ỨNG DỤNG TÍCH CHẬP ĐỂ NGHIÊN CỨU MỘT SỐ KẾT QUẢ TRÊN LỚP HÀM BỊ CHