

PHƯƠNG PHÁP CHỈNH HÓA L^p CHO BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH NGUỒN THUỘC KHÔNG GIAN $L^p(\Omega)$ ($p > 1$) TRONG BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC HAI CHIỀU

L^p -REGULARIZATION METHOD FOR THE SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM IN THE $L^p(\Omega)$ SPACE ($p > 1$) FOR THE DIRICHLET PROBLEM OF TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

Phạm Quý Mười*, Mai Nguyễn Minh Hoàng, Chữ Văn Tiệp, Châu Vinh Khánh,
Võ Quang Duy, Đinh Thành Tuấn

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam¹

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: pqmuoi@ued.udn.vn

(Nhận bài / Received: 02/10/2024; Sửa bài / Revised: 08/01/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 08/01/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.430

Tóm tắt - Trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu bài toán xác định nguồn trong bài toán Dirichlet cho phương trình elliptic hai chiều từ dữ liệu đo đạc trên toàn miền. Giả sử rằng, hàm nguồn thuộc không gian $L^p(\Omega)$ với $p > 1$, khi đó bài toán Dirichlet có nghiệm yếu duy nhất và bài toán xác định nguồn là đặt không chỉnh. Để giải bài toán xác định nguồn này, nhóm tác giả đề xuất phương pháp chỉnh hóa kiểu Tikhonov với hàm phạt là chuẩn trong không gian $L^p(\Omega)$. Các kết quả chính của bài báo là chứng minh tính đặt chỉnh của bài toán chỉnh hóa, đưa ra một quy tắc chọn tham số chỉnh hóa tiên nghiệm để cho nghiệm của bài toán chỉnh hóa hội tụ về nghiệm cần tìm. Hơn nữa, nhóm tác giả cũng chứng minh được phiếm hàm đo sai số giữa nghiệm của bài toán Dirichlet và dữ liệu đo khả vi Fréchet.

Từ khóa - Chỉnh hóa kiểu Tikhonov; chỉnh hóa L^p ; bài toán xác định nguồn; nghiệm yếu; phương trình elliptic hai chiều.

1. Đặt vấn đề

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Sử dụng các ký hiệu chuẩn về các không gian Sobolev như $L^p(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ và $H_0^1(\Omega)$. Chi tiết về các không gian này có thể tham khảo trong tài liệu [1].

Bài toán Dirichlet cho phương trình elliptic là bài toán tìm nghiệm $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + bu = f & \text{trong } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u = 0 & \text{trên } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó

$$a, b \in L^\infty(\Omega), a \geq a_0 > 0, b \geq 0 \text{ hầu khắp nơi} \quad (2)$$

$$\text{và } f \in L^p(\Omega), p > 1 \quad (3)$$

là các hàm cho trước. Nhóm tác giả sẽ chứng minh, bài toán

Abstract - In this paper, the authors study the source identification problem in the Dirichlet problem for two-dimensional elliptic equations from measurements over the entire domain. Under the assumption that, the source function belongs to the space $L^p(\Omega)$ with $p > 1$, then the Dirichlet problem has a unique weak solution and that the source identification problem is ill-posed. To solve the source identification problem, the authors propose a Tikhonov-type regularization method with a penalty term being the norm of the $L^p(\Omega)$ space. The main results of the paper include proving the well-posedness of the regularization problem and providing a rule for selecting the regularization parameter a priori to ensure that the solution of the regularized problem converges to the desired solution. Furthermore, the authors also prove that the functional measuring of the error between the solution of the Dirichlet problems and the data is Fréchet differentiable.

Key words - Tikhonov regularization; L^p regularization; source identification problem; weak solution; two-dimensional elliptic equation.

này có duy nhất một nghiệm yếu.

Ký hiệu u^* là nghiệm duy nhất của bài toán ứng với f^* . Trong thực tế, không biết được u^* và f^* . Giả sử rằng, bằng đo đạc biết được dữ liệu nhiễu $u^\delta \in L^2(\Omega)$ của u^* với

$$\|u^* - u^\delta\| \leq \delta, \quad (4)$$

trong đó, $\delta > 0$ là mức sai số. Nhóm tác giả muốn xác định hàm f^* từ dữ liệu nhiễu u^δ này. Bài toán này được gọi là bài toán xác định nguồn cho phương trình elliptic.

