

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN GIẢI BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT PHI TUYẾN ỔN ĐỊNH TRONG CÁNH THẲNG BIÊN DẠNG HÌNH CHỮ NHẬT

APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING STEADY NONLINEAR HEAT TRANSFER IN A RECTANGULAR STRAIGHT FIN

Huỳnh Ngọc Hùng*

Trường Đại học Bách khoa - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam¹

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: hnhung@dut.udn.vn

(Nhận bài / Received: 23/3/2024; Sửa bài / Revised: 18/4/2024; Chấp nhận đăng / Accepted: 19/4/2024)

Tóm tắt - Cánh được sử dụng rộng rãi để tăng cường truyền nhiệt trong các ứng dụng kỹ thuật của nhiều lĩnh vực. Trong nghiên cứu này, mô hình số cho bài toán truyền nhiệt phi tuyến ổn định trong cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật được phát triển dựa trên phương pháp sai phân hữu hạn (FDM). Ngôn ngữ lập trình Python được áp dụng để giải hệ phương trình phi tuyến được xây dựng từ mô hình số. Kết quả kiểm chứng mô hình cho thấy, mô hình có độ tin cậy rất cao. Ngoài ra, mô hình cũng được áp dụng để nghiên cứu ảnh hưởng của các đại lượng không thứ nguyên đến phân bố nhiệt độ và hiệu suất của cánh. Mô hình là công cụ hữu ích để phân tích nhiệt cánh và tạo dữ liệu để kiểm chứng các mô hình truyền nhiệt phi tuyến của cánh.

Từ khóa - Phương pháp sai phân hữu hạn (FDM); truyền nhiệt phi tuyến; cánh thẳng; hiệu suất cánh; phân bố nhiệt độ trong cánh.

1. Đặt vấn đề

Cánh tản nhiệt thường được dùng để tăng cường truyền nhiệt giữa bề mặt của các thiết bị kỹ thuật với môi trường tiếp xúc thông qua các phương thức trao đổi nhiệt như dẫn nhiệt, đối lưu và bức xạ. Cánh được ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực điều hòa không khí, làm mát các thiết bị điện tử, ô tô, các thiết bị trao đổi nhiệt,... Trong những thập niên qua, quá trình truyền nhiệt qua cánh đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu; nhiều phương pháp giải bài toán truyền nhiệt phi tuyến qua cánh được phát triển. Các phương pháp giải tích thường được áp dụng cho bài toán tuyến tính. Các bài toán này được làm đơn giản dựa trên giả thiết như các thông số nhiệt, vật lý bao gồm hệ số dẫn nhiệt và hệ số trao đổi nhiệt đối lưu không đổi. Tuy nhiên, bài toán mô tả quá trình truyền nhiệt qua cánh thường là bài toán phi tuyến do các thông số nhiệt vật lý của cánh, hệ số tỏa nhiệt và nguồn nhiệt trong phụ thuộc vào nhiệt độ hoặc sự xuất hiện quá trình trao đổi nhiệt bức xạ ở bề mặt cánh. Trong trường hợp này, các phương pháp xấp xỉ từ phương pháp giải tích hoặc các phương pháp số thường được lựa chọn.

Do sự hạn chế của các phương pháp giải tích, nhiều phương pháp xấp xỉ từ phương pháp giải tích được áp dụng để giải bài toán truyền nhiệt phi tuyến qua cánh. Các nghiên cứu về cánh áp dụng các phương pháp xấp xỉ có thể kể đến như phương pháp biến đổi vi phân (DTM) [1, 2, 3, 4, 5], phương pháp phân tích đồng luân (HAM) [6, 7, 8], phương pháp phân hoạch Adomian (ADM) [9, 10, 11]. Kết quả của

Abstract - Fins are widely used to enhance heat transfer in engineering applications of many fields. In this study, a numerical model for the nonlinear steady heat transfer in a rectangular straight fin is developed based on the finite difference method (FDM). The Python programming language is employed to solve the system of nonlinear equations developed from the numerical model. Model validation results show that the model has very high reliability. In addition, the numerical model is also applied to study the influence of dimensionless quantities on the temperature distribution and efficiency of the fin. The model is a useful tool for thermal analysis of fins and generating data to validate nonlinear heat transfer models of fins.

