SƠ ĐỒ SAI PHÂN ĐƠN ĐIỆU XẤP XỈ BẬC HAI TRÊN LƯỚI KHÔNG ĐỀU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH PARABOL GIẢ TUYẾN TÍNH VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN LOẠI BA

MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES OF THE SECOND ORDER OF APPROXIMATION ON NON-UNIFORM GRIDS FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH A BOUNDARY CONDITION OF THE THIRD KIND

Lê Minh Hiếu*

Trường Đại học Kinh tế - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam[1]

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: hieulm@due.edu.vn

(Nhận bài / Received: 24/10/2023; Sửa bài / Revised: 16/11/2023; Chấp nhận đăng / Accepted: 05/01/2024)

Tóm tắt - Trong bài báo này, tác giả trình bày nghiên cứu về việc xây dựng sơ đồ sai phân hữu hạn đơn điệu có xấp xỉ cục bộ bậc hai trên lưới không gian không đều cho phương trình parabol giả tuyến tính với điều kiện biên loại ba mà không sử dụng chính phương trình vi phân cơ sở tại biên của miền xác định. Mục tiêu là sự kết hợp giữa đẳng thức vi phân và giả thiết về sự tồn tại duy nhất của một nghiệm trơn. Trong trường hợp này, các điều kiện biên được xấp xỉ trực tiếp với bậc hai trên mẫu hai nút. Với sự trợ giúp của nguyên lý sai phân cực đại, các đánh giá hai phía của nghiệm sai phân được thiết lập và thu được đánh giá tiên nghiệm quan trọng trong chuẩn *C* đồng nhất. Các thực nghiệm số được giới thiệu để kiểm chứng lại các kết luận lý thuyết được chứng minh.

Từ khóa - Lưới không đều; nguyên tắc tối đa không chuẩn; sơ đồ sai phân đơn điệu; phương trình parabol giả tuyến tính; đánh giá hai phía

Abstract - In this article, the author presents a study on constructing a second order local approximation monotone difference schemes on spatial non-uniform grids for the quasilinear parabolic equation with a third kind boundary condition without using the basic differential equation at the boundary of the domain. The goal is a combination of differential equality and the assumption of the existence and uniqueness of a smooth solution. In this case, the boundary conditions are directly approximated with the second order on a two-point stencil. With the help of the difference maximum principle, two-sided estimates of the difference solution are established and an important a priori estimate in a uniform *C*-norm is obtained. Computational experiments, confirming the theoretical conclusions, are given.

Key words - Nonuniform grid; nonstandard maximum principle; monotone difference scheme; quasilinear parabolic equation; two-side estimate

1. Đặt vấn đề

Trong lý thuyết sơ đồ sai phân [1, 2], *nguyên tắc đối đa* được sử dụng để chứng minh tính ổn định và sự hội tụ của nghiệm sai phân trong chuẩn *C*. Các phương pháp sai phân hữu hạn thỏa mãn nguyên tắc tối đa thường được gọi là *đơn điệu* (xem ở [1, 2]). Sơ đồ đơn điệu đóng một vai trò quan trọng trong thực hành tính toán. Chúng cho phép nhận nghiệm số mà không bị xuất hiện các giao động ngay cả trong trường hợp nghiệm không trơn [3].

Ngoài việc *đánh giá trên*, một vấn đề không kém phần quan trọng đó là người ta cần *đánh giá dưới* nghiệm của bài toán vi-sai phân (trong trường hợp tổng quát, được gọi là *đánh giá hai phía*). Điều này thật sự quan trọng để nghiên cứu các tính chất lý thuyết của các phương pháp số xấp xỉ các bài toán phi tuyến, khi mà cần phải chứng minh được nghiệm sai phân thuộc vào miền giá trị của nghiệm chính xác. Liên quan đến vấn đề này, chúng ta chú ý đến công trình [4], trong đó các đánh giá hai phía cho nghiệm của sơ đồ sai phân xấp xỉ bài toán Dirichlet cho phương trình parabol tuyến tính nhận được trong các trường hợp rời rạc và liên tục.

Việc cải thiện bậc chính xác của một phương pháp mà không làm tăng mẫu chuẩn (số nút chuẩn) của các sơ đồ sai phân luôn là một nhiệm vụ cấp bách của vật lý toán. Khi mô hình hóa toán học các bài toán ứng dụng đa chiều với các đặc trưng trong miền hình học phức tạp, người ta thường phải dựa vào việc sử dụng các lưới không đều (không đồng nhất). Tuy nhiên, khi chuyển từ lưới đều sang lưới không đều, bậc của sai số xấp xỉ cục bộ thường giảm. Ví dụ khi xấp xỉ đạo hàm bậc hai trên mẫu 3 nút thông thường [1] trong chuẩn *C* và trong chuẩn L_2, chỉ có xấp xỉ bậc 1 xảy ra, tức là $u''(x_i)-u_{\bar{x}\hat{x},i}=O\left(h_{i+1}-h_i+\hbar_i^2\right)$, ở đây

$$u_{\bar{x}\hat{x},i}=\left(u_{x,i}-u_{\bar{x},i}\right)/\hbar_i,\qquad u_{x,i}=\left(u_{i+1}-u_i\right)/h_{i+1},$$

$$u_{\bar{x},i}=\left(u_i-u_{i-1}\right)/h_i,\qquad \hbar_i=0,5\left(h_{i+1}+h_i\right),$$

h_i là bước nhảy của lưới không đều. Chỉ bằng cách áp dụng chuẩn "âm" (negative norm), độ chính xác bậc 2 mới có thể được chứng minh cho các sơ đồ sai phân tương ứng trên các lưới không đồng nhất. Một cách tiếp cận để cải thiện độ chính xác của phương pháp là tính gần đúng phương trình vi phân ban đầu không phải tại các nút của lưới tính toán mà tại một số điểm trung gian của miền tính toán. Thật vậy, tại một điểm không thuộc lưới được xác định theo công thức $\bar{x}_i=\left(x_{i+1}+x_i+x_{i-1}\right)/3=x_i+\left(h_{i+1}-h_i\right)/3$, xấp xỉ thông thường của đạo hàm sai phân cấp 2 bảo toàn được bậc 2, nghĩa là $u''(\bar{x}_i)-u_{\bar{x}\hat{x},i}=O\left(\hbar_i^2\right)$. Ý tưởng đơn giản

[1] The University of Danang - University of Economics, Danang, Vietnam (Le Minh Hieu)

này đã được phát triển sau đó trong các công trình của A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich và P.P. Matus. Cụ thể, trong [5], các sơ đồ sai phân hữu hạn có bậc xấp xỉ cao hơn đã được xây dựng cho phương trình vi phân thường bậc hai, cho các phương trình parabol và hyperbol một chiều. Trong [6, 7], đối với phương trình Poisson đa chiều, các sơ đồ bảo toàn đơn điệu có bậc 2 xấp xỉ cục bộ được xây dựng trên một lưới không đều tùy ý.

Khi chúng ta xây dựng các sơ đồ sai phân đơn điệu xấp xỉ một phương trình parabol với các điều kiện biên loại ba, việc duy trì độ chính xác bậc hai là rất quan trọng. Việc tăng bậc xấp xỉ của các điều kiện biên thường đạt được bằng cách sử dụng chính phương trình vi phân ban đầu tại biên của vùng tính toán (ví dụ, trong trường hợp hình hộp *p*-chiều, xem [8, 9]). Tuy nhiên, với cách tiếp cận cổ điển như vậy, khó có thể chứng minh được sự hội tụ bậc 2 trong chuẩn đồng nhất *C*. Trong nghiên cứu [10], một cách tiếp cận đã được đề xuất để xây dựng các sơ đồ sai phân hữu hạn đơn điệu cho các bài toán vi phân tuyến tính với các điều kiện biên loại hai và loại ba mà không sử dụng phương trình vi phân chính tại biên của miền tính toán, và đặc biệt hơn là chúng bảo toàn được bậc 2 của cả sự xấp xỉ và độ chính xác. Ý tưởng chính dựa trên giả định về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm trơn trong một lân cận đủ nhỏ nào đó của miền xác định bài toán. Trong trường hợp này, các điều kiện biên được xấp xỉ với bậc hai trên mẫu hai nút. Nếu chúng ta giả sử rằng phương trình cũng có ý nghĩa tại các nút biên thì trong trường hợp này, các sơ đồ sai phân bậc 4 cũng có thể được xây dựng trên các lưới đều [10]. Hơn nữa, trong bài viết này chúng ta không thảo luận về các vấn đề về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm liên tục của bài toán trong một lân cận đủ nhỏ nào đó của miền xác định bài toán. Vấn đề này đáng được xem xét riêng, chẳng hạn như, dựa trên cơ sở của các định lý Cauchy–Picard nổi tiếng [11].

2. Kết quả sơ bộ

Giả sử Ω_h là tập hữu hạn các nút trong một miền đóng của không gian Ơ-clit *n* chiều và $x \in \Omega_h$ là một điểm của Ω_h. Xét phương trình có dạng

$$A(x)y(x)=\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x)} B(x,\xi)y(\xi)+F(x),\quad x\in\Omega_h, \tag{1}$$

được gọi là dạng chuẩn của sơ đồ sai phân [1]. Ở đây, $\mathcal{M}'(x)=\mathcal{M}(x)\setminus x$ và $\mathcal{M}(x)$ là một cấu trúc các nút của sơ đồ. Vì bất kì sơ đồ sai phân nào cũng có thể viết về dạng (1) nên tính đơn điệu của nó có thể được hiểu là sự thỏa mãn của các điều kiện dương sau đây

$$A(x)>0,\quad B(x,\xi)>0,\quad \forall\xi\in\mathcal{M}'(x), \tag{2}$$

$$D(x)=A(x)-\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x)} B(x,\xi)>0,\quad \forall\xi\in\mathcal{M}'(x). \tag{3}$$

Để nhận được đánh giá hai chiều đối với nghiệm của sơ đồ sai phân, có kết quả sau.

Bổ đề. (xem ở [12, 13]) *Giả sử các điều kiện dương* (2), (3) *đối với các hệ số được thỏa mãn. Khi đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nghiệm sơ đồ sai phân* (1) *sẽ nằm trong khoảng giá trị của dữ liệu ban đầu:*

$$\min_{x\in\Omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\le y(x)\le\max_{x\in\Omega_h}\frac{F(x)}{D(x)},\quad x\in\Omega_h. \tag{4}$$

Hệ quả. (xem ở [1]) *Giả sử các điều kiện dương* (2), (3) *được thỏa mãn. Khi đó, đối với nghiệm của sơ đồ sai phân* (1)*, đánh giá tiên nghiệm sau đây trên chuẩn C là đúng đắn:*

$$\|y\|_C=\max_{x\in\Omega_h}|y(x)|\le\left\|\frac{F}{D}\right\|_C.$$

3. Bài toán và sơ đồ sai phân

Trong hình chữ nhật $\bar{Q}=\{(x,t):\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ ta xem xét bài toán biên-ban đầu đối với phương trình parabol giả tuyến tính sau

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t), \tag{5}$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le l, \tag{6}$$

và điều kiện biên loại 3

$$\begin{aligned} &k(u(0,t))\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)-\sigma_1 u(0,t)=-\mu_1(t),\\ &-k(u(l,t))\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)-\sigma_2 u(l,t)=-\mu_2(t), \end{aligned} \tag{7}$$

ở đây $\sigma_2,\sigma_2=const>0.$

Giả sử rằng bài toán (5)-(7) tồn tại nghiệm duy nhất và có thể được mở rộng liên tục trong *h*-lân cận của miền xác định bài toán

$$\bar{Q}_h=\{(x,t):\ -h\le x\le l+h,\ 0\le t\le T\}.$$

Hơn nữa, giả sử tồn tại hai số thực k_1 and k_2 để điều kiện parabol của phương trình (5) trên nghiệm được thỏa mãn (theo định nghĩa của A. Friedman [11])

$$0<k_1\le k(u)\le k_2,\quad \forall u\in\bar{D}_u,$$

$$\bar{D}_u=\{u(x,t):\ m_1\le u(x,t)\le m_2,\ (x,t)\in\bar{Q}_h\},$$

với m_1 và m_2 là các hằng số được xác định bởi điều kiện sau

$$m_1=\min\left\{\min_{0\le t\le T}\left\{\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1},\frac{\mu_2(t)}{\sigma_2}\right\},\min_{-h\le x\le l+h}u_0(x)\right\}+T\min\left\{0,\inf_{(x,t)\in Q_T}f(x,t)\right\},$$

$$m_2=\max\left\{\max_{0\le t\le T}\left\{\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1},\frac{\mu_2(t)}{\sigma_2}\right\},\max_{-h\le x\le l+h}u_0(x)\right\}+T\max\left\{0,\sup_{(x,t)\in Q_T}f(x,t)\right\}.$$

Trên miền $\bar{Q}_h$ ta xây dựng lưới không gian không đều

$$\hat{\bar{\omega}}=\hat{\omega}_h\cup\gamma_h,\quad \hat{\omega}_h=\{x_i=x_{i-1}+h_i,\ i=1,2,...,N\},$$

$$\gamma_h=\left\{x_0=-\frac{h_1}{2}\ge -h,\ x_{N+1}=x_N+h_{N+1}=l+\frac{h_{N+1}}{2}\le l+h\right\},$$

và lưới đều theo biến thời gian

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t_n = n\tau,\ \ n = \overline{0, N_0},\ \ \tau N_0 = T \right\} = \omega_\tau \cup \{0\}.$$

Với sự giúp đỡ của đẳng thức vi phân

$$(ku')' = 0,5\Big((ku)'' + ku'' - k''u \Big)$$

ta xây dựng sơ đồ sai phân đơn điệu bậc 2 xấp xỉ trên mẫu sáu-điểm thông thường trong miền lưới không đều $\hat{\bar{\omega}} = \hat{\bar{\omega}}_h \times \omega_\tau$

$$y_{t(\beta_1\beta_2)} = A\hat{y} + \hat{\varphi}, \quad (x,t) \in \hat{\omega}, \tag{8}$$

$$y^0 = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{k(y_0)+k(y_1)}{2}\hat{y}_{\bar{x},1} - \sigma_1 \frac{\hat{y}_0 + \hat{y}_1}{2} = -\hat{\mu}_1,\ x = 0,\ \ t \in \omega_\tau, \\ &-\frac{k(y_N)+k(y_{N+1})}{2}\hat{y}_{\bar{x},N+1} - \sigma_2 \frac{\hat{y}_N + \hat{y}_{N+1}}{2} = -\hat{\mu}_2, \\ &x = l,\ t \in \omega_\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

ở đây

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n),\ \hat{y} = y_i^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}),\ \ t = t_n,\ \ x = x_i,$$

$$\hat{\varphi} = f(\bar{x}_i, t_{n+1}),\ \hat{\mu}_1 = \mu_1(t_{n+1}),\ \hat{\mu}_2 = \mu_2(t_{n+1}),\ \ y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau},$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{3} = x_i + \tilde{h}_i,\ \ \tilde{h}_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3},\ \ \hbar_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2},$$

$$A\hat{y} = 0,5\Big[\big(k(y)\hat{y}\big)_{\bar{x}\hat{x}} + k_{(\beta_1\beta_2)}(y)\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}(y)\hat{y}_{(\beta_3\beta_4)} \Big],$$

$$v_{\bar{x}\hat{x}} = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{\hbar_i},\ \ v_x = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}},\ \ v_{\bar{x}} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i},$$

$$v_{(\beta_k\beta_{k+1})} = \beta_{ki}v_{i+1} + \big(1 - \beta_{ki} - \beta_{k+1,i}\big)v_i + \beta_{k+1,i}v_{i-1},$$

$$\beta_{1i} = 0,5\Big(\big|\tilde{h}_i\big| + \tilde{h}_i \Big) / h_{i+1},\ \ \beta_{2i} = 0,5\Big(\big|\tilde{h}_i\big| - \tilde{h}_i \Big) / h_i,$$

$$\beta_{3i} = \frac{\tilde{h}_i k_{\bar{x}\hat{x}} - \big|\tilde{h}_i k_{\bar{x}\hat{x}}\big|}{2h_{i+1}k_{\bar{x}\hat{x}}}, \quad \beta_{4i} = -\frac{\tilde{h}_i k_{\bar{x}\hat{x}} + \big|\tilde{h}_i k_{\bar{x}\hat{x}}\big|}{2h_i k_{\bar{x}\hat{x}}}.$$

