vì nó đáp ứng được các yêu cầu kết quả sát với các nghiên cứu thực nghiệm. Các nghiên cứu điển hình có thể kể đến như Thai và cộng sự [1] sử dụng mô hình tấm Kirchhoff và Mindlin đã phân tích uốn tĩnh, dao động riêng và ổn định của tấm được phân loại chức năng dựa trên lý thuyết ứng suất cặp đôi đã sửa đổi. Nguyen và cộng sự [2] đã sử dụng lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi và lý thuyết Von-Kaman để phân tích phi tuyến tĩnh của tấm micro tựa một phần trên nền đàn hồi. Các nghiên cứu về ứng xử cơ học khác của tấm micro có thể được tìm thấy trong các nghiên cứu [3]-[7]. Trong những năm gần đây, một phương pháp tính toán được gọi là phân tích đẳng hình học đã xuất hiện. Phương pháp này cho phép đưa phân tích phần tử hữu hạn (FEA) vào các công cụ thiết kế CAD điển hình dựa trên NURBS. Do đó, giờ đây có thể sử dụng một tập dữ liệu duy nhất trong suốt quá trình phát triển mô hình, xác minh các mô hình đó và cải thiện các mô hình đó [8]-[9]. Nhiều nghiên cứu đã được đưa vào khuôn khổ phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) và B-splines đã được sử dụng rộng rãi làm chức năng chuẩn. Thomas Hughes đã phát triển một khuôn khổ để nghiên cứu các đường đẳng hình học, họ đã thống nhất và trình bày nó

¹ Hanoi University of Industry, Vietnam (Nguyen Tuan Linh, Khuat Duc Duong)

² Institute of Mechanics, Vietnam Academy of Science and Technology, Vietnam (Dao Nhu Mai)

dưới tên phân tích đẳng hình học [10]- [12]. Kể từ đó, phương pháp đẳng hình học đã được sử dụng rộng rãi trong các phương pháp tính toán, đặc biệt là để mô phỏng hành vi cơ học của các kết cấu và cho độ chính xác cao. Cottrell và cộng sự [13] đã liệt kê nghiên cứu của Argyris bằng cách áp dụng phân tích đẳng hình học cho các kích thích cấu trúc, phân tiếp theo đánh thức khả năng sáng tạo hình học của Argyris. Phương pháp đẳng hình học thực sự đã khắc phục được các yếu điểm mà phương pháp FEM để lại, mang lại các kết quả tính chính xác tương đương với phương pháp giải tích. Tuy nhiên, theo tìm hiểu của tác giả, hiện tại chưa có nhiều công trình mô hình hóa và phân tích ứng xử cơ học của các tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương và có lỗ rỗng sử dụng phương pháp số như đẳng hình học. Do đó, trong nghiên cứu này, bằng cách sử dụng phương pháp đẳng hình học, lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi và lý thuyết tấm cổ điển, đặc điểm dao động riêng của tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương chiều dày và chiều dài được đề xuất. Các kết quả này có thể ứng dụng trong quá trình tính toán thiết kế các kết cấu cỡ micromet và cơ tính biến đổi, góp phần vào hiểu biết các đặc tính cơ học của kết cấu này.

2. Cơ sở toán học

2.1. Mô hình cơ học và vật liệu tấm micro

Xem xét tấm micro mỏng có dạng hình chữ nhật như Hình 1, được chế tạo từ vật liệu có cơ tính biến thiên hai phương gồm các pha gốm và kim loại. Các kích thước hình học của tấm bao gồm chiều dài a , chiều rộng b và chiều dày h ; toàn bộ tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak với hai hệ số độ cứng k_w, k_s . Trong đó, k_w là chỉ số độ cứng nền Winkler, k_s là hệ số độ cứng nền Pasternak. Quy luật về độ xấp của vật liệu tấm micro sử dụng các mô hình toán học sau [14].

