SỰ BẢO TỒN MỘT SỐ TÍNH CHẤT TOPO QUA ÁNH XẠ LIÊN TỤC

THE PRESERVATION OF TOPOLOGICAL PROPERTIES UNDER CONTINUOUS MAPPING

Nguyễn Xuân Trúc[1], **Nguyễn Đức Khôi**[1], **Nguyễn Minh Thiện**[1], **Lương Quốc Tuyển**[2]*

[1]*Sinh viên Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam*

[2]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam*

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: tuyendhdn@gmail.com

(Nhận bài / Received: 09/01/2024; Sửa bài / Revised: 26/01/2024; Chấp nhận đăng / Accepted: 02/03/2024)

Tóm tắt - Bài toán về sự bảo tồn các tính chất topo thông qua các ánh xạ là một trong những bài toán trọng tâm của topo đại cương. Vào năm 2015, Y. K. Song và R. Li đã chứng minh rằng, không gian Hurewicz yếu được bảo tồn qua ánh xạ liên tục ([1]). Gần đây, các tác giả khác cũng đã chỉ ra rằng, các không gian như star-C-Hurewicz, $\mathcal{I}$-Hurewiz yếu, star-$\mathcal{I}$-Hurewicz mạnh, star-$\mathcal{I}$-Hurewicz yếu, set star-Hurewicz, set star-Hurewicz mạnh được bảo tồn qua ánh xạ liên tục ([2], [3], [4]). Trong bài báo này, nhóm tác giả tiếp tục nghiên cứu sự bảo tồn qua ánh xạ liên tục của một số không gian topo được giới thiệu gần đây. Chứng rằng các không gian starcompact, star-Lindelöf, starcompact mạnh, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh cũng bảo tồn qua ánh xạ liên tục. Nhờ các kết quả này, nghiên cứu thu được rằng nếu một không gian là starcompact (tương ứng, star-Lindelöf, starcompact mạnh, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger, star-Menger mạnh), thì không gian thương nó cũng vậy.

Từ khóa - Ánh xạ liên tục; starcompact; star-Lindelöf; cellular-compact; cellular-Lindelöf.

Abstract - The problem of preservation of topological properties under mappings is one of the central problems of general topology. In 2015, Y. K. Song and R. Li proved that, weakly Hurewicz spaces are preserved under continuous mappings ([1]). Recently, other authors have also shown that, spaces such as star-C-Hurewicz, weakly $\mathcal{I}$-Hurewicz, strongly star-$\mathcal{I}$-Hurewicz, weakly star-$\mathcal{I}$-Hurewicz, set star-Hurewicz and strongly set star-Hurewicz are preserved under continuous mappings ([2], [3], [4]). In this paper, the authors continue to study the preservation under continuous mappings of some recently introduced topological spaces. Prove that starcompact, star-Lindelöf, strongly starcompact, strongly star-Lindelöf, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger and strongly star-Menger spaces are also preserved under continuous mappings. By these results, the study obtain that if a space is starcompact (resp., star-Lindelöf, strongly starcompact, strongly star-Lindelöf, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger, strongly star-Menger), then so is its quotient space.

Key words - Continuous mappings; starcompact; star-Lindelöf; cellular-compact; cellular-Lindelöf.

1. Giới thiệu

Thuật ngữ *star-P* (*P* là một tính chất topo nào đó) là một suy rộng của tính chất *P* được đưa ra bởi J. van Mill và cộng sự trong [5]; bên cạnh đó, một số tính chất star như *star hữu hạn*, *star đếm được* được đưa ra bởi S. Ikenaga (xem [6]) và được nghiên cứu đầu tiên bởi E. K. van Douwen và cộng sự [7]. Nhờ đó, nhiều tính chất *star* mới lần lượt xuất hiện như: starcompact, starcompact mạnh, star-Lindelöf, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh (xem [8-11]).

Một khía cạnh quan trọng được các nhà toán học trên thế giới quan tâm nhiều hiện nay là nghiên cứu sự bảo tồn của các tính chất metric rộng qua các ánh xạ (xem [1-4]). Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu sự bảo tồn các tính chất starcompact, starcompact mạnh, star-Lindelöf, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh qua ánh xạ liên tục.