Các trọng số theo biến không gian $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$ được chọn sao cho thỏa mãn yêu cầu

$$v_{(\beta_k\beta_{k+1})} - v(\bar{x}_i) = O\big(\hbar_i^2\big),\ \ k = 1,3. \tag{11}$$

Từ yêu cầu này, ta nhận được điều kiện để xác định các trọng số như trên là

$$\beta_{ki}h_{i+1} - \beta_{k+1,i}h_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} = \tilde{h}_i,\ \ k = 1,3.$$

Để nhận được bậc 2 xấp xỉ tại điểm $(\bar{x}_i, t_n)$, ta phải xấp xỉ đạo hàm riêng theo thời gian bằng cách nội suy trên các nút lân cận.

Ta có thể viết lại toán tử $A\hat{y}$ theo cách sau đây

$$A\hat{y} = \big(a\hat{y}_{\bar{x}}\big)_x + \frac{\big(h_+\beta_1 k_x - h\beta_2 k_{\bar{x}}\big)\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}}{2} + \frac{\big(h_+\beta_3 \hat{y}_x - h\beta_4 \hat{y}_{\bar{x}}\big)k_{\bar{x}\hat{x}}}{2},$$

$$a = \frac{k + k_-}{2}, \quad h_+ = h_{i+1}, \quad h = h_i, \quad h_- = h_{i-1}.$$

Theo đó, trong trường hợp lưới đều theo biến thời gian, các hệ số $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$ sẽ bằng 0 và sơ đồ sai phân (8) sẽ trở thành sơ đồ sai phân hữu hạn bậc 2 xấp xỉ cổ điển đã biết.

4. Sai số xấp xỉ

Trong phần này, sẽ chứng minh sơ đồ (8)-(10) xấp xỉ bài toán (5)-(7) với sai số bậc 2 theo biến không gian tương ứng với nút $\bar{x}_i$ và bậc 1 theo biến thời gian, tức là cần phải chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\psi_i(\bar{x}_i, t_n) = A\hat{u} - u_{t(\beta_1\beta_2)} + \varphi = O\big(\hbar_i^2 + \tau\big), \\ &A\hat{u} = 0,5\Big[\big(k(u)\hat{u}\big)_{\bar{x}\hat{x}} + k_{(\beta_1\beta_2)}(u)\hat{u}_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\bar{x}\hat{x}}(u)\hat{u}_{(\beta_3\beta_4)} \Big]. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\hat{u}_{\bar{x}\hat{x},i} - \frac{\partial^2 u(\bar{x}_i, t_{n+1})}{\partial x^2} = O\big(\hbar_i^2\big). \tag{12}$$

Từ (12) suy ra

$$\big(k(u)\hat{u}\big)_{\bar{x}\hat{x},i} - \frac{\partial^2 \big(k(u)u\big)(\bar{x}_i, t_{n+1})}{\partial x^2} = O\big(\hbar_i^2 + \tau\big), \tag{13}$$

$$k_{\bar{x}\hat{x},i}(u) - \frac{\partial^2 k(\bar{x}_i)}{\partial x^2} = O\big(\hbar_i^2\big). \tag{14}$$

Từ (11) nhận được

$$u_{t(\beta_1\beta_2)} - \frac{\partial u(\bar{x}_i, t_{n+1})}{\partial t} = O\big(\hbar_i^2 + \tau\big), \tag{15}$$

$$k_{(\beta_1\beta_2)}(u) - k(\bar{u}_i) = O\big(\hbar_i^2\big),\ \ \bar{u}_i = u(\bar{x}_i). \tag{16}$$

Từ (12)-(16), ta chứng minh được $\psi_i(\bar{x}_i, t_n) = O\big(\hbar_i^2 + \tau\big)$.

Ngoài ra, đối với các nút ở biên, sử dụng khai triển hàm số theo công thức Taylor, dễ dàng thấy được

$$\psi_0(0, t_n) = \frac{k(u_0)+k(u_1)}{2}\hat{u}_{\bar{x},1} - \sigma_1 \frac{\hat{u}_0 + \hat{u}_1}{2} + \hat{\mu}_1 = O\big(h_1^2 + \tau\big),$$

$$\begin{aligned} \psi_{N+1}(l, t_n) &= -\frac{k(u_N)+k(u_{N+1})}{2}\hat{u}_{\bar{x},N+1} - \sigma_2 \frac{\hat{u}_N + \hat{u}_{N+1}}{2} + \hat{\mu}_2 \\ &= O\big(h_{N+1}^2 + \tau\big). \end{aligned}$$

Như vậy, định lý sau đây đã được chứng minh.