Key words - Finite difference method (FDM); nonlinear heat transfer; straight fin; fin efficiency; temperature distribution in fin.

các nghiên cứu cho thấy, các phương pháp xấp xỉ có độ chính xác cao khi so với phương pháp giải tích. Tuy nhiên, các phương pháp này thường chứa nhiều tham số gây khó khăn cho việc sử dụng [12, 13]. Các phương pháp số như phương pháp FDM, phương pháp thể hữu hạn (FVM) và phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) ngày càng được sử dụng rộng rãi trong việc giải quyết các vấn đề thực tế.

Việc áp dụng phương pháp FDM cho nghiên cứu bài toán truyền nhiệt tuyến tính và không tuyến tính qua cánh có thể tìm thấy trong một số nghiên cứu. Young và cộng sự [14] áp dụng phương pháp FDM để giải bài toán truyền nhiệt tuyến tính qua cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật trao đổi nhiệt đối lưu với môi trường. Kết quả về lượng nhiệt trao đổi bằng đối lưu từ bề mặt cánh và phân bố nhiệt độ trong cánh được so sánh với phương pháp chính xác. Các mật độ lưới khác nhau được áp dụng với số nút thay đổi trong khoảng từ 20 đến 100. Kết quả nghiên cứu cho thấy, sai số của phương pháp FDM so với phương pháp chính xác giảm khi số nút tăng. Harley và Moitsheki [15] nghiên cứu phân bố nhiệt độ trong cánh thẳng tiết diện hình chữ nhật với hệ số dẫn nhiệt và hệ số tỏa nhiệt đối lưu phụ thuộc vào nhiệt độ ở chế độ ổn định nhiệt. Hàm pvp4c dựa trên phương pháp FDM tích hợp trong Matlab được áp dụng. Sự ảnh hưởng của các đại lượng không thứ nguyên đến phân bố nhiệt độ trong cánh được nghiên cứu. Pinar và Erdem [16] áp dụng phương pháp FDM để kiểm chứng mô hình ANSYS Fluent cho cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật trao đổi nhiệt đối lưu, bức xạ với môi trường trong

¹ The University of Danang - University of Science and Technology, Vietnam (Huỳnh Ngọc Hùng)

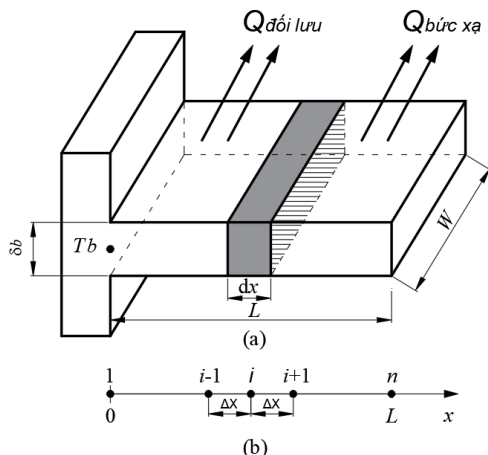
trường hợp ổn định. Kết quả cho thấy, sự độ tin cậy cao của mô hình ANSYS Fluent. Trong nghiên cứu gần đây, Sobamowo [17] xây dựng mô hình số dựa trên phương pháp FDM để nghiên cứu bài toán truyền nhiệt phi tuyến qua cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật với hệ số dẫn nhiệt phụ thuộc vào nhiệt độ và có nguồn nhiệt trong. Hàm fsolve của Matlab được áp dụng để giải hệ phương trình phi tuyến được xây dựng từ phương pháp FDM. Mô hình được áp dụng để nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số dẫn nhiệt, đối lưu đến sự phân bố nhiệt độ trong cánh.