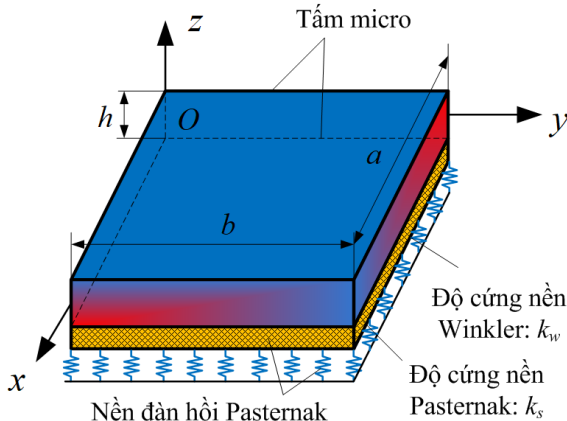
Loại 1: Độ rỗng đồng đều

$$\vartheta = \frac{\xi}{2} \quad (1a)$$

Loại 2: Độ rỗng không đồng đều

$$\vartheta = \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (1b)$$

Trong đó: ϑ và ξ lần lượt được gọi là thể tích lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng.



Hình 1. Mô hình tấm micro cơ tính biến thiên theo hai phương

Quy luật cấu tạo các đặc tính cơ học của vật liệu có độ xấp bao gồm mô đun đàn hồi E (GPa), khối lượng ρ (kg/m^3), hệ số tỷ lệ chiều dài l (μm), và hệ số Poisson ν được mô tả như các công thức dưới đây [15].

$$E(x, z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \vartheta(E_c + E_m) \quad (2a)$$

$$\rho(x, z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \vartheta(\rho_c + \rho_m) \quad (2b)$$

$$l(x, z) = l_m + (l_c - l_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \vartheta(l_c + l_m) \quad (2c)$$

$$\nu(x, z) = \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \vartheta(\nu_c + \nu_m) \quad (2d)$$

Trong đó, các chỉ số m và c lần lượt biểu thị các thành phần kim loại và gốm; α_z và α_x là các hệ số mũ điều khiển thể tích vật liệu lần lượt theo hướng chiều dày và chiều dài.

Trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển của Kirchhoff-Love, trường chuyển vị của tấm micro tại mọi điểm bất kỳ với u_0 , v_0 , và w_0 lần lượt là chuyển vị theo hướng trục x , y , z biểu diễn là

$$\begin{cases} u_x = u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) \\ u_y = v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) \\ u_z = w_0(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

Theo lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi [16], các phương trình cấu thành cho một đẳng hướng vật liệu đàn hồi tuyến tính là

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \theta_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}. \quad (4)$$

Ở đây, σ_{ij} là các thành phần ứng suất cục bộ, θ_{ij} là các thành phần của tensor ứng suất cặp đối xứng; λ và μ là các hằng số Lamé's. ε_{ij} và χ_{ij} lần lượt là các tensor biến dạng và tensor độ cong đối xứng được xác định bởi

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i}; \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}); \Phi_i \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \end{aligned} \quad (5)$$

Theo các công thức (3) và (5) trường biến dạng tuyến tính ε_{ij} và các thành phần tensor độ cong χ_{ij} đặc trưng cho tấm micro được xác định là

$$\varepsilon_{xx} = u_{0,x} - zw_{0,xx}, \varepsilon_{yy} = v_{0,y} - zw_{0,yy} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xy} = u_{0,y} + v_{0,x} - 2zw_{0,xy}. \quad (7)$$

$$\chi_{xx} = w_{0,xy}; \chi_{yy} = -w_{0,xy}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \chi_{xy} &= -\frac{1}{2} w_{0,xx} + \frac{1}{2} w_{0,yy}; \chi_{xz} \\ &= -\frac{1}{4} (u_{0,xy} - v_{0,xx}); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\chi_{yz} = -\frac{1}{4} (u_{0,yy} - v_{0,xy}); \quad (10)$$

Từ đây, mối quan hệ giữa ứng suất (σ_{ij}, θ_{ij}) và biến dạng của kết cấu tấm micro được biểu diễn như các công thức dưới đây.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E(x,z)}{1-\nu(x,z)^2} (\varepsilon_{xx} + \nu(x,z)\varepsilon_{yy}); \\ \sigma_{yy} &= \frac{E(x,z)}{1-\nu(x,z)^2} (\varepsilon_{yy} + \nu(x,z)\varepsilon_{xx}); \\ \sigma_{xy} &= \frac{E(x,z)\varepsilon_{xy}}{2(1+\nu(x,z))}.\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\{\theta_{xx}, \theta_{yy}, \theta_{zz}, \theta_{xy}, \theta_{xz}, \theta_{yz}\} = \\ \frac{E(x,z)l^2}{1+\nu(x,z)} \{\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{zz}, \chi_{xy}, \chi_{xz}, \chi_{yz}\};\end{aligned}\quad (12)$$