Trong trường hợp $p = 2$, bài toán Dirichlet và bài toán xác định nguồn cho phương trình elliptic đã được nghiên cứu bởi một số tác giả trong [1]. Trong bài báo nhóm tác giả nghiên cứu hai bài toán này cho trường hợp $p > 1$ và $d = 2$. Các kết quả chính của bài báo bao gồm:

¹ The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam (Pham Quy Muoi, Mai Nguyen Minh Hoang, Chu Van Tiep, Chau Vinh Khanh, Vo Quang Duy, Dinh Thanh Tuan)

• Chứng minh bài toán Dirichlet cho phương trình elliptic (1) có nghiệm yếu duy nhất với $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$ và trong không gian hai chiều ($d = 2$).

• Chứng minh phiếm hàm đo sai số giữa nghiệm của bài toán Dirichlet và dữ liệu là liên tục, lỗi và khả vi Fréchet.

• Đề xuất phương pháp chính hóa kiểu chính hóa L^p , và chứng minh tính đặt chính của bài toán chính hóa cũng như đưa ra một quy tắc chọn tham số chính hóa tiên nghiệm đảm bảo sự hội tụ của nghiệm của bài toán chính hóa tối nghiệm của bài toán xác định nguồn khi sai số của dữ liệu dân về không.

2. Một số kết quả cần dùng

Trong phần này, nhắc lại một số kết quả được sử dụng trong bài báo này. Cụ thể, nhắc lại các không gian $H^1(\Omega)$ và $H_0^1(\Omega)$, định lý Lax-Milgram, định lý nhúng Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Các kết quả này được tham khảo từ tài liệu [1], [3].

Định nghĩa 2.1 Không gian

$$H^1(\Omega) = \{y \in L^2(\Omega) \mid D_i y \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, N\}$$

và

$$H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \mid y = 0 \text{ trên } \Gamma \subset \mathbb{R}^d\}$$

được trang bị chuẩn

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (y^2 + |\nabla y|^2) dx \right)^{1/2},$$

trong đó, $|\nabla y|^2 = (D_1 y)^2 + \dots + (D_N y)^2$, và với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Khi đó, $H^1(\Omega)$ trở thành không gian Hilbert.

Định lý 2.1 ([1, Định lý Lax-Milgram]) Giả sử H là một không gian Hilbert thực, $a(u, v)$ là phiếm hàm song tuyến tính trên H . Giả thiết $a(u, v)$ thỏa mãn các điều kiện

(i) Tồn tại $c > 0$ sao cho $|a(u, v)| \leq c \|u\| \cdot \|v\|$ với mọi $u, v \in H$.

(ii) Tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $a(u, u) \geq \gamma \|u\|^2$ với mọi $u \in H$.

Khi đó, với mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên H đều tồn tại duy nhất $u \in H$ sao cho:

$$F(v) = a(u, v), \quad \forall v \in H.$$

Hơn nữa, tồn tại hằng số c_a , không phụ thuộc vào F , sao cho $\|u\| \leq c_a \|F\|$.

Định lý 2.2 ([1, Định lý biểu diễn Riesz]) Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi toán tử tuyến tính liên tục $f^* \in H^*$, tồn tại duy nhất $u \in H$ sao cho $f^*(H) = \langle u, v \rangle$ với mọi $v \in H$ và $\|f^*\|_{H^*} = \|u\|_H$.

Định lý 2.3 ([1, Định lý nhúng Sobolev]) Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là miền bị chặn với biên Lipschitz. Lấy $1 < p < \infty$

và m là các số nguyên không âm. Khi đó, các phép nhúng sau tồn tại và liên tục:

(i) Với $mp < d : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ khi

$$1 \leq q \leq \frac{dp}{d - mp}.$$

(ii) Với $mp = d : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ khi $1 \leq q < \infty$.