Theo kết quả khảo sát trên cho thấy, có nhiều nghiên cứu về các phương pháp xấp xỉ cho bài toán truyền nhiệt phi tuyến qua cánh. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp FDM còn rất ít. Trong nghiên cứu này, mô hình số cho bài toán truyền nhiệt ổn định cho cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật trao đổi nhiệt đối lưu và bức xạ với môi trường được xây dựng dựa trên phương pháp FDM. Ngôn ngữ lập trình bậc cao Python được áp dụng để giải hệ phương trình phi tuyến được lập từ FDM. Mô hình được kiểm chứng với phương pháp giải tích và các phương pháp xấp xỉ giải tích khác. Mô hình được áp dụng để nghiên cứu sự ảnh hưởng của các đại lượng không thứ nguyên đến sự phân bố nhiệt độ và hiệu suất nhiệt của cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật.

2. Thiết lập và giải bài toán

2.1. Phương trình vi phân mô tả bài toán

Xét cánh thẳng có tiết diện hình chữ nhật không đổi A_c trao đổi nhiệt đối lưu, bức xạ với môi trường như Hình 1. Cánh có chiều dài L , chiều rộng w và độ dày cánh δ_b . Nhiệt độ chân cánh phân bố đều và không đổi T_b và các bề mặt cánh tiếp xúc với môi trường có nhiệt độ đồng nhất T_a . Nhiệt độ tại mỗi tiết diện cánh được coi là phân bố đều và chỉ thay đổi dọc theo chiều dài cánh. Lượng nhiệt trao đổi ở đỉnh cánh với môi trường không đáng kể và đỉnh cánh được xem như đoạn nhiệt.



Hình 1. Cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật a) hình dạng cánh, b) chia lưới theo phương pháp FDM

Phương trình vi phân được xây dựng từ phương trình cân bằng nhiệt cho một phần tử cánh dx có dạng:

$$\lambda A_c \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - \alpha P (T - T_a) - \varepsilon \sigma P (T^4 - T_s^4) = 0 \quad (1)$$

Trong đó, T - nhiệt độ cánh (K); λ - hệ số dẫn nhiệt của cánh ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$); ρ - khối lượng riêng (kgm^{-3}); α - hệ số tỏa đối lưu ($\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$) của bề mặt cánh; ε - Hệ số bức xạ của bề

mặt cánh; $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} (\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4})$ là hằng số Stefan Boltzmann, P là chu vi tiết diện ngang của cánh và T_s (K) là nhiệt độ nguồn trao đổi nhiệt bức xạ của môi trường với cánh. Trong nghiên cứu này ta giả thiết $T_s = T_a$.

Điều kiện biên:

$$x = 0, T = T_b; \quad x = L, \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad (2)$$

Sử dụng các đại lượng không thứ nguyên:

$$X = \frac{x}{L}, \theta = \frac{T}{T_b}, \theta_a = \frac{T_a}{T_b}, \quad (3)$$

$$M^2 = \frac{\alpha P L^2}{\lambda A_c}, \quad N_R = \frac{\varepsilon \sigma P L^2 T_b^3}{\lambda A_c}$$

Phương trình vi phân (1) được viết lại:

$$\frac{d^2 \theta}{dX^2} - M^2 (\theta - \theta_a) - N_R (\theta^4 - \theta_s^4) = 0 \quad (4)$$

$$0 \leq X \leq 1$$

Lúc này, điều kiện biên như sau:

$$X = 0, \theta = 1; \quad X = 1, \quad \frac{d\theta}{dX} = 0 \quad (5)$$

2.2. Áp dụng phương pháp FDM

Theo phương pháp sai phân hữu hạn, cánh được chia thành n nút được đánh số $1 \div n$ tương ứng với nhiệt độ của các nút $T_1 \div T_n$ (Hình 1b). Thành phần đạo hàm cấp 2 của phương trình (4) cho nút bên trong i ($i = 2 \div n - 1$) được xấp xỉ theo sai phân giữa như sau:

$$\frac{d^2 \theta}{dX^2} \Big|_i \cong \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta X^2} \quad (6)$$

2.2.1. Các nút bên trong

Ứng với các nút bên trong $i = 2 \div (n - 1)$, thay phương trình (6) vào phương trình (4) ta được:

$$\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1} - M^2 (\theta - \theta_a) \Delta X^2 - N_R (\theta^4 - \theta_s^4) \Delta X^2 = 0 \quad (7)$$