Định lý 1. *Sơ đồ sai phân* (8)-(10) *xấp xỉ bài toán vi phân ban đầu* (5)-(7) *trên lưới không đều bất kỳ theo thời gian với bậc* 2 *theo biến không gian và bậc* 1 *theo biến thời gian sao cho*

$$\max_{t \in \omega_\tau} \|\psi\|_{\bar{C}} \le M\big(\bar{h}^2 + \tau\big), \quad \bar{h} = \max_i h_i,$$

$$\|\ .\ \|_{\bar{C}} = \max_{x \in \hat{\bar{\omega}}_h} |\ .\ |, \quad M = const > 0.$$

5. Tính đơn điệu, đánh giá hai phía, và đánh giá tiên nghiệm trên chuẩn *C*

Sơ đồ (8)-(10) được viết lại dưới dạng chuẩn (1) như sau

$$\begin{aligned} &A_i\hat{y}_{i-1} - C_i\hat{y}_i + B_i\hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1,2,...,N, \\ &-C_0\hat{y}_0 + B_0\hat{y}_1 = -F_0, \quad A_{N+1}\hat{y}_N - C_{N+1}\hat{y}_{N+1} = -F_{N+1}, \end{aligned}$$

ở đây các hệ số *A*, *B*, *C* được tính theo công thức

$$A_i = -\beta_2 + \frac{\tau}{2}\left(\frac{k_{(\beta_1\beta_2)}(y) + k(y_{i-1})}{\hbar_i h_i} - \beta_4 k_{\bar{x}\hat{x}}(y) \right),$$

$$B_i = -\beta_1 + \frac{\tau}{2}\left(\frac{k_{(\beta_1\beta_2)}(y)+k(y_{i+1})}{\hbar_i h_{i+1}} - \beta_3 k_{\bar{x}\hat{x}}(y)\right),$$

$$C_i = 1 + A_i + B_i,\ F_i = y_{(\beta_1\beta_2)} + \tau\hat{\varphi},\ D_i = C_i - A_i - B_i = 1,$$

$$C_0 = \frac{k(y_0)+k(y_1)}{2h_1} + \frac{\sigma_1}{2},\quad B_0 = \frac{k(y_0)+k(y_1)}{2h_1} - \frac{\sigma_1}{2},$$

$$F_0 = \hat{\mu}_1,\quad D_0 = C_0 - B_0 = \sigma_1,$$

$$C_{N+1} = \frac{k(y_N)+k(y_{N+1})}{2h_{N+1}} + \frac{\sigma_2}{2},\ A_{N+1} = \frac{k(y_N)+k(y_{N+1})}{2h_{N+1}} - \frac{\sigma_2}{2},$$

$$F_{N+1} = \hat{\mu}_2,\quad D_{N+1} = C_{N+1} - A_{N+1} = \sigma_2.$$

Sơ đồ sai phân hữu hạn (8)-(10) sẽ đơn điệu nếu các điều kiện dương của hệ số (2)-(3) được thỏa mãn, có nghĩa là

$$A_i > 0,\quad B_i > 0,\quad D_i = 1 - A_i - B_i > 0. \tag{17}$$

Để chứng minh tính đơn điệu, ta cần phải tìm điều kiện để $y_i^n \in \bar{D}_u$ với mọi giá trị $i = 0,1,...,N+1$ và $n = 0,1,...,N_0$. Với $n = 0$, rõ ràng $y_i^0 = u_0(x_i) \in \bar{D}_u$ với mọi $i = \overline{0, N+1}$. Theo quy nạp, giả sử rằng với *n* bất kỳ, $y_i^n \in \bar{D}_u$ là đúng đắn, cần chứng minh $y_i^{n+1} \in \bar{D}_u$ cũng đúng. Để đơn giản, ta sử dụng kí hiệu không có chỉ số *i* và *n*. Khi đó, đối với trường hợp $\tilde{h} > 0$, $k_{\bar{x}\hat{x}} > 0$ (trường hợp tầm thường $\tilde{h} = 0$ và $k_{\bar{x}\hat{x}} = 0$ không được xem xét ở đây) ta nhận được các giá trị cụ thể của các trọng số không gian

$$\beta_1 = \tilde{h}/h_+ > 0,\ \beta_2 = \beta_3 = 0,\ \beta_4 = -\tilde{h}/h < 0,$$

$$k_{(\beta_1\beta_2)}(y) = \frac{\tilde{h}}{h_+}k(y_+) + \left(1 - \frac{\tilde{h}}{h_+}\right)k(y)$$

$$= \frac{\tilde{h}}{h_+}k(y_+) + \frac{2h_+ + h}{3h_+}k(y) > 0,$$

$$-\beta_4 k_{\bar{x}\hat{x}}(y) = \frac{\tilde{h}}{h}k_{\bar{x}\hat{x}}(y) > 0,$$

từ đó suy ra $A > 0$ và

$$B = -\frac{\tilde{h}}{h_+} + \tau\frac{\left(1+\frac{\tilde{h}}{h_+}\right)k(y_+) + \left(1-\frac{\tilde{h}}{h_+}\right)k(y)}{2\hbar h_+}.$$

