MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VỀ LỖI PHÂN LỚP ĐỐI VỚI BÀI TOÁN PHÂN LỚP NHỊ PHÂN

SOME INEQUALITIES ON CLASSIFICATION ERRORS FOR BINARY CLASSIFICATION

Tôn Thất Tú*

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam[1]

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: tttu@ued.udn.vn

(Nhận bài / Received: 10/12/2023; Sửa bài / Revised: 31/01/2024; Chấp nhận đăng / Accepted: 02/02/2024)

Tóm tắt - Bài toán phân lớp nhị phân là một bài toán cơ bản trong bài toán phân lớp thuộc nhóm các thuật toán học có giám sát. Người ta sử dụng một hàm phân loại để gán một điểm dữ liệu với một trong 2 lớp đã cho dựa trên một tập dữ liệu khảo sát được đã được gán nhãn. Hành động này có thể mắc sai lầm nếu việc gán nhãn cho các điểm dữ liệu không chính xác. Có nhiều thuật toán khác nhau đã được nghiên cứu liên quan đến bài toán phân lớp nhị phân. Để đo lường chất lượng của hàm phân lớp, người ta đưa ra một số khái niệm về lỗi mắc phải khi tiến hành phân lớp. Ở bài báo này, tác giả nghiên cứu và xây dựng một số bất đẳng thức để đánh giá về lỗi phân lớp trong bài toán phân lớp nhị phân.

Từ khóa - Phân lớp; nhị phân; lỗi phân lớp; bất đẳng thức; học máy thống kê.

Abstract - The binary classification problem is a basic problem in the classification problem of the group of supervised learning algorithms. One uses a classification function to assign a data point to one of two given classes based on a labeled collected data set. This action can be erroneous if the labeling of data points is incorrect. There are many different algorithms that have been studied related to the binary classification problem. To measure the quality of the classification function, people introduce some concepts about the errors made when performing classification. In this article, the author researches and builds a number of inequalities to evaluate the classification errors in the binary classification problem.

Key words - Classification; binary; classification error; inequality; statistical machine learning.

1. Giới thiệu

Bài toán phân lớp nhị phân là bài toán cơ bản, được nhiều tác giả nghiên cứu về cách thức tiếp cận cũng như đánh giá chất lượng của các thuật toán [1, 2, 3]. Giả sử (X,Y) là một cặp biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbf{R}^d \times \{0,1\}$. Để mô tả phân phối của (X,Y) ta có thể sử dụng cặp giá trị (μ,η), trong đó μ là độ đo xác suất sinh bởi biến ngẫu nhiên X và η là hàm hồi quy của Y theo X, tức là

$$\mu(A) = P(X \in A) \text{ với A là tập Borel trên } \mathbf{R}^d,$$

$$\eta(x) = P(Y=1 \mid X=x) = E(Y \mid X=x), x \in \mathbf{R}^d.$$

Một hàm $g:\mathbf{R}^d \to \{0,1\}$ được gọi là *một hàm phân lớp* (classifier, decision function) và giá trị

$$L(g) = P(g(X) \neq Y)$$

được gọi là *xác suất lỗi* (error probability, misclassification error) của hàm phân lớp g.

Để tính được giá trị của $L(g)$ ta cần phải biết phân phối chính xác của (X,Y). Tuy nhiên, trên thực tế ta thường không biết được thông tin này. Thông tin mà ta biết được thường là dữ liệu được thu thập từ (X,Y). Nếu $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$ là một mẫu ngẫu nhiên của (X,Y) thì giá trị

$$L_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{g(X_i)\neq Y_i\}}$$

được gọi là *xác suất lỗi thực nghiệm* (empirical error probability) của hàm phân lớp g.

Kí hiệu $g^*(x) = \begin{cases} 1, & \eta(x) > 1/2 \\ 0, & \eta(x) \leq 1/2 \end{cases}$

và $L^* = L(g^*) = P(g^*(X) \neq Y).$

Định lý 1. [2] Với mọi hàm phân lớp $g:\mathbf{R}^d \to \{0,1\}$ ta luôn có:

$$P(g^*(X) \neq Y) \leq P(g(X) \neq Y),$$

tức là g^* là hàm phân lớp tối ưu.

Hàm g^* được gọi là *hàm phân lớp Bayes* và giá trị L^* được gọi là *xác suất lỗi Bayes*.