(iii) Với $mp > d : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Đặc biệt, nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, thì

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

với mọi $1 \leq q < \infty$.

Định lý 2.4 ([1, Bất đẳng thức Poincaré]) Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một miền bị chặn Lipschitz, và lấy $\Gamma_1 \subset \Gamma$ là một tập đo được sao cho: $|\Gamma_1| > 0$. Khi đó, tồn tại hằng số $c(\Gamma_1) > 0$, không phụ thuộc vào $y \in H^1(\Omega)$, sao cho

$$\|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c(\Gamma_1) \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \left(\int_{\Gamma_1} y ds \right)^2 \right),$$

với mọi $y \in H^1(\Omega)$.

Sử dụng bất đẳng thức Poincaré, có thể chỉ ra, không gian $H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \mid y = 0 \text{ trên } \Gamma\}$ với chuẩn

$\|y\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx \right)^{1/2}$ là một không gian Hilbert và trong

không gian này, chuẩn $\|\cdot\|$ tương đương với chuẩn $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Định lý 2.5 ([1, Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz]) Cho H là không gian Hilbert thực. Khi đó, ta có:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in H,$$

trong đó, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Dirichlet

Trong phần này chỉ ra rằng, bài toán Dirichlet cho phương trình elliptic (1) có nghiệm yếu duy nhất với các giả thiết đã đưa ra.

Định nghĩa 3.1 Hàm số $u \in H_0^1(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1) nếu

$$\int_{\Omega} (a \nabla u \nabla v + buv) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Định lý 3.1 Giả sử a, b và f là các hàm thỏa mãn các điều kiện (2)-(3). Khi đó, bài toán (1) có duy nhất một nghiệm yếu $u \in H_0^1(\Omega)$ thỏa mãn

$$\|u\| \leq c \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (5)$$

trong đó $c > 0$ là một hằng số không phụ thuộc vào f .

Chứng minh.

$$\text{Đặt } a[u, v] = \int_{\Omega} (a \nabla u \nabla v + buv) dx, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Chúng ta dễ dàng chỉ ra được $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ song tuyến tính.

Hơn nữa, với mọi $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ta có

$$\begin{aligned} |a[u, v]| &= \left| \int_{\Omega} (a \nabla u \nabla v + buv) dx \right| \\ &\leq \|a\|_{L^2(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u \nabla v| dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |uv| dx \\ &\leq M \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq M \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

trong đó, $M = \max \left\{ \|a\|_{L^2(\Omega)}, \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$.

Mặt khác, sử dụng giả thiết (2) và Định lý 2.4 ta có

$$\begin{aligned} a[u, u] &= \int_{\Omega} (a \nabla u \nabla u + buu) dx \\ &\geq a_0 \int_{\Omega} (\nabla u \nabla u) dx \geq \frac{a_0}{c(\Gamma_1)} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

trong đó, $c(\Gamma_1) > 0$ là hằng số ($\Gamma_1 \subset \Gamma$).

Đặt $F(v) = \int_{\Omega} f v dx, v \in H_0^1(\Omega)$.

Với $f \in L^p(\Omega), p \in (1, 2)$, dễ dàng chỉ ra được F là một phiếm hàm tuyến tính.

Sử dụng kết quả từ Định lý 2.3 với $d = 2$, ta có:

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \geq 1.$$

Từ đây, ta suy ra $\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Với $p \in (1, 2)$, chọn q sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} |F(v)| &= \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} \|f\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq c \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} \|f\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Do đó, F là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $H_0^1(\Omega)$ với $\|F\| \leq c \|f\|_{L^p(\Omega)}$.

Áp dụng Định lý 2.1, tồn tại duy nhất $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho $a[u, v] = F(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$ và

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_a \|F\| \leq c \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

trong đó, $c > 0$ là một hằng số.

Vậy định lý được chứng minh.