2.2.2. Các nút biên

+ Nút biên 1:

$$\theta_1 = 1 \quad (8)$$

+ Với nút biên n , áp dụng phương trình cân bằng nhiệt ta có:

$$\lambda A_c (T_{n-1} - T_n) / \Delta x - \alpha \frac{P \Delta x}{2} (T_n - T_a) - \varepsilon \sigma \frac{P \Delta x}{2} (T_n^4 - T_s^4) = 0 \quad (9)$$

Phương trình (9) được viết lại như sau:

$$(\theta_{n-1} - \theta_n) - M^2 (\theta_{n-1} - \theta_a) \frac{\Delta X^2}{2} - N_R (\theta_n^4 - \theta_s^4) \frac{\Delta X^2}{2} = 0 \quad (10)$$

Kết hợp các phương trình (7), (8) và (10) ta được hệ n phương trình đại số phi tuyến. Trong nghiên cứu này, hệ phương trình phi tuyến được giải bằng cách sử dụng hàm fsolve có trong ngôn ngữ lập trình bậc cao Python, với sai số lặp là 10^{-7} .

2.3. Hiệu suất cánh

Hiệu suất cánh được định nghĩa là tỷ số giữa lượng nhiệt thực tế trao đổi giữa bề mặt cánh và môi trường (Q_f)

với lượng nhiệt nhiệt cực đại trao đổi giữa cánh và môi trường (\dot{Q}_{max}). Lượng nhiệt cực đại khi nhiệt độ của toàn bộ cánh bằng nhiệt độ chân cánh T_b . Hiệu suất cánh có thể được xác định như sau:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{max}} \quad (11)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_f = & [\alpha(T_1 - T_a) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_s^4)] \frac{Pdx}{2} + \\ & \sum_{i=2}^{n-1} [\alpha(T_i - T_a) + \varepsilon\sigma(T_i^4 - T_s^4)] Pdx + \\ & [\alpha(T_n - T_a) + \varepsilon\sigma(T_n^4 - T_s^4)] \frac{Pdx}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{Q}_{max} = \alpha PL(T_b - T_a) + \varepsilon\sigma PL(T_b^4 - T_s^4) \quad (13)$$

\dot{Q}_f và \dot{Q}_{max} có thể được viết dưới dạng không thứ nguyên như sau:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_f = & \frac{T_b \lambda A_c}{L} \left[(M^2(\theta_1 - \theta_a) + N_R(\theta_1^4 - \theta_s^4)) \frac{dX}{2} + \right. \\ & \sum_{i=2}^{n-1} (M^2(\theta_i - \theta_a) + N_R(\theta_i^4 - \theta_s^4)) dX + \\ & \left. (M^2(\theta_n - \theta_a) + N_R(\theta_n^4 - \theta_s^4)) \frac{dX}{2} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{Q}_{max} = \frac{T_b \lambda A_c}{L} [M^2(1 - \theta_a) + N_R(1 - \theta_s^4)] \quad (15)$$

3. Kiểm chứng mô hình FDM

Để kiểm chứng độ chính xác của mô hình số, mô hình phát triển trong nghiên cứu này được so sánh với phương pháp giải tích hay còn gọi là phương pháp chính xác (Exact). Do sự hạn chế của phương pháp giải tích là chỉ áp dụng được cho bài toán tuyến tính, cụ thể như bài toán truyền qua cánh như trong nghiên cứu này ứng với trường hợp $N_R = 0$. Lúc này phương trình (4) có dạng:

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} - M^2(\theta - \theta_a) = 0 \quad (16)$$

Theo [18], phân bố nhiệt độ không thứ nguyên trong cánh được xác định như sau:

$$\theta = \theta_a + (1 - \theta_a) \frac{\cosh m_0(L-x)}{\cosh m_0L}, \quad (17)$$

$$\text{Với } m_0 = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda A_c}}$$

Sai số tương đối trung bình giữa nhiệt độ không thứ nguyên của phương pháp FDM và phương pháp giải tích được xác định theo công thức sau:

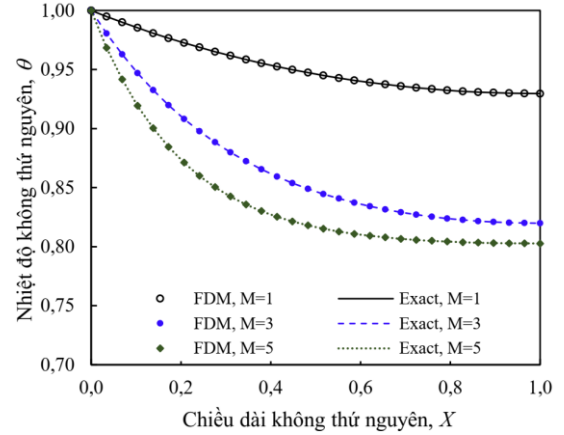
$$\varepsilon_{\text{error}}(\%) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\theta_{\text{FDM}} - \theta_{\text{exact}}|}{\theta_{\text{Exact}}} \times 100\% \quad (18)$$

Trong đó, $\varepsilon_{\text{error}}(\%)$ là sai số tương đối trung bình; θ_{FDM} là nhiệt độ tại các điểm nút của phương pháp FDM; θ_{Exact} là nhiệt độ của tại các nút của phương pháp chính xác và n là số nút lưới được chia theo phương pháp FDM.

4. Kết quả và bình luận

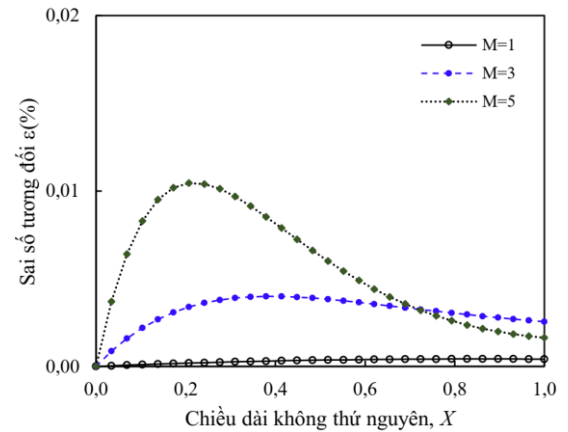
Các mật độ lưới khác nhau được áp dụng để kiểm tra sự không phụ thuộc của kết quả vào mật độ lưới ứng với các giá trị khác nhau của M . Kết quả cho thấy, sự phân bố

nhiệt độ trong cánh thay đổi không đáng kể khi lưới lớn hơn 30 nút. Hình 2 so sánh sự phân bố nhiệt độ không thứ nguyên dọc theo cánh của phương pháp FDM và lời giải chính xác ứng với $M = 1$, $M = 3$ và $M = 5$. Kết quả cho thấy, mô hình FDM cho kết quả rất tốt so với kết quả chính xác với sai số tương đối trung bình tăng dần là 0,0005%, 0,005% và 0,008% tương ứng với sự tăng của M . Điều này có thể giải thích là khi M tăng thì tốc độ thay đổi nhiệt độ $d\theta/dX$ ở phần chân cánh tăng dẫn đến sai số lớn.



Hình 2. Phân bố nhiệt độ không thứ nguyên của phương pháp chính xác và FDM với $M=1; 3; 5$, $N_R = 0$ và $\theta_a = 0,8$

Sai số tương đối của các điểm nút của phương pháp FDM so với phương pháp chính xác ứng với các giá trị khác nhau của M được biểu diễn ở Hình 3. Sai số tương đối lớn nhất ứng với $M = 5$ khoảng 0,01%. Các sai số chủ yếu nằm ở phần chân cánh nơi có sự thay đổi nhiệt độ lớn. Đặc biệt với các trường hợp giá trị của M lớn. Với phương pháp số cụ thể như phương pháp FDM trong nghiên cứu này, độ chính xác của phương pháp càng tăng khi mật độ lưới càng tăng hay số nút lưới tăng. Cụ thể trong nghiên cứu này số nút là 30 thì sai số tương đối trung bình cho trường hợp $M = 5$ khoảng 8×10^{-5} nếu tăng lên 100 thì sai số giảm xuống còn $1,6 \times 10^{-6}$.