Với $x \in \mathbf{R}^d$ ta có

$$\begin{aligned} P(g(X)\neq Y \mid X=x) &= 1 - P(g(X)=Y \mid X=x) \\ &= 1 - [P(Y=1, g(x)=1 \mid X=x) \\ &\quad + P(Y=0, g(x)=0 \mid X=x)] \\ &= 1 - [I_{\{g(x)=1\}} P(Y=1 \mid X=x) \\ &\quad + I_{\{g(x)=0\}} P(Y=0 \mid X=x)] \\ &= 1 - [I_{\{g(x)=1\}}\eta(x) + I_{\{g(x)=0\}}(1-\eta(x))]. \end{aligned}$$

Do đó,

$$L(g) = 1 - E(I_{\{g(X)=1\}}\eta(X) + I_{\{g(X)=0\}}(1-\eta(X)))$$

và

$$\begin{aligned} L^* = L(g^*) &= 1 - E(I_{\{\eta(X)>1/2\}}\eta(X) + I_{\{\eta(X)\leq 1/2\}}(1-\eta(X))) \\ &= E\min\{\eta(X), 1-\eta(X)\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E\,|2\eta(X)-1|. \end{aligned}$$

[1] The University of Danang – University of Science and Education, Danang, Vietnam (Ton That Tu)

Ngoài việc sử dụng $L(g)$ để đo xác suất mắc sai lầm khi phân lớp, người ta còn sử dụng các hàm sau để đo "khoảng cách" giữa hai lớp [2]:

i) Khoảng cách Kolmogorov:

$$\delta_{KO} = \frac{1}{2}E\,|\,P(Y=1\,|\,X) - P(Y=0\,|\,X)\,| = \frac{1}{2}E\,|\,2\eta(X)-1\,|.$$

ii) Lỗi phân lớp tiệm cận cho "phương pháp người láng giềng":

$$L_{NN} = E(2\eta(X)(1-\eta(X))).$$

iii) Lỗi Matsushita:

$$\rho = E\left(\sqrt{\eta(X)(1-\eta(X))}\right).$$

iv) Entropy có điều kiện trung bình:

$$\mathrm{E} = -E(\eta(X)\ln\eta(X) + (1-\eta(X))\ln(1-\eta(X))).$$

v) Độ khác biệt Jeffrey:

$$J = E\left[(2\eta(X)-1)\ln\left(\frac{\eta(X)}{1-\eta(X)}\right)\right].$$

Dễ thấy rằng, $L^* = \frac{1}{2} - \delta_{KO}$. Điều này có nghĩa nếu xác suất lỗi Bayes giảm thì khoảng cách Kolomogov δ_{KO} sẽ tăng dần tiến đến $1/2$ và ngược lại.

2. Kết quả chính

Xét các hàm $f, g, h, e, j : [0,1] \to \mathbf{R}$ xác định như sau:

$$f(x) = \min\{x, 1-x\},\ g(x) = 2x(1-x),\ h(x) = \sqrt{x(1-x)},$$

$$e(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x),\ \ j(x) = (2x-1)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Dễ thấy rằng, với mọi $x \in [0,1]$ ta luôn có:

$$f(x) \le \min\{h(x),\ g(x)\}.$$

Bổ đề 1: Với $x \in [0,1]$ ta luôn có:

a) $\sqrt{2}\left|x - \frac{1}{2}\right|\sqrt{f(x)} \le |h(x) - f(x)| \le 2\left|x - \frac{1}{2}\right| h(x).$

b) $e(x) \ge 2\ln 2\, g(x).$

Chứng minh: Vì với mọi $x \in [0,1]$ ta luôn có

$$e(x) = e(1-x),\ f(x) = f(1-x),\ g(x) = g(1-x)$$

và $h(x) = h(1-x)$ nên ta chỉ cần chỉ ra các bất đẳng thức trên đúng với $x \in [0,1/2]$.

a) Với $x \in [0,1/2]$ bất đẳng thức ở phía trái trở thành:

$$|h(x) - f(x)| \ge \sqrt{2}\left|x - \frac{1}{2}\right|\sqrt{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\right| \ge \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1-2x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ge 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $x \in [0,1/2]$ và $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} \le \sqrt{2}.$