4. Phương pháp chỉnh hóa chỉnh hóa L^p

Phương pháp chỉnh hóa L^p là một trường hợp cụ thể của phương pháp chỉnh hóa kiểu Tikhonov. Trong các bài toán ngược, phương pháp chỉnh hóa Tikhonov thường được sử dụng rộng rãi. Chi tiết về phương pháp chỉnh hóa này cũng như việc áp dụng nó cho một số bài toán ngược,

người đọc có thể xem ở các tài liệu [5, 6, 7, 8, 9].

Từ Định lý 3.1, định nghĩa toán tử nghiệm như sau:

$$S : L^p(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega),$$

$f \mapsto Sf = u$ là nghiệm của bài toán (1).

Khi đó, bài toán xác định nguồn cho phương trình elliptic trở thành:

Cho dữ liệu nhiễu $u^\delta \in L^2(\Omega)$ của u^* với

$$\|u^\delta - u^*\| \leq \delta, \quad (6)$$

tìm nghiệm xấp xỉ của $f^* \in L^p(\Omega)$ sao cho

$$Su^* = f^*. \quad (7)$$

Vì $H_0^1(\Omega)$ được nhúng compact vào $L^2(\Omega)$, nên toán tử nghiệm $S : L^p(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ là toán tử tuyến tính, liên tục và compact. Do bài toán (6)-(7) là bài toán đặt không chỉnh nên để tìm nghiệm xấp xỉ cho f^* áp dụng phương pháp chỉnh hóa kiểu Tikhonov với hàm phạt là chuẩn $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}^p$ với $p > 1$. Với phương pháp này, nghiệm chỉnh hóa là nghiệm của bài toán tối ưu sau

$$\operatorname{argmin}_{f \in L^p(\Omega)} F(f) + \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^2, \quad (8)$$

trong đó, $F(f) = \frac{1}{2} \|Sf - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2$ và $\alpha > 0$ là tham số chỉnh hóa.

Định lý 4.1 Phiếm hàm $F : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(f) = \frac{1}{2} \|Sf - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

liên tục, lồi và khả vi Fréchet trong không gian $L^p(\Omega)$ với $p \in (1, 2)$ và $F'(f) = g$ với g là nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla g) + bg = Sf - u^\delta \text{ trong } \Omega, \\ g = 0 \text{ trên } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (9)$$

Chứng minh.

Cho $f, f^0 \in L^p(\Omega)$. Ta có

$$\begin{aligned} 2(F(f) - F(f^0)) &= \|Sf - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|Sf^0 - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|Sf - Sf^0 + Sf^0 - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|Sf^0 - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|Sf - Sf^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \langle Sf - Sf^0, Sf^0 - u^\delta \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (10) \end{aligned}$$

Vì S là toán tử liên tục nên từ đẳng thức trên ta suy ra F là phiếm hàm liên tục trên $L^p(\Omega)$.

Tiếp theo, chứng minh F khả vi Fréchet. Vì g là nghiệm yếu của bài toán (9) nên công thức nghiệm yếu của g là

$$\int_{\Omega} (a \nabla g \nabla v + bgv) dx = \int_{\Omega} (Sf - u^\delta) v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Thay $v = S(f - f^0)$ vào công thức nghiệm yếu, ta có

$$\begin{aligned} & \langle S(f - f^0), Sf - u^\delta \rangle \\ &= \int_{\Omega} (a \nabla g \nabla S(f - f^0) + b g S(f - f^0)) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Mặt khác, công thức nghiệm yếu của Sf và Sf^0 lần lượt là

$$\int_{\Omega} (a \nabla Sf \nabla v + b Sf v) dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (12)$$

$$\text{và } \int_{\Omega} (a \nabla Sf^0 \nabla v + b Sf^0 v) dx = \int_{\Omega} f^0 v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (13)$$

Trừ hai vế của đẳng thức (12) và (13) cho nhau và cho $v = g$, ta được

$$\int_{\Omega} (a \nabla S(f - f^0) \nabla g + b S(f - f^0) g) dx = \int_{\Omega} (f - f^0) g dx$$

Kết hợp với (11), ta được

$$\langle S(f - f^0), Sf - u^\delta \rangle = \langle f - f^0, g \rangle. \quad (14)$$

Do đó, từ (10), ta suy ra

$$\begin{aligned} & 2(F(f) - F(f^0)) \\ &= \|S(f - f^0)\|^2 + 2\langle g, f - f^0 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} 2g(f - f^0) dx + \|S(f - f^0)\|^2 \\ &= \int_{\Omega} 2g(f - f^0) dx + o(\|f - f^0\|). \end{aligned}$$

Vậy, F khả vi Fréchet và $F'(f) = g$.