Trong suốt bài báo này, tất cả các ánh xạ là toàn ánh, còn khái niệm và thuật ngữ khác nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường (xem [12]). Ngoài ra, nhóm các tác giả còn sử dụng thêm kí hiệu:

$$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\},\ \omega=\mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$\bigcup\mathcal{U}=\bigcup\{A: A\in\mathcal{U}\},$$

$$\mathrm{St}(A,\mathcal{U})=\bigcup\{U\in\mathcal{U}: U\cap A\neq\varnothing\}.$$

2. Cơ sở lí thuyết và Phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 2.1.1 ([12]). Giả sử (X,τ) và (Y,σ) là các không gian topo, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là ánh xạ. Khi đó,

(1) f được gọi là *liên tục* tại $x\in X$ nếu với mỗi V là lân cận mở của $f(x)$ trong Y, tồn tại lận cận mở U của x trong X sao cho $f(U)\subset V$.

(2) f được gọi là *liên tục trên* X (hoặc *liên tục*) nếu nó liên tục tại x với mỗi $x\in X$.

Định nghĩa 2.1.2. Giả sử (X,τ) là không gian topo. Khi đó, X được gọi là

(1) Không gian *starcompact* (tương ứng, *star-Lindelöf*) [10], nếu với mọi phủ mở $\mathcal{U}$ của X tồn tại họ hữu hạn

---

[1] Students of Faculty of Mathematics, The University of Danang - University of Science and Education, Danang, Vietnam (Nguyen Xuan Truc, Nguyen Duc Khoi, Nguyen Minh Thien)

[2] The University of Danang - University of Science and Education, Danang, Vietnam (Luong Quoc Tuyen)

(tương ứng, đếm được) $\mathcal{V}$ của $\mathcal{U}$ sao cho

$$X = \mathrm{St}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}).$$

(2) Không gian *starcompact mạnh* (tương ứng, *star-Lindelöf mạnh*), nếu với mọi phủ mở $\mathcal{U}$ của X, tồn tại tập con hữu hạn (tương ứng, đếm được) A trong X sao cho

$$X = \mathrm{St}(A, \mathcal{U}).$$

(3) Không gian *cellular-compact* [8], nếu với mọi $\mathcal{U}$ là họ gồm các tập mở khác rỗng rời nhau trong X, tồn tại K là tập compact trong X sao cho $K \cap U \neq \varnothing$ với mọi $U \in \mathcal{U}$.

(4) Không gian *cellular-Lindelöf* [9], nếu với mọi $\mathcal{U}$ là họ gồm các tập mở khác rỗng rời nhau trong X, tồn tại L là tập Lindelöf trong X sao cho $L \cap U \neq \varnothing$ với mọi $U \in \mathcal{U}$.

(5) Không gian $\mathcal{K}$*-starcompact* [13], nếu với mọi phủ mở $\mathcal{U}$ của X, tồn tại tập con compact K trong X sao cho $X = \mathrm{St}(K, \mathcal{U})$.

(6) Không gian $\mathcal{L}$-starcompact [14], nếu với mọi phủ mở $\mathcal{U}$ của X, tồn tại tập con Lindelöf L trong X sao cho

$$X = \mathrm{St}(L, \mathcal{U}).$$

(7) Không gian *star-Menger* [11], nếu với mỗi $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ là dãy gồm các phủ mở của X, tồn tại $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ sao cho với mỗi $n \in \omega$, $\mathcal{V}_n$ là họ hữu hạn của $\mathcal{U}_n$ và

$$\{\mathrm{St}(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$$

là phủ mở của X.

(8) Không gian *star-Menger mạnh* [11], nếu với mỗi $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ là dãy gồm các phủ mở của X, tồn tại $\{F_n : n \in \omega\}$ là dãy gồm các tập hữu hạn trong X sao cho

$$\{\mathrm{St}(F_n, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$$

là phủ mở của X.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Trong quá trình nghiên cứu, nhóm tác giả đã sưu tầm, phân tích các bài báo của những tác giả đi trước. Sau đó, bằng phương pháp tương tự hóa, khái quát hóa một số kết quả trong các công trình này, nhóm tác giả đã đưa ra những kết quả chính cho bài báo của mình.

