VỀ CÁC HÀM HẠNG XẠ ẢNH CÓ THỂ MỞ RỘNG TRÊN NỬA VÀNH

ON EXTENDABLE PROJECTIVE RANK FUNCTIONS OVER SEMIRINGS

Hà Chí Công*

Trường Đại học Tài chính – Kế toán, Quảng Ngãi, Việt Nam[1]

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: hachicong@tckt.edu.vn

(Nhận bài / Received: 20/9/2023; Sửa bài / Revised: 02/11/2023; Chấp nhận đăng / Accepted: 03/11/2023)

Tóm tắt - Trong bài báo này, tác giả tiến hành khảo sát các điều kiện để một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành có thể mở rộng được như trên vành theo quy tắc $rrank(M) = \min\{r(E) \mid M = NEP\}$, với M là ma trận tùy ý, E là ma trận lũy đẳng và $rrank$ được gọi là hàm mở rộng của r. Từ đó, chứng minh được một số tính chất cơ bản đối với các hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được. Tác giả đã cung cấp các nửa vành mà trên đó tồn tại ít nhất hai hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được. Hơn nữa, nếu một nửa vành mà trên đó có ít nhất một hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được thì nửa vành đó có số phần tử sinh không bị chặn mạnh và mọi hàm mở rộng tương ứng luôn bị chặn trên bởi hạng nhân tử.

Từ khóa - Nửa vành; Ma trận lũy đẳng; Hàm hạng xạ ảnh; Hạng nhân tử; Hạng Gondran-Minoux

Abstract - In this paper, we investigate conditions under which a projective rank function on a semiring can be extended as in rings according to the rule $rrank(M) = \min\{r(E) \mid M = NEP\}$, with M being an arbitrary matrix, E being an idempotent matrix and $rrank$ being called the extension function of r. From there, we prove several fundamental properties of extension functions of projective rank functions that can be extended. We have provided semirings on which there exist at least two extendable projective rank functions. Furthermore, if a semiring exists where at least one extendable projective rank function then that semiring has strongly unbounded generating number, and all corresponding extension functions are always bounded above by factor rank function.

Key words - Semiring; Idempotent matrix; Projective rank function; Factor rank; Gondran-Minoux rank

1. Đặt vấn đề

Trên một vành S cho trước, mọi hàm hạng xạ ảnh r luôn có thể mở rộng được đối với ma trận tùy ý theo quy tắc $rrank(M) = \min\{r(E) \mid M = NEP\}$, với M là ma trận tùy ý và E là ma trận lũy đẳng (xem [1]). Điều này có nghĩa là: Với mọi ma trận lũy đẳng E ta luôn có $rrank(E) = r(E)$. Khi đó, hàm $rrank$ đi từ tập hợp $M(S)$, gồm các ma trận trên vành S, vào tập hợp các số thực không âm $\mathbb{R}^+$ được xem như một hàm mở rộng của hàm hạng xạ ảnh r đã cho. Việc nghiên cứu các tính chất đặc trưng của hàm hạng xạ ảnh trên vành và hàm mở rộng của nó đã thu được nhiều kết quả quan trọng trong bài toán phân loại cấu trúc vành (xem [1], [2], [3]). Cụ thể, trong [1, Corollary 20] đã chỉ ra rằng: Trên một vành S khác không, $f(M) = frank(M), \forall M \in M(S)$ khi và chỉ khi vành S là xạ ảnh tự do. Trong đó, f là hàm hạng nhân tử của ma trận. Tuy nhiên, khi mở rộng hàm hạng xạ ảnh theo quy tắc như trên cho các ma trận tùy ý trên nửa vành, một số kết quả không xảy ra như trên vành, do trên nửa vành S tổng quát, tập hợp S cùng với phép toán cộng không phải là một nhóm. Một số yêu cầu đặt ra là: *Với điều kiện nào thì hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành có thể mở rộng được theo quy tắc như trên? Chỉ ra các lớp nửa vành như vậy? Hàm mở rộng của một hàm hạng xạ ảnh cho trước có những tính chất cơ bản nào?...*

Trong thời gian gần đây, hàm hạng ma trận là chủ đề được nhắc đến nhiều trong các nghiên cứu về phân loại cấu trúc nửa vành, khá nhiều kết quả đạt được về các tính chất đặc trưng của hàm hạng ma trận trên nửa vành, chẳng hạn như: Nửa vành Tropical, nửa vành Max-plus và các nửa vành cụ thể khác (xem [4], [5]). Thông qua các đặc trưng của các hàm hạng ma trận để mô tả cấu trúc cũng như phân loại các lớp nửa vành cũng được quan tâm nghiên cứu (xem [6] - [12]). Tuy nhiên, những kết quả nghiên cứu về hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành chưa nhiều. Trong các kết quả của bài báo này, tác giả tập trung giải quyết một phần các yêu cầu được đặt ra ở trên như: Xem xét một số điều kiện để một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành có thể mở rộng được, và khảo sát các tính chất cơ bản của các hàm mở rộng tương ứng. Ngoài ra, tác giả cung cấp một lớp nửa vành mà trên đó tồn tại ít nhất hai hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được và nhận thấy rằng: Các nửa vành mà trên đó tồn tại hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được là các "nửa vành có số phần tử sinh không bị chặn mạnh" (xem [9, Định nghĩa 3.2]) và mọi hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh tương ứng luôn bị chặn trên bởi hạng nhân tử.