2.2. Phương trình chuyển động

Sử dụng nguyên lý cực tiểu thế năng Hamilton, các phương trình chuyển động tổng quát của tấm micro có cơ tính biến thiên theo hai phương trên nền đàn hồi được cho như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta U_f - \delta K) dt = 0 \quad (13)$$

Ở đây δU , δU_f , và δK lần lượt là biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của tấm, biến phân thế năng biến dạng của nền đàn hồi Pasternak và biến phân động năng của dịch chuyển tấm. Các công thức xác định các thành phần biến phân này được cho như sau:

$$\delta U = \int_{S_e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}_{mb} \delta \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{A}_{ms} \delta \boldsymbol{\chi}) dx dy \quad (14)$$

$$\delta U_f = \int_{S_e} (k_w w_0 \delta w_0 - k_s (w_{0,xx} + w_{0,yy}) \delta w_0) dx dy \quad (15)$$

$$\delta K = \int_{S_e} (\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{G}_m \delta \dot{\mathbf{u}}) dy dx \quad (16)$$

Ở đây:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^1 \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}; \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = - \begin{Bmatrix} w_{0,xx} \\ w_{0,yy} \\ 2w_{0,xy} \end{Bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} w_{0,xy} \\ -w_{0,xy} \\ \frac{1}{2}(w_{0,yy} - w_{0,xx}) \end{Bmatrix}; \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\chi} = - \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} u_{0,xy} - v_{0,xx} \\ u_{0,yy} - v_{0,xy} \end{Bmatrix};$$

Trong đó, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{F} , \mathbf{A}_{mb} và \mathbf{A}_{ms} lần lượt là các ma trận độ cứng của vật liệu được xác định như các công thức dưới đây:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}) = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_b(1, \bar{z}, \bar{z}^2) dz; \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_{mb} = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{mb} dz; \quad \mathbf{A}_{ms} = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ms} dz \quad (20)$$

Q_b , Q_{mb} , và Q_{ms} là các ma trận thuộc tính cơ học của vật liệu và $\bar{z} = z - t_0$, t_0 là khoảng cách từ mặt phẳng trung bình tới mặt phẳng trung hòa của tấm. Các thành phần trên được tính như sau:

$$Q_b = \frac{E(x,z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad (21)$$

$$Q_{mb} = \frac{E(x,z)l^2}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad Q_{ms} = \frac{2E(x,z)l^2}{1+\nu};$$

$$t_0 = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(x,z)z dz}{\int_{-h/2}^{+h/2} E dz}.$$

Các thành phần chuyển vị \mathbf{u} và ma trận mômen quán tính khối lượng được xác định là

$$\mathbf{u} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad w_{0,x} \quad w_{0,y}\} \quad (22)$$

$$\mathbf{G}_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(x,z) L_z^T L_z dz; \quad (23)$$

$$L_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\bar{z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\bar{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Từ công thức (13), sau khi thực hiện các bước tích phân từng phần và bỏ qua điều kiện biên ranh giới Neuman [17], bài báo thu được phương trình dao động riêng của tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương như sau

$$\begin{aligned}\int_{S_e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}_{mb} \delta \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{A}_{ms} \delta \boldsymbol{\chi}) dx dy \\ + \int_{S_e} (k_w w_0 \delta w_0 + k_s (w_{0,x} \delta w_{0,x} + w_{0,y} \delta w_{0,y})) dx dy \\ = \int_{S_e} (\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{G}_m \delta \dot{\mathbf{u}}) dx dy\end{aligned}\quad (24)$$

3. Phân tích dạng hình học

Các chuyển vị trong mặt phẳng trung bình được xấp xỉ là [18]

$$\mathbf{d}^h = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{C}_I \mathbf{d}_I; \quad \mathbf{d}_I = [u_{0e}, v_{0e}, w_{0e}]. \quad (25)$$