3. Kết quả nghiên cứu và Bình luận

3.1. Kết quả nghiên cứu

Bổ đề 3.1.1. *Giả sử (X, τ) và (Y, σ) là các không gian topo, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, nếu K là tập compact (tương ứng, Lindelöf) trong X, thì $f(K)$ là tập compact (tương ứng, Lindelöf) trong Y.*

Chứng minh. Giả sử K là tập compact (tương ứng, Lindelöf) trong X và $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ là phủ mở của $f(K)$ trong Y. Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ là phủ mở của X. Hơn nữa, vì K là tập compact (tương ứng, Lindelöf) trong X nên tồn tại tập con hữu hạn (tương ứng, đếm được) J của I sao cho

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha),$$

kéo theo

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f\left(f^{-1}(U_\alpha)\right) \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha.$$

Do đó, $f(K)$ là tập compact (tương ứng, Lindelöf) trong Y.

Định lí 3.1.2. *Giả sử (X, τ) và (Y, σ) là các không gian topo, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, nếu X là không gian gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf), thì Y là không gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf).*

Chứng minh. Giả sử X là không gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf) và $\mathcal{U}$ là phủ mở của Y. Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên

$$\mathcal{W} = \left\{ f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \right\}$$

là phủ mở của X. Mặt khác, vì X là không gian star-compact (tương ứng, star-Lindelöf) nên tồn tại $\mathcal{V}$ là họ con hữu hạn (tương ứng, đếm được) của $\mathcal{U}$ sao cho

$$\mathrm{St}\left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}(V), \mathcal{W}\right) = X.$$

Khi đó, $\mathrm{St}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = Y$.

Thật vậy, giả sử $y \in Y$. Bởi vì f là toàn ánh nên tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Do đó, tồn tại $U_y \in \mathcal{U}$ và $V_y \in \mathcal{V}$ sao cho

$$x \in f^{-1}(U_y) \text{ và } f^{-1}(U_y) \cap f^{-1}(V_y) \neq \varnothing.$$

Suy ra $\quad y \in U_y$ và $U_y \cap V_y \neq \varnothing$,

kéo theo $\quad y \in \mathrm{St}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U})$.

Như vậy, Y là không gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf).

Định lí 3.1.3. *Giả sử (X, τ) và (Y, σ) là các không gian topo, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, nếu X là không gian starcompact mạnh (tương ứng, star-Lindelöf mạnh), thì Y là không gian starcompact mạnh (tương ứng, star-Lindelöf mạnh).*

Chứng minh. Giả sử X là không gian starcompact mạnh (tương ứng, star-Lindelöf mạnh) và $\mathcal{U}$ là phủ mở của Y. Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên

$$\mathcal{W} = \left\{ f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \right\}$$

là phủ mở của X. Hơn nữa, vì X là không gian starcompact mạnh (tương ứng, star-Lindelöf mạnh) nên tồn tại tập con hữu hạn (tương ứng, đếm được) F trong X sao cho

$$\mathrm{St}(F,\mathcal{W})=X.$$

Khi đó, $E=f(F)$ là tập con hữu hạn (tương ứng, đếm được) trong Y. Hơn nữa, ta có

$$\mathrm{St}(E,\mathcal{U})=Y.$$

Thật vậy, giả sử $y\in Y$. Bởi vì f là toàn ánh nên tồn tại $x\in X$ sao cho $y=f(x)$. Suy ra tồn tại $U_y\in\mathcal{U}$ sao cho

$$x\in f^{-1}\left(U_y\right) \text{ và } f^{-1}\left(U_y\right)\cap F\neq\varnothing,$$

kéo theo $y\in U_y$ và $U_y\cap E\neq\varnothing$.

Do đó, $y\in \mathrm{St}(E,\mathcal{U})$.

Như vậy, Y là không gian starcompact mạnh (tương ứng, star-Lindelöf mạnh).

Định lí 3.1.4. *Giả sử (X,τ) và (Y,σ) là các không gian topo, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, nếu X là không gian cellular-compact (tương ứng, cellular-Lindelöf), thì Y là không gian cellular-compact (tương ứng, cellular-Lindelöf).*

Chứng minh. Giả sử X là không gian cellular-compact (tương ứng, cellular-Lindelöf) và $\mathcal{U}$ là họ gồm các tập mở khác rỗng rời nhau trong Y. Khi đó, bởi vì f là ánh xạ liên tục và toàn ánh nên

$$\mathcal{W}=\left\{f^{-1}(U):U\in\mathcal{U}\right\}$$

là họ gồm các tập mở khác rỗng rời nhau của X. Hơn nữa, vì X là không gian cellular-compact (tương ứng, cellular-Lindelöf) nên tồn tại tập compact (tương ứng, Lindelöf) K trong X sao cho nếu $U\in\mathcal{U}$ thì

$$K\cap f^{-1}(U)\neq\varnothing.$$

Do đó, với mọi $U\in\mathcal{U}$ ta có

$$\varnothing\neq f\left(K\cap f^{-1}(U)\right)\subset f(K)\cap f\left(f^{-1}(U)\right)\subset f(K)\cap U.$$

Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên theo Bổ đề 3.1.1 ta suy ra $f(K)$ là tập compact (tương ứng, Lindelöf) trong Y. Do đó, Y là không gian cellular-compact (tương ứng, cellular-Lindelöf).

Định lí 3.1.5. *Giả sử (X,τ) và (Y,σ) là các không gian topo, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, nếu X là không gian $\mathcal{K}$-starcompact (tương ứng, $\mathcal{L}$-starcompact), thì Y là không gian $\mathcal{K}$-starcompact (tương ứng, $\mathcal{L}$-starcompact).*

Chứng minh. Giả sử X là không gian $\mathcal{K}$-starcompact (tương ứng, $\mathcal{L}$-starcompact) và $\mathcal{U}$ là phủ mở của Y. Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên

$$\mathcal{W}=\left\{f^{-1}(U):U\in\mathcal{U}\right\}$$

là phủ mở của X. Mặt khác, vì X là không gian $\mathcal{K}$-starcompact (tương ứng, $\mathcal{L}$-starcompact) nên tồn tại tập con compact (tương ứng, Lindelöf) H trong X sao cho

$$\mathrm{St}(H,\mathcal{W})=X.$$

Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên theo Bổ đề 3.1.1, $K=f(H)$ là tập con compact (tương ứng, Lindelöf) trong Y. Hơn nữa, ta có

$$\mathrm{St}(K,\mathcal{U})=Y.$$

Thật vậy, giả sử $y\in Y$. Bởi vì f là toàn ánh nên tồn tại $x\in X$ sao cho $y=f(x)$. Do đó, tồn tại $U_y\in\mathcal{U}$ sao cho

$$x\in f^{-1}\left(U_y\right) \text{ và } f^{-1}\left(U_y\right)\cap H\neq\varnothing,$$

kéo theo $y\in U_y$ và $U_y\cap K\neq\varnothing$.

Do đó, $y\in \mathrm{St}(K,\mathcal{U})$.

Như vậy, Y là không gian $\mathcal{K}$-starcompact (tương ứng, $\mathcal{L}$-starcompact).

Định lí 3.1.6. *Giả sử (X,τ) và (Y,σ) là các không gian topo, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, nếu X là không gian star-Menger, thì Y là không gian star-Menger.*

Chứng minh. Giả sử X là không gian star-Menger và $\{\mathcal{U}_n:n\in\omega\}$ là dãy gồm các phủ mở của Y. Khi đó, với mỗi $n\in\omega$, ta đặt

$$\mathcal{W}_n=\left\{f^{-1}(U):U\in\mathcal{U}_n\right\}.$$

Bởi vì f là ánh xạ liên tục nên $\{\mathcal{W}_n:n\in\omega\}$ là dãy gồm các phủ mở của X. Mặt khác, vì X là không gian star-Menger nên tồn tại họ $\{\mathcal{V}_n:n\in\omega\}$ sao cho với mỗi $n\in\omega$, $\mathcal{V}_n$ là họ con hữu hạn của $\mathcal{U}_n$ và