2. Định nghĩa và kết quả liên quan

Nửa vành (xem [4]) là một tập hợp R có chứa các phần tử 0 và 1, trên R có trang bị hai phép toán cộng $(+)$ và nhân $(.)$ sao cho:

i) R cùng với phép toán cộng tạo thành vị nhóm giao hoán có phần tử đơn vị là 0;

ii) R cùng với phép toán nhân tạo thành vị nhóm với phần tử đơn vị là 1;

iii) $t.(u+v) = t.u + t.v;\ (t+u).v = t.v + u.v, \forall t,u,v \in R;$

iv) $0.u = u.0 = 0, \forall u \in R$.

Ta có thể viết ab thay vì viết $a.b$ với mọi $a,b \in R$. Ta nói nửa vành R là *zerosumfree* nếu

[1] University of Finance and Accountancy, Quangngai, Vietnam (Ha Chi Cong)

$r+s=0 \Rightarrow r=s=0,\ \forall r,s \in R$; nửa vành R được gọi là *không có ước của không* (hay còn gọi là *nguyên*) nếu $\begin{cases} r \neq 0 \\ s \neq 0 \end{cases} \Rightarrow rs \neq 0,\ \forall r,s \in R$; R được gọi là *lũy đẳng* nếu $r+r=r, \forall r \in R$; R được gọi là *giao hoán* nếu $rs=sr,\ \forall r,s \in R$.

Nhắc lại trong [7] rằng, nếu nửa vành R giao hoán và lũy đẳng thỏa điều kiện: $\forall a,b \in R$, $\exists c \in R, c \neq 0$: $ac+bc \in \{ac, bc\}$ thì R được gọi là *nửa vành tựa lựa chọn*.

Nhắc lại trong [4] rằng, một *nửa môđun phải M*, trên nửa vành R cho trước, là một vị nhóm $(M,+)$ giao hoán, có phần tử đơn vị ký hiệu là 0_M, cùng với ánh xạ từ $M \times R$ vào M được xác định bởi $(m,s) \mapsto ms$ được gọi là phép toán nhân ngoài với các phần tử của R, thỏa mãn các điều kiện sau: $\forall x,y \in M$ và $\forall s,u \in R$ ta có:

i) $x(su)=(xs)u$;

ii) $(x+y)s = xs+ys$;

iii) $x(s+u) = xs+xu$;

iv) $x1 = x$;

v) $0_M s = 0_M = x0$.

Định nghĩa *nửa môđun trái* trên R được phát biểu tương tự, các kết quả trong bài viết này đều xét đối với nửa môđun phải, do đó, khi không sợ nhầm lẫn, ta chỉ cần nói *nửa môđun* thay vì nửa môđun phải.

Nửa môđun M trên nửa vành R được gọi là *hữu hạn sinh* nếu tồn tại tập con hữu hạn phần tử $K=\{k_1,k_2,...,k_p\}$ của M sao cho với mọi $m \in M$, tồn tại $r_1,r_2,...,r_p \in R$ mà $m=\sum_{i=1}^{p} k_i r_i$.

Nửa môđun P trên nửa vành R là *xạ ảnh* nếu thỏa điều kiện: Với bất kỳ các đồng cấu nửa môđun $\alpha: G \to H$ và $\beta: P \to H$, α là toàn cấu, tồn tại một đồng cấu nửa môđun $\gamma: P \to G$ thỏa mãn $\alpha \circ \gamma = \beta$.

Trên nửa vành R cho trước, một ma trận M có cấp $m \times n$ $(n \times n)$ được ký hiệu là $M_{m\times n}$ (M_n), một ma trận khối có dạng $\begin{pmatrix} A_{m\times n} & 0_{m\times q} \\ 0_{p\times n} & B_{p\times q} \end{pmatrix}$ được ký hiệu là $A_{m\times n} \oplus B_{p\times q}$ hay $A \oplus B$ nếu không sợ nhầm lẫn về cấp của chúng. $M_{m\times n}(R)$ là tập các ma trận cấp $m\times n$, $M(R)$ là tập các ma trận tùy ý. Một ma trận vuông A được gọi là *lũy đẳng* nếu $A^2 = A$. Ta ký hiệu $IM(R)$ là tập hợp các ma trận lũy đẳng có hệ số thuộc R.

Theo [3], hai ma trận lũy đẳng E, F được gọi là *tương đương*, ký hiệu là $E \cong F$, nếu có các ma trận M, N sao cho $E = MN,\ F = NM$. Chú ý rằng, theo [10, Lemma 4.3], trên nửa vành R cho trước, moi nửa môđun xạ ảnh Q có tập sinh hữu hạn luôn đẳng cấu với nửa môđun $E(R^n)$ nào đó, với $E(R^n)$ là nửa môđun con của R^n có hệ sinh gồm các vectơ cột của ma trận lũy đẳng $E_n \in IM(R)$. Hơn nữa, theo [11, Mệnh đề 2.9], nếu các nửa môđun xạ ảnh P, Q được sinh bởi các vectơ cột của các ma trận lũy đẳng tương ứng G, H thì $P \cong Q \Leftrightarrow G \cong H$.

Theo [6], *hạng nhân tử* của một ma trận $A_{m\times n}$ trên nửa vành R, ký hiệu $f(A)$, là số tự nhiên k bé nhất sao cho $A = MN$ với $M \in M_{m\times k}(R)$, $N \in M_{k\times n}(R)$.

Theo [3], *hạng nhân tử ổn định* của ma trận $B \in M(R)$ (nếu có) được ký hiệu là $\overline{f}(B)$ và xác định bởi công thức $\overline{f}(B) = \lim_{r\to\infty}\left[f(B \oplus I_r) - r \right]$.

Theo [9], nếu mọi ma trận $M_{m\times n}$, $N_{n\times m}$ trên nửa vành R thỏa mãn điều kiện $MN = I_n \Rightarrow n \geq m$ thì R được gọi là có *số phần tử sinh không bị chặn mạnh* hay được gọi là nửa vành có *SUGN*. Chú ý rằng, theo [9, Định lý 3.6], nửa vành R có SUGN khi và chỉ khi $f(I_m) = m, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

Nhắc lại trong [5] rằng, một họ $\{a_1,...,a_n\} \subset R^m$, gồm các vectơ cột lấy hệ số trên nửa vành R, được gọi là *phụ thuộc tuyến tính GM* nếu có các phần tử $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ không đồng thời bằng 0 và các tập hợp I, J sao cho $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1,2,...,n\}$ và $\sum_{i\in I} a_i\lambda_i = \sum_{j \in J} a_j \lambda_j$. Trường hợp họ $\{a_1,...,a_n\}$ không phụ thuộc tuyến tính GM thì được gọi là *độc lập tuyến tính GM*. Đối với ma trận trên nửa vành R, *hạng cột GM* của một ma trận $A \in M_{m\times n}(R)$, ký hiệu $mc_{GM}(A)$, là số vectơ cột lớn nhất của ma trận A mà chúng độc lập tuyến tính GM.

Dưới đây là một số kết quả đã được chứng minh liên quan đến bài báo:

Mệnh đề 2.1 ([6]). Cho R là nửa vành, với mọi ma trận $M_{h\times k}, N_{k\times s}$ ta luôn có $f(MN) \leq \min\{f(M), f(N)\}$.

Mệnh đề 2.2 ([9, Mệnh đề 2.8]). Trên nửa vành R tùy ý, nếu $G, H \in IM(R)$ và $G \cong H$ thì $f(G) = f(H)$.

Mệnh đề 2.3 ([9, Định lý 3.13]). Nếu R là nửa vành có SUGN thì $\overline{f}(M) \geq 0, \forall M \in M(R)$. Ngược lại, nếu tồn tại $M \in M(R)$ sao cho $\overline{f}(M)$ tồn tại thì R có SUGN.

Mệnh đề 2.4. ([7, Corollary 2.11]). Trên nửa vành R nguyên, tựa lựa chọn, nếu các ma trận A, B, C được biểu diễn dưới dạng $A = A_1A_2...A_n$, $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ và $C = (C_1 \cdots C_n)$. Khi đó,

i) $mc_{GM}(A) \leq \min\{mc_{GM}(A_i), i = 1,...,n\}$;

ii) $mc_{GM}(B) \leq \sum_{i=1}^{n} mc_{GM}(B_i)$;

iii) $mc_{GM}(C) \le \sum_{i=1}^{n} mc_{GM}(C_i)$.

Trong đó, $(C_1 \cdots C_n)$ là ma trận khối được tạo ra từ các ma trận $C_1, C_2, ..., C_n$.

3. Kết quả nghiên cứu

Trong phần này, tác giả khảo sát một số điều kiện để một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành có thể mở rộng được, chứng minh một số tính chất của các hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng, mô tả cấu trúc nửa vành mà trên đó có ít nhất một hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được.