Hình 3. Sai số tương đối giữa FDM và lời giải chính xác với $M = 1; 3; 5$, $N_R = 0$ và $\theta_a = 0,8$

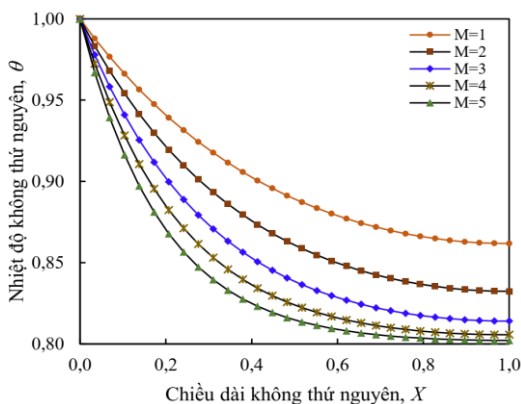
Bảng 1 so sánh phân bố nhiệt độ dọc theo cánh giữa phương pháp FDM trong nghiên cứu này với phương pháp chính xác và các phương pháp xấp xỉ khác như ADM, DTM, HPM với $M = 0,5$, $N_R = 0$ và $\theta_a = 0$. Để so sánh cùng vị trí các điểm nút dọc theo cánh với các phương pháp

đã đề cập, số nút được chọn là bằng bội số của 10 cộng thêm 1. Cụ thể trong nghiên cứu này số nút là 31. Kết quả cho thấy, phương pháp FDM cho kết quả rất tốt. Tuy nhiên vẫn còn một vài điểm có sai tuyệt đối lớn hơn các phương pháp xấp xỉ, và sai số này sẽ giảm khi tăng mật độ lưới. Nghiên cứu cho thấy, với 51 nút thì kết quả sai số tuyệt đối tương đồng với các phương pháp xấp xỉ với sai số tuyệt đối lớn nhất giảm xuống còn 1×10^{-6} .

Bảng 1. Phân bố nhiệt độ không thứ nguyên của FDM, phương pháp chính xác và các phương pháp ADM, DTM, HPM

X	Exact	FDM	ADM [10]	DTM [2]	HPM [19]
0	1	1	1	1	1
0,1	0,978135	0,978135	0,978135	0,978135	0,978135
0,2	0,958715	0,958716	0,958716	0,958715	0,958715
0,3	0,941693	0,941694	0,941694	0,941693	0,941693
0,4	0,927026	0,927027	0,927026	0,927026	0,927026
0,5	0,914677	0,914678	0,914677	0,914677	0,914677
0,6	0,904614	0,904616	0,904615	0,904614	0,904614
0,7	0,896814	0,896816	0,896815	0,896814	0,896814
0,8	0,891257	0,891259	0,891257	0,891257	0,891257
0,9	0,887928	0,887930	0,887928	0,887928	0,887928
1	0,886819	0,886821	0,886819	0,886819	0,886819

Hình 4 biểu diễn phân bố nhiệt độ không thứ nguyên dọc theo chiều dài cánh ứng với các giá trị khác nhau của đại lượng không thứ nguyên M với $N_R = 0$ và $\theta_a = 0,8$. Kết quả cho thấy, khi giá trị M càng lớn thì tốc độ thay đổi nhiệt độ từ chân cánh càng lớn. Ứng với $M = 5$ ta thấy nhiệt độ phân bố ở phần đầu cánh ứng với $X > 0,8$ tiến gần đến nhiệt độ môi trường ($\theta_a = 0,8$). Trong trường hợp này, sự trao đổi nhiệt giữa phần đầu cánh và môi trường giảm đi rất nhiều.