$$\left\{\mathrm{St}(\bigcup\mathcal{F}_n,\mathcal{W}_n):n\in\omega\right\}$$

là phủ mở của X, trong đó với mỗi $n\in\omega$,

$$\mathcal{F}_n=\left\{f^{-1}(V):V\in\mathcal{V}_n\right\}.$$

Bây giờ, ta chứng tỏ rằng

$$\left\{\mathrm{St}(\bigcup\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n):n\in\omega\right\}$$

là phủ mở của Y. Thật vậy, giả sử $y\in Y$. Bởi vì f là toàn ánh nên tồn tại $x\in X$ sao cho $y=f(x)$. Do đó, tồn tại $n_x\in\omega$ sao cho

$$x\in\mathrm{St}\left(\bigcup\mathcal{F}_{n_x},\mathcal{W}_{n_x}\right).$$

Suy ra tồn tại $V_{n_x}\in\mathcal{V}_{n_x}$ và $U_{n_x}\in\mathcal{U}_{n_x}$ sao cho

$$x\in f^{-1}\left(U_{n_x}\right) \text{ và } f^{-1}\left(U_{n_x}\right)\cap f^{-1}\left(U_{n_x}\right)\neq\varnothing,$$

kéo theo $y\in U_{n_x}$ và $U_{n_x}\cap V_{n_x}\neq\varnothing$.

Do đó, $y\in\mathrm{St}\left(\bigcup\mathcal{V}_{n_x},\mathcal{U}_{n_x}\right)$.

Như vậy, Y là không gian star-Menger.

Định lí 3.1.7. *Giả sử (X,τ) và (Y,σ) là các không gian topo, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ là ánh xạ liên tục. Khi đó,* *nếu* X *là không gian star-Menger mạnh, thì* Y *là không gian star-Menger mạnh.*

Chứng minh. Giả sử X là không gian star-Menger mạnh và $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ là dãy gồm các phủ mở của Y. Với mỗi $n \in \omega$, ta đặt

$$\mathcal{W}_n = \left\{ f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n \right\}.$$

Khi đó, vì f là ánh xạ liên tục nên $\{\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$ là dãy gồm các phủ mở X. Bởi vì, X là không gian star-Menger mạnh nên tồn tại dãy $\{F_n : n \in \omega\}$ gồm các tập hữu hạn trong X sao cho

$$\left\{ \mathtt{St}(F_n, \mathcal{W}_n) : n \in \omega \right\}$$

là phủ mở của X. Bây giờ, với mỗi $n \in \omega$, ta đặt

$$E_n = f(F_n).$$

Khi đó, $\left\{ E_n : n \in \omega \right\}$

là dãy gồm các tập hữu hạn trong Y. Hơn nữa,

$$\left\{ \mathtt{St}(E_n, \mathcal{U}_n) : n \in \omega \right\}$$

là phủ mở của Y. Thật vậy, giả sử $y \in Y$. Bởi vì f là toàn ánh nên tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Do đó, tồn tại $n_x \in \omega$ sao cho

$$x \in \mathtt{St}\left(F_{n_x}, \mathcal{W}_{n_x} \right).$$

Bởi thế, tồn tại $U_{n_x} \in \mathcal{U}_{n_x}$ sao cho

$$x \in f^{-1}\left(U_{n_x} \right) \text{ và } f^{-1}\left(U_{n_x} \right) \cap F_{n_x} \neq \varnothing,$$

kéo theo $\quad y \in U_{n_x}$ và $U_{n_x} \cap E_{n_x} \neq \varnothing.$

Suy ra $\quad y \in \mathtt{St}\left(E_{n_x}, \mathcal{U}_{n_x} \right).$

Như vậy, Y là không gian star-Menger mạnh.