Cuối cùng, vì S là toán tử tuyến tính và chuẩn $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$

là phiếm hàm lồi nên F là phiếm hàm lồi.

Dễ thấy F lồi, $F'(f) = g$, trong đó:

$$-\operatorname{div}(a \nabla g) + b g = Sf - u^\delta; g = 0 \text{ trên } \partial \Omega$$

Định lý 4.2 Bài toán (8) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

$$\text{Đặt } \Theta(f) = F(f) + \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Ta có Θ là phiếm hàm lồi chặt, không âm, liên tục và coercive nên suy ra tồn tại duy nhất nghiệm.

Định lý 4.3 Giả sử

$$f^\delta = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|Sf - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad (15)$$

$$f^n = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|Sf - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (16)$$

Khi đó, nếu $u^n \rightarrow u^\delta$ trong $L^2(\Omega)$ thì $f_n \rightarrow f^\delta$ trong $L^p(\Omega)$.

Chứng minh.

Từ định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|Sf_n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f^n\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq \frac{1}{2} \|Sf^* - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f^*\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra dãy $\{Sf_n\}$ bị chặn trong $L^2(\Omega)$ và dãy $\{f^n\}$ bị chặn trong $L^p(\Omega)$. Do đó, tồn tại một dãy con $\{f_{n_k}\}$ sao cho dãy $\{Sf_{n_k}\}$ hội tụ yếu đến

$S\bar{f} \in L^2(\Omega)$ và dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ yếu đến $\bar{f} \in L^p(\Omega)$.

Vì các chuẩn $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ và $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ là các hàm nửa liên tục dưới yếu nên

$$\|\bar{f}\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_k \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}, \quad (17)$$

$$\|S\bar{f} - u^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_k \|Sf_{n_k} - u^{n_k}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (18)$$

Từ (17) và (18), ta suy ra

$$\begin{aligned} & \|S\bar{f} - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\bar{f}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq \liminf_k \|Sf_{n_k} - u^{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \liminf_k \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq \liminf_k (\|Sf_{n_k} - u^{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p) \\ & \leq \limsup_k (\|Sf_{n_k} - u^{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p) \\ & \leq \lim_k (\|Sf - u^{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^p), f \in L^p(\Omega) \\ & = \|Sf - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^p, f \in L^p(\Omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Suy ra $\bar{f}$ là một nghiệm của bài toán (15).

Vì nghiệm của bài toán (15) là duy nhất nên ta có $f_n \xrightarrow{w} \bar{f} = f^\delta$ trong $L^p(\Omega)$.

Từ (19) cho $f = f^\delta$ ta suy ra

$$\begin{aligned} & \|Sf_n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \rightarrow \|Sf^\delta - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f^\delta\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned} \quad (20)$$

Bây giờ ta chứng minh $f_n \rightarrow f^\delta$ trong $L^p(\Omega)$ bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, giả sử $f_n \not\rightarrow f^\delta$ trong $L^p(\Omega)$. Khi đó, $\limsup \|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p > \|f^\delta\|_{L^p(\Omega)}^p$. Tức là, tồn tại dãy $\{f_{n_k}\}$ thỏa mãn $\lim_k \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p > \|f^\delta\|_{L^p(\Omega)}^p$.

Kết hợp với (20) ta có

$$\begin{aligned} & \lim_k \|Sf_{n_k} - u^{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|Sf^\delta - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|f^\delta\|_{L^p(\Omega)}^p - \alpha \lim_k \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &= \|Sf^\delta - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha (\|f^\delta\|_{L^p(\Omega)}^p - \lim_k \|f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)}^p) \\ &< \|Sf^\delta - u^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ (mâu thuẫn với (18)).} \end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh.

Định lý 4.4 Cho $u^\delta \in L^2(\Omega)$ với $\|u^\delta - u^*\| < \delta$ và hàm $\alpha = \alpha(\delta)$ thỏa mãn

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \text{ khi } \delta \rightarrow 0. \quad (21)$$

Cho dãy $\delta_n \rightarrow 0$, ta đặt $\alpha_n = \alpha(\delta_n)$, $\forall n$ và

$$f_{\alpha_n}^\delta = \operatorname{argmin}_{f \in L^p(\Omega)} \frac{1}{2} \|Sf - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_n \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \quad (22)$$

Khi đó, $f_{\alpha_n}^{\delta_n} \rightarrow f^*$ trong $L^p(\Omega)$.

Chứng minh.

Vì $f_{\alpha_n}^{\delta_n}$ là nghiệm của (22) nên ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|Sf_{\alpha_n}^{\delta_n} - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_n \|f_{\alpha_n}^{\delta_n}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq \frac{1}{2} \|Sf^* - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_n \|f^*\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & = \frac{1}{2} \|u^* - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_n \|f^*\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq \frac{1}{2} \delta_n^2 + \alpha_n \|f^*\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\frac{1}{2} \|Sf_{\alpha_n}^{\delta_n} - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \delta_n^2 + \alpha_n \|f^*\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad (23)$$

$$\|f_{\alpha_n}^{\delta_n}\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|f^*\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (24)$$

Từ giả thiết (21), ta có dãy $\{Sf_{\alpha_n}^{\delta_n} - u^{\delta_n}\}$ bị chặn trong $L^2(\Omega)$ và dãy $\{f_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$ bị chặn trong $L^p(\Omega)$. Do đó, tồn tại một dãy con, cũng ký hiệu là $\{f_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$ thỏa mãn $f_{\alpha_n}^{\delta_n} \xrightarrow{w} \bar{f}$ trong $L^p(\Omega)$ và $Sf_{\alpha_n}^{\delta_n} - u^{\delta_n} \xrightarrow{w} S\bar{f} - u^*$ trong $L^2(\Omega)$.

Do tính nửa liên tục dưới yếu của các chuẩn, ta có

$$\begin{aligned} 0 & \leq \|S\bar{f} - u^*\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_n \|Sf_{\alpha_n}^{\delta_n} - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \stackrel{(23)}{=} \lim_n \|Sf_{\alpha_n}^{\delta_n} - u^{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $S\bar{f} = u^*$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \|\bar{f}\|_{L^p(\Omega)} & \leq \liminf_n \|f_{\alpha_n}^{\delta_n}\|_{L^p(\Omega)} \leq \limsup_n \|f_{\alpha_n}^{\delta_n}\|_{L^p(\Omega)} \\ & \stackrel{(24)}{\leq} \|f^*\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_n \|f_{\alpha_n}^{\delta_n}\|_{L^p(\Omega)} = \|f^*\|_{L^p(\Omega)}$.

Do đó, $\bar{f} = f^*$ và $\lim_n \|f_{\alpha_n}^{\delta_n}\|_{L^p(\Omega)} = \|f^*\|_{L^p(\Omega)}$.

5. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã nghiên cứu bài toán xác định nguồn trong bài toán Dirichlet của phương trình elliptic hai chiều. Với điều kiện hàm nguồn thuộc không gian $L^p(\Omega)$ với $p > 1$, chứng minh được bài toán Dirichlet có nghiệm yếu duy nhất (Định lý 3.1) và bài toán xác định nguồn là bài toán ngược đặt không chỉnh (xem Phần 4). Vì vậy, để giải bài toán này một cách ổn định, nhóm tác giả đã áp dụng phương pháp chỉnh hóa kiểu Tikhonov với hàm phạt là chuẩn $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}^p$. Nghiên cứu đã chứng minh rằng, bài toán chỉnh hóa là đặt chỉnh (Định lý 4.1, Định lý 4.2) và đưa ra một phương pháp lựa chọn tham số chỉnh hóa