Định nghĩa 3.1 ([1, p. 269]). Cho *R* là nửa vành, một ánh xạ $r: IM(R) \to \mathbb{R}^+$ được gọi là *hàm hạng xạ ảnh* trên nửa vành *R* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau với mọi ma trận lũy đẳng P, Q:

i) $P \cong Q \Rightarrow r(P) = r(Q)$;

ii) $r(P \oplus Q) = r(P) + r(Q)$;

iii) $r((1)) = 1$.

Định nghĩa 3.2 ([1, p. 269]). Giả sử r là một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R*, một ánh xạ $rrank: M(R) \to \mathbb{R}^+$ được xác định bởi quy tắc $rrank(A) = \min\{r(E) | A = BEC, E \in IM(R)\}$, với mọi $A \in M(R)$, được gọi là *hàm mở rộng* của hàm hạng xạ ảnh *r* nếu $rrank(F) = r(F), \forall F \in IM(R)$. Khi đó, ta còn nói r là *hàm hạng xạ ảnh mở rộng được* cho ma trận tùy ý trên *R*.

Định lý 3.3. Cho *r* là hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R*, các điều kiện sau là tương đương:

i) *r* là hàm hạng xạ ảnh mở rộng được.

ii) Với mọi $E, F \in IM(R)$, nếu có các ma trận $G, H \in M(R)$ sao cho $F = GEH$ thì $r(F) \le r(E)$.

iii) Với mọi $M_k, N_k \in IM(R)$, nếu $MN = NM = M$ thì $r(M) \le r(N)$.

Chứng minh.

$i \Leftrightarrow ii$: Giả sử r là hàm hạng xạ ảnh mở rộng được trên nửa vành *R*, với mọi ma trận lũy đẳng $E, F \in IM(R)$ sao cho $F = BEC$, với các ma trận $B, C \in M(R)$ nào đó, suy ra $r(F) = rrank(F) \le r(E)$. Ngược lại, nếu $A_n \in M_n(R)$ là ma trận lũy đẳng thì $rrank(A) = r(A)$. Thật vậy, do $A \in IM(R)$ và $A = I_n A I_n$ nên $rrank(A) \le r(A)$. Mặt khác, giả sử $rrank(A) = k$ thì tồn tại ma trận lũy đẳng $E \in IM(R)$ và các ma trận $M, N \in M(R)$ sao cho $r(E) = k$ và $A = MEN$, suy ra $r(A) \le r(E) = k$. Vậy $k = rrank(A) \le r(A) \le r(E) = k$ hay $rrank(A) = r(A)$.

$ii \Rightarrow iii$: Hiển nhiên.

$iii \Rightarrow ii$: Giả sử E_n, F_m là các ma trận lũy đẳng và có các ma trận $B_{m\times n}, C_{n\times m}$ sao cho $F = B_{m\times n} E_n C_{n\times m}$, đặt ma trận $U = ECFBE$ ta có

$$U^2 = (ECFBE)(ECFBE) = ECFFFBE = ECFBE = U$$

suy ra U là ma trận lũy đẳng. Do $F = F^2 = BECF = (BE)(ECF)$ nên $F \cong U$ suy ra $r(F) = r(U)$, mặt khác, do E là ma trận lũy đẳng nên $\begin{cases} EU = EECFBE = ECFBE = U \\ UE = ECFBEE = ECFBE = U \end{cases}$ suy ra $r(U) \le r(E)$ (theo giả thiết). Vậy $r(F) = r(U) \le r(E)$. □

Kết quả sau cung cấp cho ta một vài ví dụ về sự tồn tại của hàm hạng xạ ảnh mở rộng được trên lớp nửa vành đã được đề cập trong [7].

Mệnh đề 3.4. Cho R là nửa vành tựa lựa chọn và *R* nguyên. Khi đó, hạng nhân tử và hạng cột GM của ma trận trên nửa vành R là các hàm hạng xạ ảnh mở rộng được.

Chứng minh.

Do R là nửa vành tựa lựa chọn và R nguyên nên theo [8, Định lý 3.2] và [8, Định lý 3.5] ta có, hạng nhân tử và hạng cột GM là các hàm hạng xạ ảnh. Mặt khác, với mọi ma trận lũy đẳng E, F sao cho $F = BEC$ ta có, $f(E) = f(BFC) \le f(F)$ (theo Mệnh đề 2.1) và $mc_{GM}(E) = mc_{GM}(BFC) \le mc_{GM}(F)$ (theo Mệnh đề 2.4). Vậy hạng nhân tử và hạng cột GM của ma trận trên nửa vành R là các hàm hạng xạ ảnh mở rộng được. □

Tiếp theo, tác giả khảo sát một số điều kiện đủ để một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành có thể mở rộng được

Định nghĩa 3.5. Cho r là một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R*, nếu ma trận lũy đẳng $J_n \in IM(R)$ có $r(J) = n$ thì *J* được gọi là *r-đầy*.

Mệnh đề 3.6. Cho *r* là một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R*, nếu các điều kiện sau xảy ra thì *r* là hàm hạng xạ ảnh mở rộng được:

i) Với mọi ma trận lũy đẳng E_n ta luôn có $r(E_n) \le n$.

ii) Với mọi $E \in IM(R)$, tồn tại $F \in IM(R)$ là ma trận *r*-đầy sao cho $E \cong F$.

Chứng minh.

Giả sử E_n, F_m là các ma trận lũy đẳng sao cho $F = B_{m\times n} E_n C_{n\times m}$. Theo giả thiết, tồn tại ma trận lũy đẳng *r*-đầy $U_k \in IM(R)$ sao cho $E \cong U$, nghĩa là tồn tại $G \in M_{n\times k}(R), H \in M_{k\times n}(R)$ sao cho $E = GH,\ U = HG$

suy ra $F = BGHC$. Đặt $V = HCBG$ suy ra $V^2 = HCFBG$. Do F là ma trận lũy đẳng nên ta có $\left(V^2\right)^2 = HCFBGHCFBG = HCFFFBG = HCFBG = V^2$ suy ra V^2 cũng là ma trận lũy đẳng. Mặt khác, $F = F^2 = BGHCF = \left(BG\right)\left(HCF\right)$ suy ra $F \cong V^2$ suy ra $r\left(F\right) = r\left(V^2\right) \le k = r\left(U\right) = r\left(E\right)$. Vậy hàm hạng xạ ảnh r là mở rộng được (theo Định lý 3.3). □

Nhận xét 3.7. Nếu hạng nhân tử f là một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R* thì f thỏa các điều kiện được nêu trong Mệnh đề 3.6. Thật vậy, với mọi ma trận lũy đẳng E_m ta luôn có $f\left(E_m\right) \le m$. Mặt khác, với mọi ma trận lũy đẳng A_n có $f\left(A\right) = k$, theo [11, Bổ đề 3.13] thì tồn tại ma trận lũy đẳng U_k sao cho $A \cong U_k$ và do đó ma trận *U* là *f*-đầy (do $f\left(U_k\right) = f\left(A\right) = k$).

Nhắc lại trong [11] rằng, một ma trận lũy đẳng E_k là *tự do ổn định* nếu có các số tự nhiên m, n thỏa $E \oplus I_m \cong I_n$ và $rank\left(E\right) = n - m$ được gọi là *hạng tự do ổn định* của *E*. Khi đó, các nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh đẳng cấu với $E\left(R^k\right)$ được gọi là *nửa mô đun tự do ổn định*.

Định lý sau cung cấp một lớp nửa vành mà trên đó mọi hàm hạng xạ ảnh đều mở rộng được.

Định lý 3.8. Nếu trên nửa vành *R* có SUGN, các nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh là tự do ổn định thì mọi hàm hạng xạ ảnh trên *R* luôn mở rộng được.

Chứng minh

Giả sử *r* là một hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R* và A_m là ma trận lũy đẳng tùy ý. Theo giả thiết, *A* là tự do ổn định suy ra tồn tại các số tự nhiên l, k sao cho $A_m \oplus I_l \cong I_k$ suy ra $k = r\left(I_k\right) = r\left(A \oplus I_l\right) = r\left(A\right) + l$ suy ra $r\left(A\right) = k - l = rank\left(A\right)$. Do *R* là nửa vành có SUGN nên theo [11, Mệnh đề 3.11] ta có $r\left(A\right) = rank\left(A\right) \le f\left(A\right) \le m$.

Bây giờ xét E_p, F_q là hai ma trận lũy đẳng tùy ý sao cho $F = BEC$, do E là ma trận tự do ổn định nên $E_p \oplus I_t \cong I_s$ với $t, s \in \mathbb{N}$ suy ra tồn tại $M \in M_{(p+t)\times s}\left(R\right)$, $N \in M_{s\times(p+t)}\left(R\right)$ là các ma trận trên *R* sao cho $E \oplus I_t = MN$, $I_s = NM$. Khi đó,

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} MN \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}.$$

Đặt $U = N\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}M \in M_s\left(R\right)$, do $F \in IM\left(R\right)$ suy ra $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \in IM\left(R\right)$. Khi đó,

$$U^2 = N\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}M$$

$$= N\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}M = U$$ suy ra U là ma trận lũy đẳng. Theo chứng minh trên ta có $r\left(U\right) \le s$. Mặt khác,

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}^2 = \left[\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}M\right]\left[N\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\right]$$

suy ra $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} \cong U_s$ suy ra $r\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = r\left(U_s\right) \le s$ $\Rightarrow r\left(F\right) + r\left(I_t\right) \le s \Rightarrow r\left(F\right) \le s - t = r\left(E\right)$. Vậy *r* là hàm hạng xạ ảnh mở rộng được. □

Chú ý 3.9. Về các nửa vành được đề cập trong Định lý 3.8 có thể xem trong [12, Theorem 3.2]. Theo đó, trên nửa vành chia giản ước yếu, mọi nửa môđun xạ ảnh hữu hạn sinh đều tự do, do đó, chúng tự do ổn định. Mặt khác, các nửa vành chia giản ước yếu đều là nửa vành nguyên và zerosumfree nên chúng có SUGN (theo [9, Định lý 3.8]).

Dưới đây là một số tính chất đặc trưng của hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành *R* tùy ý.

Mệnh đề 3.10. Cho r_1, r_2 là các hàm hạng xạ ảnh mở rộng được trên nửa vành *R*. Khi đó, $r_1\left(E\right) \le r_2\left(E\right), \forall E \in IM\left(R\right)$ khi và chỉ khi $r_1rank\left(A\right) \le r_2rank\left(A\right), \forall A \in M\left(R\right)$.

Chứng minh.

Giả sử $r_1\left(E\right) \le r_2\left(E\right), \forall E \in IM\left(R\right)$, với mọi ma trận $A \in M_{m\times n}\left(R\right)$, nếu $r_2rank\left(A\right) = k$ thì tồn tại ma trận lũy đẳng F và các ma trận $M, N \in M\left(R\right)$ thỏa $r_2\left(F\right) = k$ và $A = MFN$, suy ra $r_1rank\left(A\right) \le r_1\left(F\right)$. Do F là ma trận lũy đẳng nên $r_1\left(F\right) \le r_2\left(F\right) = k = r_2rank\left(A\right)$, suy ra $r_1rank\left(A\right) \le r_2rank\left(A\right)$. Do r_1, r_2 là các hàm hạng xạ ảnh mở rộng được nên chiều ngược lại của Mệnh đề là hiển nhiên. □

Mệnh đề 3.11. Cho r là hàm hạng xạ ảnh mở rộng được trên nửa vành *R*, $A_{m\times n}, B_{n\times p} \in M\left(R\right)$. Khi đó,

$$rrank\left(AB\right) \le \min\left\{rrank\left(A\right), rrank\left(B\right)\right\}.$$

Chứng minh.

Giả sử $rrank\left(A\right) = r\left(E\right)$ với $E \in IM\left(R\right)$ sao cho tồn tại các ma trận $M, N \in M\left(R\right)$ thỏa đẳng thức $A = MEN$; $rrank\left(B\right) = r\left(F\right)$ với F là ma trận lũy đẳng sao cho tồn tại các ma trận P, Q thỏa mãn $B = PFQ$. Khi đó, $AB = MENPFQ$ suy ra $\begin{cases} rrank\left(AB\right) \le r\left(E\right) = rrank\left(A\right) \\ rrank\left(AB\right) \le r\left(F\right) = rrank\left(B\right) \end{cases}$, suy ra $rrank\left(AB\right) \le \min\left\{rrank\left(A\right), rrank\left(B\right)\right\}$. □

Mệnh đề 3.12. Cho R là nửa vành, $A_{m\times n}, B_{m\times p} \in M(R)$ và r là một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được. Khi đó,

i) $rrank\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} \le rrank(A) + rrank(B)$;

ii) $\max\{rrank(A), rrank(B)\} \le rrank\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$.

Trong đó, $\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$ là ma trận khối có được từ A, B.

Chứng minh.

i) Giả sử $rrank(A) = r(E)$ và $rrank(B) = r(F)$ với E và F là các ma trận lũy đẳng sao cho tồn tại các ma trận M, N, P, Q thỏa $A = MEN$ và $B = PFQ$. Khi đó, ta có thể phân tích $\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}M & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$, suy ra $rrank\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} \le r\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & F\end{pmatrix} = r(E \oplus F)$ (do $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}$ cũng là ma trận lũy đẳng). Mặt khác, do r là hàm hạng xạ ảnh nên

$$r(E\oplus F) = r(E) + r(F) = rrank(A) + rrank(B).$$

ii) Giả sử $rrank\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} = k$ thì tồn tại ma trận lũy đẳng J_q và các ma trận $H_{m\times q}, G_{q\times(n+p)}$ sao cho $r(J) = k$ và $\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} = HJG$. Đặt $G = \begin{pmatrix}G^1_{q\times n} & G^2_{q\times p}\end{pmatrix}$ suy ra $\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}HJG^1 & HJG^2\end{pmatrix}$ hay $\begin{cases}A = HJG^1\\ B = HJG^2\end{cases}$ suy ra $rrank(A) \le r(J)$ và $rrank(B) \le r(J)$.

Vậy $rrank\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix} \ge \max\{rrank(A),\ rrank(B)\}$. □

Từ Mệnh đề 3.11 và Mệnh đề 3.12, dễ dàng suy ra kết quả sau.