Ở đây, \mathbf{C}_I và \mathbf{d}_I lần lượt biểu diễn các hàm dạng và véc tơ chuyển vị tại điểm điều khiển I và $Ne = (p+1)(q+1)$ là số lượng điểm điều khiển trên toàn tấm, p và q là bậc Hàm cơ số B-spline.

$$\begin{aligned}u_0 &= \sum_{I=1}^{Ne} [\mathbf{C}_I \quad 0 \quad 0] \mathbf{d}_I = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{H}_I^u \mathbf{d}_I; \\ v_0 &= \sum_{I=1}^{Ne} [0 \quad \mathbf{C}_I \quad 0] \mathbf{d}_I = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{H}_I^v \mathbf{d}_I; \\ w_0 &= \sum_{I=1}^{Ne} [0 \quad 0 \quad \mathbf{C}_I] \mathbf{d}_I = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{H}_I^w \mathbf{d}_I;\end{aligned}\quad (26)$$

Thay thế các công thức (26) vào công thức (24), có thể thu được các phương trình cân bằng tổng thể cho dao động tự do của tấm micro như sau:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_f) \mathbf{d} = 0 \quad (27)$$

Với $\mathbf{M} = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{M}_I^I$, $\mathbf{K}_p = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{K}_I^I$, $\mathbf{K}_f = \sum_{I=1}^{Ne} \mathbf{K}_f^I$ và \mathbf{d} lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của tấm, ma trận độ cứng nền đàn hồi Pasternak và véc tơ chuyển vị của tấm micro.

Từ đây đặt: $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}} \sin(\omega t)$, tần số dao động riêng ω của tấm được xác định như sau

$$\det[\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_f - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (28)$$

Điều kiện biên

- Tựa đơn giản (S):

$$u_0 = w_0 = w_{0,x} = 0 \text{ tại } y = 0, b$$

và $v_0 = w_0 = w_{0,y} = 0$ tại $x = 0, a$

- Ngàm (C)

$$u_0 = v_0 = w_0 = w_{0,x} = w_{0,y} = 0 \text{ trên tất cả các cạnh.}$$

- Tự do (F)

$$u_0 = v_0 = w_0 = w_{0,x} = w_{0,y} \neq 0 \text{ tại tất cả các cạnh.}$$

4. Khảo sát số và bình luận

Với mô hình cơ và toán đã được thực hiện ở Phần 2 và 3, một chương trình tính được thực hiện trên phần mềm Matlab để xác định tần số dao động riêng của tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương với các điều kiện biên bất kỳ. Độ hội tụ và chính xác của chương trình được kiểm chứng thông qua so sánh số với các kết quả đã được công bố. Để thuận tiện cho quá trình đưa ra các kết quả số, một vài công thức không thứ nguyên sau đây được sử dụng

$$\Omega_1 = \omega_{11} \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m/E_m}; \Omega_1^* = \omega_{11} \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c};$$

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D_c}; K_s = \frac{k_s a^2}{D_c}; D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)};$$

4.1. Xác minh độ hội tụ tin cậy và chính xác

Đầu tiên, đặc tính hội tụ đối với kết quả tần số dao động riêng Ω_1 của tấm micro có cơ tính biến thiên theo phương và chịu liên kết tựa đơn trên 4 cạnh (SSSS) được thực hiện và trình bày như trên Bảng 1. Các số liệu đầu vào và kết quả tần số Ω_1 của tấm micro được lấy từ trong nghiên cứu của Thai và cộng sự [1]. Với bốn lưới phần tử hữu hạn riêng biệt được phân tích cho từng trường hợp tấm để xác định tốc độ hội tụ của phương pháp IGA được đề xuất. Như được hiển thị trong Bảng 1, trong khi sự hội tụ nhanh của phân tích được ghi lại cho các bậc đa thức p=3 và p=4, các nghiệm sử dụng p=2 thể hiện tốc độ hội tụ tương đối chậm đối với các nghiệm giải tích của Thai và cộng sự [1]. Dựa trên các kết quả trên, lưới phần tử NURBS khối 11x11 (p=4) được sử dụng cho các khảo sát tiếp theo.