tiền nghiệm (Định lý 4.3) để đảm bảo rằng nghiệm của bài toán chỉnh hóa hội tụ về nghiệm của bài toán ban đầu khi sai số dữ liệu tiến về không. Ngoài ra, nghiên cứu cũng chứng minh rằng, phiếm hàm đo sai số giữa nghiệm và dữ liệu là lồi, khả vi Fréchet và đạo hàm Fréchet của phiếm hàm này hoàn toàn được xác định (Định lý 4.1). Đây là những kết quả cơ bản, cần thiết trong lý thuyết chỉnh hóa, làm cơ sở để tiếp tục đề xuất các phương pháp giải số cho bài toán xác định nguồn.

Việc giải số bài toán chỉnh hóa trong bài toán này vẫn là một bài toán mở và nhóm tác giả dự định tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới. Vì bài toán chỉnh hóa là bài toán tối ưu lồi chặt nên nhóm tác giả sẽ áp dụng và phát triển các giải thuật có tốc độ hội tụ nhanh, đã được nghiên cứu và phát triển gần đây trong các công trình [10 - 15].

Lời cảm ơn: Hai tác giả, Châu Vinh Khánh và Võ Quang Duy, được tài trợ bởi Chương trình học bổng đào tạo thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), mã số VINIF.2024.ThS.59 và VINIF.2024.ThS.58.

REFERENCES

- [1] F. Tröltzsch. *Optimal Control of Partial Differential Equations Theory, Methods and Applications*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2005.
- [2] E. Hebey. *Variational methods and elliptic equations in Riemannian geometry*. Université de Cergy-Pontoise, Département de Mathématiques - Site Saint-Martin, 2003.
- [3] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions, Systems and control: foundations and applications series*. Boca Raton (FL): CRC Press, 1992.
- [4] W. A. Strauss. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [5] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [6] R. Manzo. "On Tikhonov regularization of optimal Neumann boundary control problem for an ill-posed strongly nonlinear elliptic equation with an exponential type of non-linearity". *Differential Integral Equations*, vol. 33, no. 3/4, pp. 139-162, 2020.
- [7] D. N. Hao, and T. N. T. Quyen. "Convergence rates for Tikhonov regularization of a two-coefficient identification problem in an elliptic boundary value problem". *Numer. Math.*, vol. 120, pp. 45-47, 2012.
- [8] D. N. Hao, L. T. T. Giang, and N. T. N. Oanh. "Determination of the right-hand side in elliptic equations". *Optimization*, vol. 73, no. 4, pp. 1195-1227, 2022.
- [9] N. H. Tuan and L. X. Dai, "Reconstruct the unknown source for the fractional elliptic equations: Regularization method and error estimates". *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*, vol. 7, no. 5, pp. 206-217, 2023.
- [10] Y. Nesterov. *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] J. Nocedal and J. S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2013.
- [12] P. Q. Muoi et al., "Descent gradient methods for nonsmooth minimization problems in ill-posed problems". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 298, pp. 105-122, 2016.
- [13] A. Neubauer. "On Nesterov acceleration for landweber iteration of linear ill-posed problems". *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. vol. 25, no. 3, pp. 381-390, 2017.
- [14] S. Kindermann. "Optimal-order convergence of Nesterov acceleration for linear ill-posed problems". *Inverse Problems*. vol. 37, no. 6, pp. 065002, 2021.
- [15] P. Q. Muoi and C. V. Khanh. "An optimal algorithm for minimax problems with smooth components". *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, vol. 22, no. 6b, pp. 19-26, 2024.
- [16] P. Q. Muoi, V. Q. Duy, and P. D. Tuan. "Generalized Nesterov's algorithm for constrained minimization problems on closed convex sets". *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, vol. 21, no. 12.1, pp. 90-94, 2024.