Hệ quả 3.13. Cho R là nửa vành, $A_{m\times n}, B_{p\times q}, C_{p\times q} \in M(R)$ và r là một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được. Khi đó,

i) $rrank(A\oplus B) \le rrank(A) + rrank(B)$.

ii) $\max\{rrank(A), rrank(B)\} \le rrank(A\oplus B)$.

iii) $rrank(B + C) \le rrank(B) + rrank(C)$.

Kết quả sau sẽ cho ta một mô tả về cấu trúc của lớp nửa vành mà trên đó tồn tại ít nhất một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được, đồng thời cho ta một kết quả so sánh giữa hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh mở rộng được với hạng nhân tử trên lớp nửa vành này.

Định lý 3.14. Cho R là nửa vành, nếu tồn tại r là một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được thì $rrank(A) \le \overline{f}(A), \forall A \in M(R)$. Hơn nữa, R có SUGN.

Chứng minh.

Với mọi $A \in M_{m\times n}(R)$, giả sử $f(A) = k$, khi đó, tồn tại các ma trận $G_{m\times k}, H_{k\times n}$ sao cho $A = GH$ suy ra $A = GI_kH$. Do I_k là ma trận lũy đẳng nên $rrank(A) \le r(I_k)$. Mặt khác, do r là hàm hạng xạ ảnh nên $r(I_k) = k$ suy ra $rrank(A) \le k = f(A)$.

Với mọi số nguyên dương m ta có $rrank(A\oplus I_m) \ge rrank(I_m)$ (theo Hệ quả 3.13). Do I_m là ma trận lũy đẳng và r là một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được trên nửa vành R nên $rrank(I_m) = r(I_m) = m$ suy ra $rrank(A\oplus I_m) \ge m$ hay $rrank(A\oplus I_m) - m \ge 0$. Điều này có nghĩa, dãy số $\{rrank(A\oplus I_m) - m\}$ là dãy bị chặn dưới. Mặt khác, với mọi số nguyên dương r, t mà $r \le t$, theo Hệ quả 3.13 ta có $rrank(A\oplus I_t) \le rrank(A\oplus I_r) + rrank(I_{t-r})$ suy ra $rrank(A\oplus I_t) \le rrank(A\oplus I_r) + t - r$ hay $rrank(A\oplus I_t) - t \le rrank(A\oplus I_r) - r$. Do đó, dãy số $\{rrank(A\oplus I_m) - m\}$ là dãy đơn điệu giảm. Vậy giới hạn $\lim\limits_{m\to\infty}(rrank(A\oplus I_m) - m)$ tồn tại không âm. Hơn nữa, dễ dàng kiểm tra được dãy số $\{f(A\oplus I_m) - m\}$ cũng là dãy số giảm. Theo chứng minh trên, ta có bất đẳng thức $rrank(A\oplus I_m) - m \le f(A\oplus I_m) - m, \forall m \in \mathbb{N}^*$. Do đó, khi cho m tiến ra vô cùng ta thu được bất đẳng thức $0 \le \lim\limits_{m\to\infty}(rrank(A\oplus I_m) - m) \le \overline{f}(A)$. Áp dụng Mệnh đề 2.3 ta được R là nửa vành có SUGN. □

Nhận xét 3.15. Trong trường hợp nửa vành tổng quát, dấu bằng "=" của bất đẳng thức $rrank(A) \le f(A), \forall A \in M(R)$ trong Định lý 3.14 không xảy ra. Chẳng hạn, xét nửa vành $S = [0,1] \subset \mathbb{R}$ cùng với hai phép toán $x + y = \max\{x, y\}$ và $x.y = \min\{x, y\}$ với mọi $x, y \in S$. Trên S ta trang bị quan hệ hai ngôi "$\ge$" là quan hệ thứ tự thông thường trên tập số thực. Dễ dàng kiểm tra được S là nửa vành nguyên và là nửa vành tựa lựa chọn. Theo Mệnh đề 3.4, ta có hạng cột GM là một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được trên S. Xét ma trận khác không $A = \begin{pmatrix}0,3 & 1\\ 0,2 & 1\end{pmatrix}$ có $A^2 = \begin{pmatrix}0,3 & 1\\ 0,2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,3 & 1\\ 0,2 & 1\end{pmatrix} = A$ nên A là ma trận lũy đẳng trên S, suy ra $mc_{GM}rank(A) = mc_{GM}(A)$. Do $\begin{pmatrix}0,3\\ 0,2\end{pmatrix}.0,1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.0,1$ nên hệ vectơ $\left\{\begin{pmatrix}0,3\\ 0,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ phụ thuộc tuyến tính GM, suy ra $mc_{GM}rank(A) = mc_{GM}(A) < 2$. Mặt khác, nếu $f(A) = 1$ thì có các ma trận $G = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix} \in M(S)$ thỏa điều kiện $A = GH \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ suy ra $\begin{cases} ac = 0,3 \\ ad = 1 \\ bc = 0,2 \\ bd = 1 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} ad = 1 \\ bd = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = d = 1$ suy ra $\begin{cases} ac = c = 0,3 \\ bc = c = 0,2 \end{cases}$ (vô lý).