Bảng 1. Sự hội tụ của tần số dao động riêng không thứ nguyên Ω_1 của tấm micro có cơ tính biến thiên ($h/a = 0,05, \alpha_z = 1$)

| l/h | p | Lưới phần tử | | | | [1] |
|-----|---|--------------|---------|---------|---------|---------|
| | | 7x7 | 9x9 | 11x11 | 13x13 | |
| 0,2 | 2 | 5,8982 | 5,8882 | 5,8832 | 5,8803 | 5,9175 |
| | 3 | 5,8733 | 5,8732 | 5,8732 | 5,8732 | |
| | 4 | 5,8732 | 5,8732 | 5,8732 | 5,8732 | |
| 0,8 | 2 | 10,8937 | 10,8753 | 10,8660 | 10,8608 | 10,9293 |
| | 3 | 10,8477 | 10,8476 | 10,8475 | 10,8475 | |
| | 4 | 10,8475 | 10,8475 | 10,8475 | 10,8475 | |

Tiếp theo, Bảng 2 trình bày kết quả so sánh tần số dao động Ω_1^* của tấm FGM micro. Độ dày của tấm được chỉ định là trung bình ($a/h = 20$) và mỏng ($a/h = 100$) với bốn giá trị của tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu $\frac{l}{h} = 0,2; 0,4; 0,8; 1,0$ và $\alpha_z = 0; 1$. Các kết quả Ω_1^* do bài báo đề xuất hoàn toàn phù hợp với các kết quả được báo

cáo trong [18] như đã thấy trong Bảng 2. Từ các kết quả so sánh trên, cho thấy được tính đúng đắn của phương pháp và các công thức mà bài báo xây dựng.

Bảng 2. So sánh tần số dao động riêng không thứ nguyên Ω_1^* của tấm micro có cơ tính biến thiên theo phương chiều dày

| a/h | l/h | $\alpha_z = 0$ | | $\alpha_z = 1$ | |
|-----|-----|----------------|---------|----------------|---------|
| | | [18] | Bài báo | [18] | Bài báo |
| 20 | 0,2 | 6,4027 | 6,4424 | 4,9568 | 4,9834 |
| | 0,4 | 7,6708 | 7,7081 | 6,0756 | 6,1016 |
| | 0,8 | 11,4108 | 11,4478 | 9,2887 | 9,3171 |
| | 1 | 13,5545 | 13,5934 | 11,1042 | 11,1352 |
| 100 | 0,2 | 6,4534 | 6,4551 | 4,9922 | 4,9940 |
| | 0,4 | 7,7217 | 7,7233 | 6,1126 | 6,1146 |
| | 0,8 | 11,4689 | 11,4704 | 9,3344 | 9,3370 |
| | 1 | 13,6186 | 13,6202 | 11,1560 | 11,1589 |

4.2. Nghiên cứu số

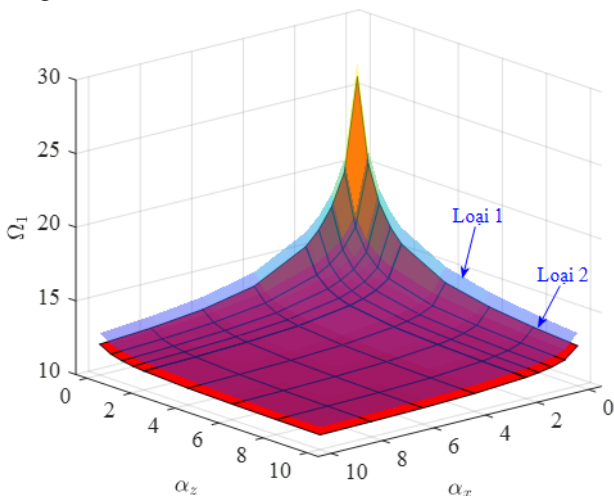
Tại tiểu mục này, ảnh hưởng của các tham số đến tần số dao động riêng của tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương được nghiên cứu và bình luận. Các kết quả này được trình bày dưới dạng các đồ thị và tham số đầu vào được lấy chung cho các khảo sát như sau: $\frac{a}{h} = 50; \frac{a}{b} = 1; \alpha_z = 0,5; \alpha_x = 1; \xi = 0,2; l_c = h; l_m = \frac{l_c}{3}; K_w = 50; K_s = 5$; vật liệu tấm được sử dụng là gốm $Al_2O_3, E_c = 380GPa, \rho_c = 3800kgm^{-3}, \nu_c = 0,3$ và kim loại: $Al; E_m = 70GPa; \rho_m = 2700kgm^{-3}; \nu_m = 0,3$ (mỗi trường hợp hợp khảo sát sẽ thay đổi một vài số liệu, các số liệu còn lại được giữ nguyên).