Tương tự, bất đẳng thức ở phía phải được biến đổi như sau:

$$|h(x) - f(x)| \le 2\left|x - \frac{1}{2}\right| h(x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left|\sqrt{1-x} - x\right| \le (1-2x)\sqrt{x(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}(1-2x)}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{1-x+\sqrt{x(1-x)}} - 1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(1-2x)\left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}\left(1-x+\sqrt{x(1-x)}\right)} \le 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $x \in [0,\ 1/2].$

b) Với $x \in [0,\ 1/2]$ đặt $l(x) = e(x) - 2\ln 2\, g(x).$ Lúc đó,

$$l'''(x) = \frac{1-2x}{x^2(1-x)^2} \ge 0, \forall\, x \in [0,\ 1/2]$$

nên $l'(x)$ là hàm lồi trên $[0,\ 1/2].$ Mặt khác, ta lại có

$$\lim_{x\to 0^+} l'(x) = +\infty,\quad l'(1/2) = 0,\ l'(1/4) = \ln(3/4) < 0$$

nên tồn tại duy nhất $x_0 \in (0,\ 1/2)$ sao cho $l'(x_0) = 0.$ Từ đó suy ra

$$l(x) \ge \min\{l(0),\ l(1/2)\} = 0,\ \forall x \in [0,\ 1/2].$$ ■

Bổ đề 2. Với mọi $x \in (0,1)$ và $n \in \mathbf{N}^*$ ta luôn có

$$e(x) \le \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{k(2k-1)}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Chứng minh: Với $n \ge 1$ đạo hàm cấp n của $e(x)$ bằng:

$$e^{(n)}(x) = \begin{cases} -\ln x + \ln(1-x), & n = 1 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{x^{n-1}} - \dfrac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}, & n > 1 \end{cases}$$

Từ đó, suy ra $n \ge 1$ ta có:

$$e^{(n)}(1/2) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ -2^{2k}(2k-2)!, & n = 2k \end{cases} \quad \text{với } k \in \mathbf{N}^*.$$

Theo công thức khai triển Taylor [4] với mọi $x \in (0,\ 1)$ tồn tại θ nằm giữa $1/2$ và x sao cho:

$$e(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{e^{(k)}(1/2)}{k!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^k + \frac{e^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

Vì $\theta \in (0,\ 1)$ nên $\dfrac{e^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{2n+2} \le 0.$

Do đó, với mọi $x \in (0,\ 1)$

$$e(x) \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{e^{(k)}(1/2)}{k!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^k = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{k(2k-1)}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Bổ đề được chứng minh. ■

Bổ đề 3. Với mọi $x \in (0,1)$ và $n \in \mathbf{N}^*$ ta luôn có

$$j(x) \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k+1}}{2k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Chứng minh: Với $n \ge 1$ đạo hàm cấp n của $\ln(x/(1-x))$ bằng:

$$\left(\ln(x/(1-x))\right)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} - \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n},\ x \in (0,1).$$

Từ đó, với $n \ge 2$ sử dụng công thức đạo hàm của tích ta có:

$$\begin{aligned} j^{(n)}(x) &= (2x-1)\left(\ln(x/(1-x))\right)^{(n)} \\ &\quad + 2n\left(\ln(x/(1-x))\right)^{(n-1)} \\ &= \frac{(n-2x+1)(n-2)!}{(1-x)^n} \\ &\quad + \frac{(-1)^n(n-2x+1)(n-2)!}{x^n}, \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$j^{(n)}(1/2) = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ 2^{n+1} n(n-2)!, & n = 2k \end{cases} \quad \text{với } k \in \mathbf{N}^*.$$

Lúc đó, sử dụng khai triển Taylor [1] với mọi $x \in (0,1)$ tồn tại θ nằm giữa $1/2$ và x sao cho:

$$j(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{j^{(k)}(1/2)}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{j^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

Vì $\theta \in (0,1)$ nên $\dfrac{j^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^{2n+2} \ge 0.$

Do đó, với mọi $x \in (0,1)$

$$j(x) \ge \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{j^{(k)}(1/2)}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k+1}}{2k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Bổ đề được chứng minh. ■

Định lý 1. Độ lệch $\rho - L^*$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\delta_{KO} - 2E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|^2 \le \left|\rho - L^*\right| \le \delta_{KO}\sqrt{1-4\delta_{KO}^2}.$$

Chứng minh: Từ Bổ đề 1 ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\sqrt{f(\eta(X))} \\ &\qquad \le \left|\rho - L^*\right| \le 2E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right| h(\eta(X)). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen [5], ta được:

$$\begin{aligned} E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right| h(\eta(X)) &= E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\sqrt{\frac{1}{4}-\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|^2} \\ &\le E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\sqrt{\frac{1}{4}-\left(E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\right)^2} \\ &= \delta_{KO}\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_{KO}^2}. \end{aligned}$$

Mặt khác, vì $x\sqrt{\dfrac{1}{2}-x} \ge \sqrt{2}\,x\left(\dfrac{1}{2}-x\right), \forall x \in [0, 1/2]$ nên

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\sqrt{f(\eta(X))} \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{E}\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\sqrt{\frac{1}{2}-\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|} \\ &\ge 2\,\mathrm{E}\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\left(\frac{1}{2}-\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\right) \\ &= \delta_{KO} - 2E\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|^2. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. ■

Định lý 2. Giá trị entropy thỏa mãn bất đẳng thức:

$$E \ge 2\ln 2\, L_N.$$

Nói riêng, $E \ge 4\ln 2\, L^*(1-L^*)$.

Chứng minh: Bất đẳng thức được suy ra trực tiếp từ Bổ đề 1 và nhận xét:

$$x(1-x) = \min\{x, 1-x\}(1-\min\{x,1-x\}), \forall x \in [0, 1]. \ ■$$

Định lý 3. Entropy và độ khác biệt Jeffrey thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$E \le \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{k(2k-1)}\left(L^*-\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

Và $$J \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k+1}}{2k-1}\left(L^*-\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

Chứng minh: Với $x \in (0,1)$ ta luôn có:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\min\{x, 1-x\}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Do đó, từ Bổ đề 2 và bất đẳng thức Jensen [5] ta có:

$$\begin{aligned} E = E\,e(\eta(X)) &\le \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{k(2k-1)} E\left(\eta(X)-\frac{1}{2}\right)^{2k} \\ &= \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{k(2k-1)} E\left(\min\{\eta(X), 1-\eta(X)\}-\frac{1}{2}\right)^{2k} \\ &\le \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}}{k(2k-1)}\left(L^*-\frac{1}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức còn lại được suy ra từ Bổ đề 3 và được chứng minh tương tự. ■

Trường hợp đặc biệt khi $n = 1$ ta được hệ quả sau:

Hệ quả 1 [2]: Entropy và độ khác biệt Jeffrey thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$E \le \ln 2 - \frac{(1-2L^*)^2}{2} \ \text{ và } \ J \ge 2(1-2L^*)^2.$$

Để đánh giá xác suất lỗi lý thuyết $L(g)$ thông qua xác suất lỗi thực nghiệm $L_n(g)$, ta có thể sử dụng các bất đẳng thức về mức độ tập trung (concentration inequalities) cho tổng của các biến ngẫu nhiên độc lập.

Bổ đề 4 (Bất đẳng thức Hoeffding) [5, 6]. Cho $X_1,..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập với $P(a_i \le X_i \le b_i) = 1$ với mọi $i = \overline{1,n}$, trong đó $a_i, b_i \in \mathbf{R}, a_i \le b_i$. Khi đó, với mọi $t > 0$ và $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)$ ta luôn có:

$$P(S \ge t) \le \exp\left(-2t^2 / \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right),$$

$$P(|S| \ge t) \le 2\exp\left(-2t^2 / \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right).$$

Hệ quả 2: Khoảng tin cậy cho xác suất lỗi $L(g)$ của hàm phân lớp g với độ tin cậy tối thiểu $1-\alpha$ là:

$$\left(L_n(g) - \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)},\ L_n(g) + \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right).$$

Chứng minh:

Áp dụng bất đẳng thức Hoeffding cho các biến ngẫu nhiên $I_{\{g(X_i)\ne Y_i\}}$, với mọi $\varepsilon > 0$ ta có:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{g(X_i)\ne Y_i\}} - L(g)\right)\right| \ge n\varepsilon\right)$$

$$\le 2\exp\left(-\frac{2(n\varepsilon)^2}{n}\right) = 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Điều này tương đương với

$$P\left(\left|L_n(g) - L(g)\right| \ge \varepsilon\right) \le 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