Vậy $f(A) = 2 > mc_{GM}rank(A)$. Tuy nhiên, Hệ quả sau cho ta một trường hợp dấu bằng "=" xảy ra cho bất đẳng thức ở Định lý 3.14 nêu trên.

Hệ quả 3.16. Cho R là nửa vành và nếu hạng nhân tử f là một hàm hạng xạ ảnh trên R thì f mở rộng được và $frank(N) = f(N), \forall N \in M(R)$.

Chứng minh.

Với mọi ma trận lũy đẳng $E, F \in IM(R)$ sao cho $F = BEC$ suy ra $f(F) = f(BEC) \le f(E)$ (theo Mệnh đề 2.1) nên f là hàm hạng xạ ảnh mở rộng được. Xét ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$ tùy ý, áp dụng Định lý 3.14 ta có $frank(A) \le f(A)$. Mặt khác, nếu $frank(A) = k$ thì tồn tại $M \in IM(R)$ và các ma trận P, Q sao cho $A = PMQ$ và $f(M) = k$, suy ra $f(A) = f(PMQ) \le f(M) = k = frank(A)$. Do đó, $frank(A) = f(A)$. □

4. Kết luận

Một số kết quả đạt được của bài báo:

+ Định lý 3.3 và Mệnh đề 3.4, tác giả đã cung cấp một vài điều kiện cần và đủ để một hàm hạng xạ ảnh là mở rộng được, đồng thời giới thiệu một lớp nửa vành mà trên đó tồn tại ít nhất hai hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được.

+ Một số điều kiện đủ để hàm hạng xạ ảnh trên nửa vành có thể mở rộng được cũng thể hiện ở các Mệnh đề 3.6 và Định lý 3.8.

+ Các kết quả thu được ở các Mệnh đề 3.10, Mệnh đề 3.11, Mệnh đề 3.12 và Hệ quả 3.13 cung cấp một số tính chất cơ bản của hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh có thể mở rộng được trên nửa vành tùy ý. Ngoài ra, tác giả đã tiến hành so sánh hàm mở rộng của các hàm hạng xạ ảnh với hạng nhân tử, mô tả cấu trúc của lớp nửa vành mà trên đó tồn tại ít nhất một hàm hạng xạ ảnh mở rộng được, thể hiện qua các Định lý 3.14 và Hệ quả 3.16.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] W. Dicks and E. D. Sontag, "Sylvester domains", *J. Pure Appl. Algebr.*, Vol. 13, No. 3, pp. 243–275, 1978.

[2] P. M. Cohn, "Rank functions on rings", *J. Algebr.*, Vol. 133, No. 2, pp. 373–385, 1990, DOI: 10.1016/0021-8693(90)90275-S.

[3] P. M. Cohn, *Free ideal rings and localization in general rings*. Cambridge university press., 2006.

[4] J. S. Golan, *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.

[5] M. Akian, S. Gaubert, and A. Guterman, "Linear independence over tropical semirings and beyond", *Trop. idempotent Math. Contemp. Math.*, Vol. 495, pp. 1–38, 2009. DOI: 10.48550/arXiv.0812.3496.

[6] L. R. B. Beasley and A. E. Guterman, "Rank inequalities over semirings", *J. Korean Math. Soc.*, Vol. 42, No. 2, pp. 223–241, 2005.

[7] Y. Shitov, "Inequalities for Gondran-Minoux rank and idempotent semirings", *Linear Algebra Appl.*, Vol. 435, No. 7, pp. 1769–1777, 2011, doi: 10.1016/j.laa.2010.10.030.

[8] H. C. Cong, "Rank functions on quasi - selective semirings without zero divisors", *Journal of science of university of finance and accounting*, No. 16, pp. 89–93, 2019.

[9] H. C. Cong, "On semirings having strongly unbounded generating number", *Journal of science of university of finance and accounting*, No. 21, pp. 89–94, 2021.

[10] Y. Katsov, T. G. Nam, and J. Zumbrägel, "On congruence-semisimple semirings and the K0-group characterization of ultramatricial algebras over semifields", *J. Algebr.*, vol. 508, no. February, pp. 157–195, 2018.

[11] H. C. Cong, "Stably Free Rank of Idempotent Matrices on Semirings". *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, Vol. 20, No. 1, pp. 56–60, 2022.

[12] S. N. Il'in and Y. Katsov, "On Serre's Problem on Projective Semimodules over Polynomial Semirings", *Commun. Algebr.*, Vol. 42, No. 9, pp. 4021–4032, 2014.