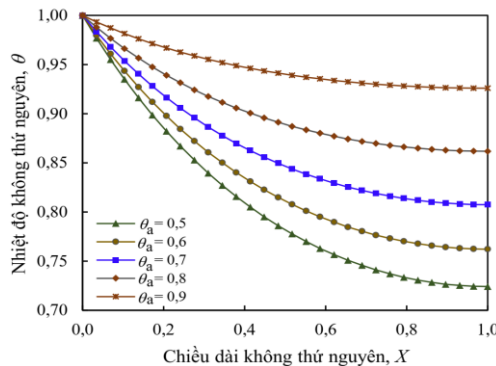


Hình 4. Phân bố nhiệt độ không thứ nguyên của cánh ứng với các giá trị khác nhau của M và $N_R=1, \theta_s = \theta_a = 0,8$

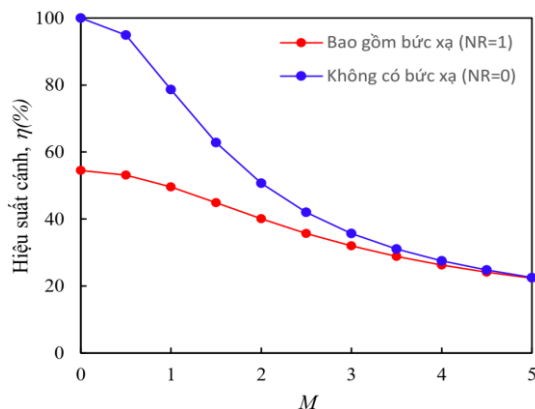
Phân bố nhiệt độ dọc theo cánh ứng với các giá trị khác nhau của nhiệt độ môi trường θ_a được thể hiện trong Hình 5. Nhiệt độ không thứ nguyên của môi trường càng cao thì phân bố nhiệt độ từ chân cánh đến đỉnh cánh càng nhỏ. Có thể thấy với trường hợp $\theta_a = 0,9$ phân bố nhiệt độ trong cánh thay đổi từ $\theta = 1$ ở chân cánh xuống $\theta = 0,93$ tại đỉnh cánh trong khi với $\theta_a = 0,5$ giá trị nhiệt độ giảm xuống còn 0,72 ở đỉnh cánh.

Hình 6 biểu diễn sự thay đổi hiệu suất cánh theo đại lượng không thứ nguyên M trong 2 trường hợp có trao đổi nhiệt bức xạ ($N_R = 1$) và không có trao đổi nhiệt bức xạ

($N_R = 0$). Kết quả cho thấy, hiệu suất cánh khi có trao đổi nhiệt bức xạ nhỏ hơn khi không kể đến trao đổi nhiệt bức xạ và sự khác nhau này giảm dần khi M tăng. Hiệu suất cánh cho cả 2 trường hợp đều giảm khi M tăng. Điều này có thể giải thích khi M tăng lượng nhiệt tỏa ra từ bề mặt cánh ra môi trường tăng làm phân bố nhiệt độ trong cánh giảm. Lượng nhiệt tỏa ra từ bề mặt cánh ra môi trường theo công thức (14) và (15) đều tăng khi M tăng. Tuy nhiên, tốc độ tăng của Q_f nhỏ hơn Q_{max} điều này làm cho hiệu suất cánh giảm khi M tăng.



Hình 5. Phân bố nhiệt độ không thứ nguyên dọc theo cánh ứng với các giá trị khác nhau của nhiệt độ môi trường θ_a với $M=1, N_R=1$



Hình 6. Sự phụ thuộc của hiệu suất cánh vào M , với $N_R = 0, 1, \theta_s = \theta_a = 0,8$

5. Kết luận

Nghiên cứu đã xây dựng được mô hình số cho bài toán truyền nhiệt qua cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật trao đổi nhiệt đối lưu bức xạ với môi trường dựa trên phương pháp sai phân hữu hạn. Ngôn ngữ lập trình Python được áp dụng để giải hệ phương trình đại số phi tuyến. Kết quả mô hình được so sánh với lời giải chính xác và các phương pháp xấp xỉ khác cho thấy, mô hình cho kết quả với độ chính xác rất cao.

Mô hình được áp dụng để tìm phân bố nhiệt độ trong cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật và ảnh hưởng của các thông số nhiệt, hình học đến hiệu quả của cánh.