Đầu tiên, ảnh hưởng của hệ số mũ thể tích vật liệu: α_z, α_x đến tần số dao động riêng Ω_1 của tấm được trình bày như Hình 2. Từ đồ thị, có thể dễ dàng nhận thấy, tần số dao động riêng Ω_1 giảm khi hệ số α_z, α_x tăng lên, điều này được giải thích là sự tăng lên của α_z, α_x làm cho tỷ lệ kim loại trong vật liệu tấm tăng lên do đó độ cứng của tấm giảm. Hơn nữa $0 \leq \alpha_z, \alpha_x \leq 2$ là giá trị tần số dao động riêng giảm nhanh nhất, sau giá trị này, tốc độ suy giảm của tần số dao động riêng chậm hơn. Và trong hai loại lỗ rỗng loại 1 và loại 2, loại 2 (lỗ rỗng loại 2) sẽ cho kết cấu có tần số lớn hơn. Một điều nữa có thể thấy là, tấm micro có cơ tính thay đổi theo hai phương sẽ mềm hơn tấm micro có cơ tính thay đổi theo một phương hoặc đẳng hướng. Tuy nhiên, tấm micro có cơ tính thay đổi theo nhiều phương sẽ giúp kết cấu có được nhiều đặc tính quý của các loại vật liệu khác nhau trên mỗi vị trí tấm

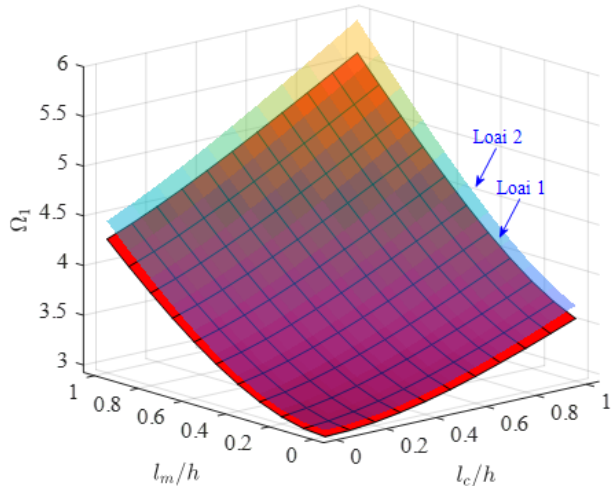
Tiếp theo, Hình 3 mô tả kết quả tần số dao động riêng do sự thay đổi của hệ số tỷ lệ chiều dài vật liệu l_c, l_m . Dễ dàng quan sát thấy, tần số dao động riêng Ω_1 liên tục tăng lên khi tăng giá trị l_c, l_m . Điều đó cho thấy, kết cấu càng nhỏ, càng cứng và độ cứng này được thể hiện qua hệ số tỷ lệ chiều dài vật liệu l_c, l_m .

Hình 4, mô tả ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi Pasternak gồm K_w, K_s đến giá trị tần số dao động riêng của tấm micro, cũng như hệ số tỷ lệ chiều dài vật liệu, sự tăng lên của độ cứng nền đàn hồi, góp phần làm tăng độ cứng tổng thể của tấm và kết quả là tăng tần số dao động riêng. Từ đó có thể thấy, độ cứng của tấm có thể điều

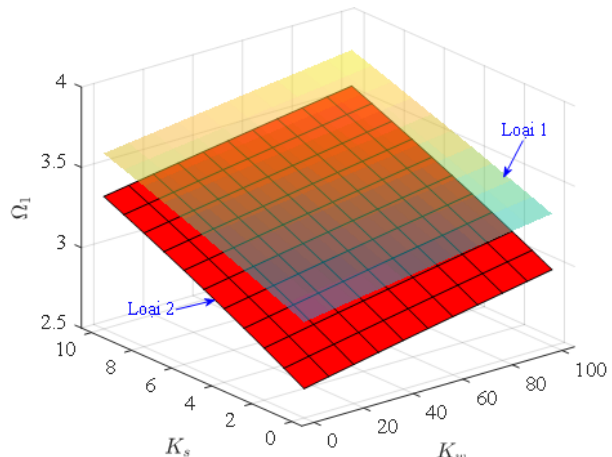
khởi bằng cách cho chúng tựa trên các nền đàn hồi có độ cứng khác nhau