Vì $\left|\frac{\tilde{h}}{h_+}\right| < 1$, nên $B > -\frac{h_+ - h}{3h_+} + \frac{2\tau k_1}{h_+(h+h_+)}$. Do đó, $B > 0$ với $\tau \ge \left|h_+^2 - h^2\right|/(6k_1)$. Các trường hợp còn lại của $\tilde{h},\ k_{\bar{x}\hat{x}}$ được xét tương tự. Tóm lại, các bất đẳng thức

$$\tau \ge \frac{\left\|h_+^2 - h^2\right\|_C}{6k_1}, \tag{18}$$

$$h_1 < \frac{2k_1}{\sigma_1},\quad h_{N+1} < \frac{2k_1}{\sigma_2}, \tag{19}$$

đảm bảo sự thỏa mãn các điều kiện dương của hệ số (2)-(3), (17) (nghĩa là sơ đồ (8)-(10) đơn điệu). Trong đó, hai bất đẳng thức (19) đảm bảo tính dương của $B_0,\ A_{n+1}$. Trên cơ sở đánh giá (4), với $t = t_n \in \omega_\tau$ và với mọi $i = 0,1,...,N+1$ ta có

$$\min\left\{\frac{\mu_1^{n+1}}{\sigma_1}, \frac{\mu_2^{n+1}}{\sigma_2}, \min_{0\le i\le N+1}\left(y_{(\beta_1\beta_2)}^n + \tau\varphi_i^{n+1}\right)\right\} \le$$
$$\le y_i^{n+1} \le \max\left\{\frac{\mu_1^{n+1}}{\sigma_1}, \frac{\mu_2^{n+1}}{\sigma_2}, \max_{0\le i\le N+1}\left(y_{(\beta_1\beta_2)}^n + \tau\varphi_i^{n+1}\right)\right\}. \tag{20}$$

Truy hồi theo *n* đối với bất đẳng thức (20) và sử dụng các bất đẳng thức

$$\min_{1\le i\le N-1} y_{(\beta_1\beta_2)}^n \ge \min_{1\le i\le N-1} y_i^n,\ \max_{1\le i\le N-1} y_{(\beta_1\beta_2)}^n \le \max_{1\le i\le N-1} y_i^n$$

(vì các trọng số $\beta_1,\ \beta_2 \ge 0$ không âm) ta nhận được đánh giá hai phía đối với nghiệm của sơ đồ (8)-(10) thông qua dữ liệu đầu vào mà không cần giả thiết gì về dấu của nó

$$m_1^{n+1} \le y_i^{n+1} \le m_2^{n+1},\quad i = \overline{1, N+1}, \tag{21}$$

ở đây

$$m_1^{n+1} = \min\left\{\min_{0\le t\le T}\left\{\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1}, \frac{\mu_2(t)}{\sigma_2}\right\}, \min_{-h\le x\le l+h} u_0(x)\right\}$$
$$+\ t_{n+1}\min\left\{0, \inf_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\} \ \ge\ m_1,$$

$$m_2^{n+1} = \max\left\{\max_{0\le t\le T}\left\{\frac{\mu_1(t)}{\sigma_1}, \frac{\mu_2(t)}{\sigma_2}\right\}, \max_{-h\le x\le l+h} u_0(x)\right\}$$
$$+\ t_{n+1}\max\left\{0, \sup_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\} \ \le\ m_2.$$

Từ đánh giá (21) suy ra $y_i^{n+1} \in \bar{D}_u$ với mọi $i = \overline{0, N+1}$.

Vậy định lý sau đây đã được chứng minh.

Định lý 2. *Giả sử các điều kiện* (18), (19) *được thỏa mãn. Khi đó, sơ đồ sai phân hữu hạn* (8)-(10) *là đơn điệu có điều kiện, nghiệm của nó thuộc vào miền giá trị của nghiệm chính xác* $y \in \bar{D}_u$ *và đánh giá hai chiều dạng* (21) *là đúng.*

Trên cơ sở hệ quả của nguyên lý cực đại, đánh giá tiên nghiệm trên chuẩn *C* được phát biểu như sau

Định lý 3. *Giả sử các điều kiện* (18), (19) *được thỏa mãn. Khi đó, đối với nghiệm của sơ đồ sai phân hữu hạn* (8)-(10) *đánh giá tiên nghiệm sau đây là đúng đắn*

$$\left\|y(t_{n+1})\right\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\max_{t\in\omega_\tau}\left\{\frac{|\mu_1(t)|}{\sigma_1}, \frac{|\mu_2(t)|}{\sigma_2}\right\}, \|u_0\|_{\bar{C}}\right\}$$
$$+\ T\max_{t\in\omega_\tau}\|f(t)\|_{\bar{C}}. \tag{22}$$

Chứng minh. Từ hệ quả, ta có

$$\left\|y^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\frac{|\mu_1^{n+1}|}{\sigma_1}, \frac{|\mu_2^{n+1}|}{\sigma_2}, \|F^n\|_{\bar{C}}\right\}$$
$$\le \max\left\{\frac{|\mu_1^{n+1}|}{\sigma_1}, \frac{|\mu_2^{n+1}|}{\sigma_2}, \left\|y_{(\beta_1\beta_2)}^n + \tau\varphi^{n+1}\right\|_{\bar{C}}\right\}.$$

Vì $\beta_1,\ \beta_2 \ge 0$, nên

$$\left\| y^n_{(\beta_1\beta_2)} + \tau\varphi^{n+1} \right\|_{\bar C} \le \left\| y^n_{(\beta_1\beta_2)} \right\|_{\bar C} + \tau \left\|\varphi^{n+1}\right\|_{\bar C} \le \left\| y^n \right\|_{\bar C} + \tau\left\|\varphi^{n+1}\right\|_{\bar C}.$$