Mô hình phát triển trong nghiên cứu này có thể áp dụng để phân tích nhiệt, thiết kế cánh thẳng biên dạng hình chữ nhật và tạo dữ liệu tin cậy cho bài toán phi tuyến để kiểm chứng các mô hình khác được phát triển cho bài toán truyền nhiệt qua cánh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. Joneidi, D. Ganji, and M. Babaelahi, "Differential transformation method to determine fin efficiency of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 36, no.7, pp. 757–762, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2009.03.020>
- [2] A. Moradi and H. Ahmadikia, "Analytical solution for different profiles of fin with temperature-dependent thermal conductivity", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, pp. 1-15, 2010. <https://doi.org/10.1155/2010/568263>
- [3] S. Sadri, M. R. Raveshi, and S. Amiri, "Efficiency analysis of straight fin with variable heat transfer coefficient and thermal conductivity", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, pp. 1283-1290, 2012. <https://doi.org/10.1007/s12206-012-0202-4>
- [4] P. L. Ndlovu, R. J. Moitsheki, "Analytical solutions for steady heat transfer in longitudinal fins with temperature-dependent properties", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/273052>
- [5] A. Dogonchi and D. Ganji, "Convection–radiation heat transfer study of moving fin with temperature-dependent thermal conductivity, heat transfer coefficient and heat generation", *Applied Thermal Engineering*, vol. 103, pp. 705–71, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.04.121>
- [6] F. Khani and A. Aziz, "Thermal analysis of a longitudinal trapezoidal fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 3, pp. 590–601, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.04.028>
- [7] F. Khani, M. A. Raji, and H. H. Nejad, "Analytical solutions and efficiency of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, no. 8, pp. 3327–3338, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.01.012>
- [8] G. Domairry and M. Fazeli, "Homotopy analysis method to determine the fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity", *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, no. 2, pp. 489–499, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2007.09.007>
- [9] C. H. Chiu and C. K. Chen, "A decomposition method for solving the convective longitudinal fins with variable thermal conductivity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 45, no.10, pp. 2067–2075, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(01\)00286-1](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(01)00286-1)
- [10] C. Arslanturk, "A decomposition method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 32, no. 6, pp. 831–841, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2004.10.006>
- [11] M. H. Chang, "A decomposition solution for fins with temperature dependent surface heat flux", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 48, no. 9, pp. 1819–1824, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.07.049>
- [12] G. Oguntala, R. Abd-Alhameed, G. Sobamowo, and I. Danjuma, "Performance, thermal stability and optimum design analyses of rectangular fin with temperature-dependent thermal properties and internal heat generation", *Journal of Computational Applied Mechanics*, vol. 49, no. 1, pp. 37–43, 2018. <https://doi.org/10.22059/jcamech.2017.244988.203>
- [13] M. Turkyilmazoglu, "Exact solutions to heat transfer in straight fins of varying exponential shape having temperature dependent properties", *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 55, pp. 69–75, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2011.12.019>
- [14] Y. M. Han, J. S. Cho, and H. S. Kang, "Analysis of a one-dimensional fin using the analytic method and the finite difference method", *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 9, no. 1, pp. 91–98, 2005.
- [15] C. Harley and R. J. Moitsheki, "Numerical investigation of the temperature profile in a rectangular longitudinal fin", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 13, no. 5, pp. 2343–2351, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.02.002>
- [16] P. Mert Cuce and E. Cuce, "Optimization of configurations to enhance heat transfer from a longitudinal fin exposed to natural convection and radiation", *International Journal of Low-Carbon Technologies*, vol. 9, no. 4, pp. 305–310, 2014. <https://doi.org/10.1093/ijlct/ctt005>
- [17] M. G. Sobamowo, "Analysis of convective longitudinal fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation", *Alexandria Engineering Journal*, vol. 56, no. 1, pp. 1–11, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.04.022>
- [18] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, and D. P. DeWitt, *Introduction to heat transfer*, John Wiley & Sons, 2011.
- [19] A. Rajabi, "Homotopy perturbation method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity", *Physics Letters A*, vol. 364, no. 1, pp. 33–37, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.11.062>