Hình 2. Ảnh hưởng của hệ số mũ thể tích vật liệu: α_z, α_x đến tần số dao động riêng Ω_1 của tấm micro (SSSS)



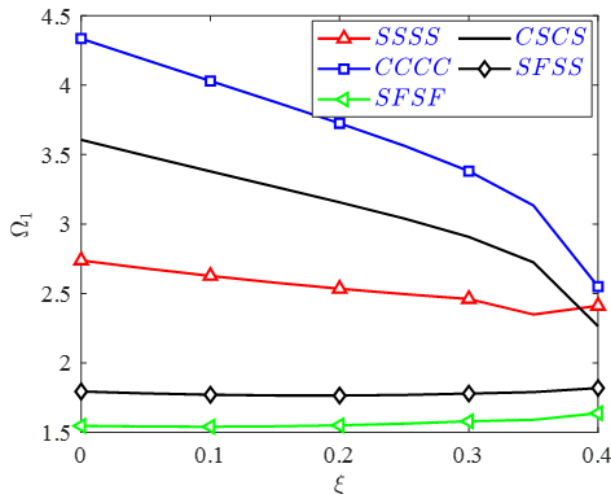
Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài vật liệu: l_c, l_m đến tần số dao động riêng Ω_1 của tấm micro (CCCC)



Hình 4. Ảnh hưởng của hệ số độ cứng nền đàn hồi: K_w, K_s đến tần số dao động riêng Ω_1 của tấm micro (CSCS)

Cuối cùng là ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng và các điều kiện biên khác nhau đến các kết quả tần số dao động riêng Ω_1 được mô tả rõ ràng trên Hình 5. Xu hướng chung cho ta thấy, hệ số lỗ rỗng tăng lên làm cho tần số dao động

riêng giảm, hay nói cách khác, hệ số lỗ rỗng làm giảm độ cứng của tấm. Hơn nữa, các điều kiện biên khác nhau, cũng có tác dụng điều khiển độ cứng của tấm và ở đây cho thấy biên CCCC cho độ cứng lớn nhất và nhỏ nhất là biên SFSF. Do đó, vò sẽ có tần số dao động riêng lớn nhất khi sử dụng biên CCCC và tần số dao động riêng nhỏ nhất khi sử dụng biên SFSF. Thứ tự giảm dần tần số dao động riêng theo các điều kiện biên như sau: CCCC, CSCS, SSSS, SFSS, SFSF.



Hình 5. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng và các điều kiện biên khác nhau đến tần số dao động riêng Ω_1 của tấm micro

5. Kết luận

Trong khuôn khổ của nghiên cứu hiện tại, phương pháp đẳng hình học được phát triển để phân tích dao động riêng của tấm micro có cơ tính thay đổi theo hai phương dựa vào lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi với điểm mới là hệ số tỷ lệ chiều dài thay đổi như cơ tính vật liệu. Tính chính xác của phương pháp được kiểm chứng thông qua so sánh số với các nghiên cứu sử dụng phương pháp giải tích chính xác. Các nghiên cứu chỉ ra rằng, tần số dao động riêng có xu hướng tăng lên theo sự gia tăng của hệ số tỷ lệ chiều dài, nó không bị phụ thuộc vào các yếu tố hình học hay các điều kiện biên khác nhau. Trong khi đó, sự tăng lên của hệ số mũ thể tích và lỗ rỗng luôn làm giảm độ cứng của kết cấu tấm, dẫn đến giảm tần số dao động riêng một cách nhanh chóng. Sự thay đổi các điều kiện biên khác nhau sẽ cho các dải tần số dao động riêng và các hình dạng dao động khác nhau. Ngoài ra, độ cứng nền đàn hồi có vai trò quan trọng trong quá trình làm việc của tấm, nó giúp tấm trở lên cứng vững hơn đáng kể.