Do đó, ta nhận được một chuỗi mối quan hệ

$$\left\| y^{n+1} \right\|_{\bar C} \le \max\left\{ \frac{\left|\mu_1^{n+1}\right|}{\sigma_1}, \frac{\left|\mu_2^{n+1}\right|}{\sigma_2}, \left\| y^n \right\|_{\bar C} + \tau\left\|\varphi^{n+1}\right\|_{\bar C} \right\} \le$$

$$\le \max\left\{ \frac{\left|\mu_1^{n+1}\right|}{\sigma_1}, \frac{\left|\mu_2^{n+1}\right|}{\sigma_2}, \max\left\{ \frac{\left|\mu_1^{n+1}\right|}{\sigma_1}, \frac{\left|\mu_2^{n+1}\right|}{\sigma_2} \right\} + \right.$$

$$\left. + \tau\left\|\varphi^{n+1}\right\|_{\bar C}, \left\| y^{n-1} \right\|_{\bar C} + \tau\left(\left\|\varphi^{n}\right\|_{\bar C} + \left\|\varphi^{n+1}\right\|_{\bar C} \right) \right\} \le$$

$$\le \ldots \le$$

$$\le \max\left\{ \max_{1\le k\le n+1}\left\{ \frac{\left|\mu_1^{k}\right|}{\sigma_1}, \frac{\left|\mu_2^{k}\right|}{\sigma_2} \right\} + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\varphi^{k+1}\right\|_{\bar C}, \left\| y^0 \right\|_{\bar C} + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\varphi^{k+1}\right\|_{\bar C} \right\}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$\max_{1\le k\le n+1}\left\{ \frac{\left|\mu_1^{k}\right|}{\sigma_1}, \frac{\left|\mu_2^{k}\right|}{\sigma_2} \right\} \le \max_{t\in\omega_\tau}\left\{ \frac{\left|\mu_1(t)\right|}{\sigma_1}, \frac{\left|\mu_2(t)\right|}{\sigma_2} \right\},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\varphi^{k+1}\right\|_{\bar C} \le t_{n+1}\max_{t\in\omega_\tau}\left\| f(t) \right\|_{\bar C},$$

ta nhận được đánh giá (22). Định lý được chứng minh.□

Nhận xét. *Nếu lưới theo biến không gian là đều, thì các đánh giá* (21), (22) *sẽ đúng mà không cần phải thỏa mãn các điều kiện* (18), (19) (*khi đó ta sẽ nói rằng, sơ đồ* (8)-(10) *là đơn điệu không có điều kiện*).

6. Thực nghiệm số

Trong phần này, ta sẽ kiểm chứng lại lý thuyết được chứng minh ở trên bằng thực nghiệm.

Trong miền $\bar Q = \{(x,t):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le 1\}$ ta giải số hai bài toán sau đây:

Bài toán 1:

$$u(x,t) = \exp\left(x^2 + \frac{t}{10} \right),\quad \sigma_1 = 1,\quad \sigma_2 = 2,\quad k(u) = (1+u)^2,$$

Bài toán 2:

$$u(x,t) = \sin(2x+10t),\ \ \sigma_1 = 0,2;\ \ \sigma_2 = 0,1;\ \ k(u) = u^2 + 1.$$

Vế phải $f(x,t),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)$ và điều kiện ban đầu $u_0(x)$ trong bài toán (5)-(7) được xác định bằng cách thay nghiệm chính xác $u(x,t)$ vào nó. Ban đầu, lưới không đều theo biến không gian được cho theo cách ngẫu nhiên. Để thấy được sơ đồ sai phân (8)-(10) hội tụ với tốc độ $O\left(h^2+\tau\right)$ ta sẽ giảm dần từng khoảng theo hệ số 2 và 4 theo biến không gian và thời gian tương ứng. Việc tăng số nút của lưới không gian được thực hiện bằng công thức $x_{2i} = (0,375+r)x_{i+1} + (0,625-r)x_i$, ở đây $r\in[0;\,0,25)$ là đại lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn. Đầu tiên, chúng ta tính $D_N = \left\| y-u \right\|_{\bar C}$ trong trường hợp N nút. Sau đó, chúng ta tăng số nút không gian lên gấp đôi và nhận được $D_{2N} = \left\| y-u \right\|_{\bar C}$. Khi đó, tốc độ hội tụ thực nghiệm của sai số xấp xỉ được xác định bằng công thức $R^N = \log_2\dfrac{D_N}{D_{2N}}$.

Các nút không gian ban đầu với $h_1 = 0,04$, $h_{N+1} = 0,025$, $h_{\max} = 0,3$, $h_{\min} = 0,025$ và được biểu diễn ở Hình 1.