Hay $P\left(\left|L_n(g) - L(g)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Cho $2e^{-2n\varepsilon^2} = \alpha \in (0, 1)$. Lúc đó $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$ và

$$P\left(\left|L_n(g) - L(g)\right| < \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right) \ge 1 - \alpha.$$

Từ đó, ta được điều phải chứng minh. ∎

Nhận xét 1: Nếu muốn độ dài khoảng tin cậy cho xác suất lỗi $L(g)$ được xây dựng ở trên không vượt quá $\Delta_0 > 0$ cho trước, ta cần chọn n sao cho:

$$2\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \le \Delta_0.$$

Từ đó, ta được:

$$n \ge \frac{2}{\Delta_0^2}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

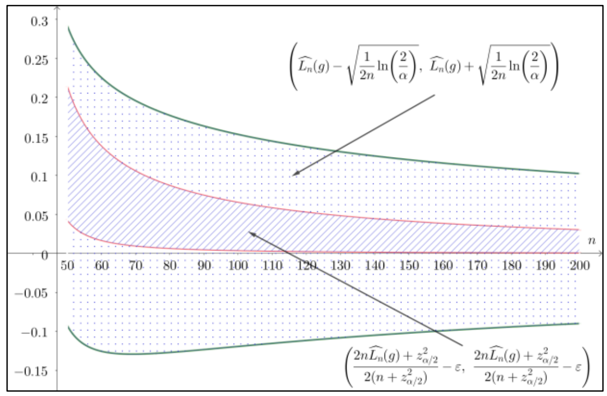
Nhận xét 2: Sử dụng định lý giới hạn trung tâm [5], ta có khi n lớn biến ngẫu nhiên

$$Z_n = \frac{\left(L_n(g) - L(g)\right)\sqrt{n}}{\sqrt{L(g).(1 - L(g))}}$$

có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$. Lúc đó, với độ tin cậy $1-\alpha$ khoảng tin cậy cho xác suất lỗi $L(g)$ là:

$$\left(\frac{2nL_n(g) + z_{\alpha/2}^2}{2(n + z_{\alpha/2}^2)} - \varepsilon,\ \frac{2nL_n(g) + z_{\alpha/2}^2}{2(n + z_{\alpha/2}^2)} - \varepsilon\right),$$

trong đó $\varepsilon = \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{z_{\alpha/2}^2 + 4nL_n(g)\left(1 - L_n(g)\right)}}{2(n + z_{\alpha/2}^2)}$.



***Hình 1.** Khoảng tin cậy 95% với* $L_n(g) = 1/|n - 40|$

Từ Hình 1 có thể thấy, khoảng tin cậy được xây dựng bởi phép xấp xỉ phân phối chuẩn tốt hơn theo nghĩa độ dài khoảng tin cậy nhỏ hơn. Mặc dù vậy, chất lượng của khoảng tin cậy này phụ thuộc nhiều vào chất lượng của phép xấp xỉ phân phối chuẩn.

3. Kết luận

Bài báo đã trình bày một số kết quả nghiên cứu về bất đẳng thức đánh giá lỗi phân lớp cho bài toán phân lớp nhị phân. Sử dụng bất đẳng thức Hoeffding và định lý giới hạn trung tâm, khoảng tin cậy cho xác suất lỗi lý thuyết cũng được xây dựng. Khi kích thước mẫu càng lớn, phép xấp xỉ phân phối chuẩn càng chính xác và lúc đó ta nên sử dụng khoảng tin cậy cho xác suất lỗi lý thuyết được xây dựng dựa trên phép xấp xỉ này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. K. Menon and R. C. Williamson, "The Cost of Fairness in Binary Classification", *Proceedings of Machine Learning Research*, vol. 81, pp. 1-12, 2018.

[2] L. Devroye, L. Gyorfi, and G. Lugosi, *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Springer-Verlag, 1996.

[3] S. Singh and J. Khim, "Optimal Binary Classification Beyond Accuracy", *36th Conference on Neural Information Processing Systems*, 2022.

[4] N. D. Tien, *Lectures on Mathematical Analysis (Vol. 1)*, Hanoi National University Publishing House, 2004.

[5] M. Sugiyama, *Introduction to Statistical Machine Learning*, Elsevier Inc., 2016.

[6] B. Stephane, G. Lugosi, and P. Massart, *Concentration Inequalities: A Nonasymptotic Theory of Independence*, Oxford University Press, 2013.