Với kết cấu dầm, tấm, vò có kích thước micro, chúng được sử dụng rộng rãi như các khối xây dựng của hệ thống cơ điện tử vi mô (MEMS) gồm các cảm biến vi mô, kính hiển vi siêu nhỏ, microantenna, microgripper, microactuator và microresonator.

Dựa vào các kết quả và thuật toán của bài báo, có thể phát triển tính toán các nghiên cứu về ổn định tĩnh, động, bài toán động lực học tuyến tính và phi tuyến của tấm micro cơ tính biến đổi theo hai phương. Tuy nhiên, do lý thuyết của bài báo thích hợp cho tính toán tấm mỏng, nên các nghiên cứu về tấm dày cần phải sử dụng lý thuyết tấm dày, để kết quả thu được chính xác nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] T. Huu-Tai and C. Dong-Ho, "Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory", *Composite Structures*, vol. 95, pp. 142-153, 2013.
- [2] N. T. Dung, V. K. Tran, T. T. H. Huyen, and P. V. Minh, "Nonlinear static bending analysis of microplates resting on imperfect two-parameter elastic foundations using modified couple stress theory", *Comptes Rendus. Mécanique*, vol. 350, no. G1, pp. 121-141, 2022.
- [3] G. C. Tsiatas, "A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, no. 13, pp. 2757-2764, 2009.
- [4] L. Yin, Q. Qian, L. Wang, and W. Xia, "Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory", *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 23, no. 5, pp. 386-393, 2010.
- [5] H. M. Ma, X.-L. Gao, and J. N. Reddy, "A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory", *Acta Mechanica*, vol. 220, no. 1-4, pp. 217-235, 2011.
- [6] J.N. Reddy, J. Berry, "Nonlinear theories of axisymmetric bending of functionally graded circular plates with modified couple stress", *Composite Structures*, vol. 94, no. 12, pp. 3664-3668, 2012.
- [7] J. Kim, J.N. Reddy, "A general third-order theory of functionally graded plates with modified couple stress effect and the von Karman nonlinearity: theory and finite element analysis", *Acta Mechanica*, vol. 226, no. 9, pp. 2973-2998, 2015.
- [8] V. P. Nguyen, C. Anitescu, S. P. A. Bordas, and T. Rabczuk, "Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects", *Math. Comput. Simul.*, vol. 117, pp. 89-116, 2018.
- [9] B. Jüttler, U. Langer, A. Mantzaflaris, S. E. Moore, and W. Zulehner, "Geometry + Simulation Modules: Implementing Isogeometric Analysis", *Pamm*, vol. 14, no. 1, pp. 961-962, 2014.
- [10] B. Marussig and T. J. R. Hughes, "A Review of Trimming in Isogeometric Analysis: Challenges, Data Exchange and Simulation Aspects", *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 25, pp. 1059-1127, 2018.
- [11] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
- [12] T. J. R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli, "Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: Comparison of p-method finite elements with k-method NURBS", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 197, no. 49-50, pp. 4104-4124, 2008.
- [13] Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y., and Hughes, T. J. R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 195, no. 41-43, pp. 5257-5296, 2006.
- [14] D. Shahsavari, B. Karami, H. R. Fahham, and L. Li, "On the shear buckling of porous nanoplates using a new size-dependent quasi-3D shear deformation theory", *Acta Mech.*, vol. 229, no. 11, pp. 4549-4573, 2018.
- [15] A. Karamanli, T.P. Vo, "Size dependent bending analysis of two directional functionally graded microbeams via a quasi-3D theory and finite element method", *Compos. B Eng.* vol. 144, pp. 171 - 183, 2018, .
- [16] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *Int J Solids Struct.*, vol. 39, pp. 2731-43, 2002.
- [17] T. Van-Ke, P. Quoc-Hoa, and T. Nguyen-Thoi, "A finite element formulation using four-unknown incorporating nonlocal theory for bending and free vibration analysis of functionally graded nanoplates resting on elastic medium foundations", *Engineering with Computers*, vol. 38, pp. 1465-1490, 2022.
- [18] H. X. Nguyen, T. N. Nguyen, M. Abdel-Wahab, S.P.A. Bordas, H. Nguyen-Xuan, T. P. Vo. "Isogeometric analysis for functionally graded microplates based on modified couple stress theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 313, pp. 904 - 940, 2017.