***Hình 1.** Lưới không đều theo biến không gian ban đầu*

***Bảng 1.** Kết quả nghiệm số của bài toán 1*

N	N_0	$h_{\max}$	$h_{\min}$	h_1	h_{N+1}	$\left\|y-u\right\|_{\bar C}$	R^N
11	10	0,2	0,025	0,04	0,025	1,30738	-
21	40	0,1245	0,010949	0,02092	0,0109	0,46179	1,50
41	160	0,0620	0,006065	0,011045	0,007449	0,143918	1,68
81	640	0,033294	0,002382	0,004698	0,002495	0,038833	1,89
161	2560	0,017158	0,000855	0,002604	0,002177	0,009526	2,03

***Bảng 2.** Kết quả nghiệm số của bài toán 2*

N	N_0	$h_{\max}$	$h_{\min}$	h_1	h_{N+1}	$\left\|y-u\right\|_{\bar C}$	R^N
11	10	0,2	0,025	0,04	0,025	0,723434	-
21	40	0,102114	0,011587	0,015336	0,015304	0,202498	1,83
41	160	0,061668	0,006081	0,010350	0,006081	0,052679	1,94
81	640	0,034649	0,002512	0,005379	0,002840	0,013319	1,98
161	2560	0,018623	0,001127	0,001887	0,001606	0,003339	1,99

Ở bài toán 1, miền giá trị của nghiệm chính xác là $1\le u(x,t)\le 3,00417$ và $0<4\le k(u)\le 16,0333$. Với số nút không gian ban đầu $N=11$ và số nút thời gian ban đầu $N_0 = 11$ tương ứng với $\tau = 0,1$, các điều kiện (18), (19) lần lượt là $\tau\ge 0,00125$, $h_1 < 8$, $h_{N+1} < 4$ và chúng đều được thỏa mãn. Khi số nút không gian tăng lên thì điều kiện (18) cũng sẽ thay đổi. Tương tự ở bài toán 2, dễ dàng xác định được $-1\le u(x,t)\le 1$, $0<1\le k(u)\le 2$. Kết quả nghiệm số của bài toán 1 và 2 lần lượt được cho ở Bảng 1 và Bảng 2. Qua đó, ta nhận thấy rằng, với bước nhảy không gian và thời gian đủ nhỏ $h\le h_0,\ \tau\le\tau_0$ thì thỏa mãn

$$\left\| y-u \right\|_{\bar C} \le c\left(h^2+\tau\right),\quad c>0-const.$$

Tốc độ hội tụ bậc $O\left(h^2+\tau\right)$ đạt được trên lưới không đều.

7. Kết luận

Trong bài báo này, với sự hỗ trợ của đẳng thức vi phân, tác giả đã đề xuất một sơ đồ sai phân hữu hạn đơn điệu mới có bậc hai xấp xỉ đối với các biến không gian trên lưới không đều, sơ đồ này xấp xỉ bài toán biên-ban đầu đối với phương trình parabol giả tuyến tính có biên điều kiện loại ba dựa trên giả định về sự tồn tại và duy nhất của nghiệm trơn trong một lân cận đủ nhỏ nào đó của miền xác định bài toán. Một nhược điểm đáng kể của phương pháp này là không thể áp dụng nó trong trường hợp dữ liệu đầu vào không trơn và không thể có được thông tin tiên nghiệm về nghiệm gần đúng tại các nút giả nằm ngoài miền xác định của bài toán. Dưới sự đáp ứng của một số điều kiện trên lưới, các đánh giá hai phía và đánh giá tiên nghiệm trên chuẩn *C* của nghiệm sai phân được thiết lập. Các ví dụ số cho thấy rằng, sơ đồ sai phân mới được xây dựng có tốc độ hội tụ $O\left(h^2+\tau\right)$ trên lưới không đều với bước nhảy không gian và thời gian đủ nhỏ $h \le h_0,\ \tau \le \tau_0$.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng trong đề tài có mã số B2020-DN04-39.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*. Marcel Dekker, New York, Basel, 2001.

[2] A. A. Samarskii, and A. A. Gulin, *Numerical Methods.* Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).

[3] P. P. Matus, V. T. K. Tuyen, and F. J. Gaspar, "Monotone difference schemes for linear parabolic equation with mixed boundary conditions", *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 58, no. 5, pp. 18–22, 2014 (in Russian).

[4] I. Farago, and R. Horvath, "Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems", *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 28, no. 6, pp. 2313–2336, 2006.

[5] A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, and P. P.Matus, "Difference schemes of increased order of accuracy on non-uniform grids", *Differ. Uravn.*, vol. 32, pp. 265–274, 1996 (in Russian).

[6] A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, and P. P. Matus, "Second-order accurate finite-difference schemes on nonuniform grids", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 38, pp. 399–410, 1998.

[7] A. A. Samarskii, V. I. Mazhukin, and P. P. Matus, "Difference schemes on non-uniform grids for two dimensional parabolic equations", *Differ. Uravn.*, vol. 34, pp. 269–280, 1998 (in Russian).

[8] V. B. Andreev, "About convergence of difference schemes with splitting operator approximating the third boundary-value problem", *Zh. Vychisl.Mat. Mat. Fiz.*, vol. 9, pp. 337–349, 1969 (in Russian).

[9] I. V. Frjazinov, "About difference approximation of boundary conditions for the third boundary value problem", *Zh. Vychisl.Mat. Mat. Fiz.*, vol. 4, pp. 1106–1112, 1964 (in Russian).

[10] P. P. Matus, "Monotone schemes of a higher order of accuracy for differential problems with boundary conditions of the second and third kind", *Comput. Meth. Appl. Math.*, vol. 2, pp. 378–391, 2002.

[11] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[12] P. P. Matus, L. M. Hieu, and L. G. Vulkov, "Maximum principle for finite-difference schemes with non signconstant input data", *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 59, no. 5, pp. 13–17, 2015 (in Russian).

[13] P. P. Matus, L. M. Hieu, and L. G. Vulkov, "Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 310, pp. 186–199, 2017.