Hệ quả 3.1.8. *Giả sử* (X, τ) *là không gian topo. Khi đó, nếu* X *là không gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf, starcompact mạnh, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf,* $\mathcal{K}$*-starcompact,* $\mathcal{L}$*-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh), thì không gian thương* X^* *của nó cũng là không gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf, starcompact mạnh, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf,* $\mathcal{K}$*-starcompact,* $\mathcal{L}$*-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh).*

Chứng minh. Giả sử X là không gian không gian star-compact (tương ứng, star-Lindelöf, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh). Khi đó, vì ánh xạ thương

$$\pi : X \to X^*$$
$$x \mapsto x^*$$

là liên tục nên theo các Định lí 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 và 3.1.7 ta suy ra rằng X^* là không gian star-compact (tương ứng, star-Lindelöf, starcompact mạnh, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh).

3.2. Bình luận

Các kết quả chính của bài báo được thể hiện ở các Định lí 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7 và Hệ quả 3.1.8.

- Định lí 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, và 3.1.7 là sự bảo tồn của các không gian starcompact (tương ứng, star-Lindelöf, starcompact mạnh, star-Lindelöf mạnh, cellular-compact, cellular-Lindelöf, $\mathcal{K}$-starcompact, $\mathcal{L}$-starcompact, star-Menger và star-Menger mạnh) qua ánh xạ liên tục.

- Hệ quả 3.1.8 thu được nhờ tính liên tục của ánh xạ thương.

4. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã đưa ra và chứng minh chi tiết một số kết quả mới liên quan đến sự bảo tồn của các tính chất *star-P* với *P* là một tính chất topo nào đó thông qua ánh xạ liên tục. Nhờ đó, các kết quả của bài báo đã góp phần làm phong phú lĩnh vực nghiên cứu các tính chất metric suy rộng trong topo đại cương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Y. K. Song and R. Li, "On weakly Hurewicz spaces", *Filomat*, vol. 29, no. 4, pp. 667-671, 2015. https://doi.org/10.2298/FIL1504667S

[2] Y. K. Song, "On star-C-Hurewicz spaces", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, vol. 54, no. 4, pp. 411-425, 2017. https://doi.org/10.1556/012.2017.54.4.1373

[3] P. Das, D. Chandra, and U. Samanta, "On certain variations of I-Hurewicz property", *Topology and its Applications*, vol. 241, pp. 363-376, 2018. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.03.027

[4] S. Singh and L. D. R. Kočinac, "Star versions of Hurewicz spaces", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic*, vol. 50, no. 5, pp. 1325-1333, 2021. https://doi:10.15672/hujms.819719

[5] J. van Mill, V. V. Tkachuk, and R. G. Wilson, "Classes defined by stars and neighbourhood assignments", *Topology and its Applications*, vol. 154, no. 10, pp. 2127-2134, 2007. https://doi:10.1016/j.topol.2006.03.029

[6] S. Ikenaga, "Topological concept between Lindelöf and pseudo-Lindelöf", *Res. Rep. Nara Natl. Coll. Technol*, vol. 26, pp. 103-108, 1990.

[7] E. K. van Douwen, G. M. Reed, A. W. Roscoe, and I. J. Tree, "Star covering properties", *Topology and its Applications*, vol. 39, no. 1, pp. 71–103, 1991. https://doi.org/10.1016/0166-8641(91)90077-Y

[8] V. V. Tkachuk and R. G. Wilson, "Cellular-compact spaces and their applications", *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 259, no. 2, pp. 674-688, 2019. https://doi.org/10.1007/s10474-019-00968-9

[9] W. F. Xuan and Y. K. Song, "On study of cellular-Lindelöf spaces", *Topology and its Applications*, vol. 251, pp. 1–9, 2019. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.10.008

[10] L. D. R. Kočinac, "Star-Menger and related spaces, II", *Filomat*, vol. 13. pp. 129-140, 1999.

[11] L. D. R. Kočinac, "On Star Selection Principles Theory". Axioms [Internet], vol. 12, no. 1, pp. 93, 2023. https://doi.org/10.3390/axioms12010093

[12] R. Engelking, *General Topology*. Heldermann Verlag, 1989.

[13] Y. K. Song, "Remarks on $\mathcal{K}$-starcompact spaces", *Communications of the Korean Mathematical Society*, vol. 22, no. 4, pp. 569-573, 2007.

[14] Y. K. Song, "On $\mathcal{L}$-starcompact spaces", *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 56, no. 2, pp. 781-788, 2006.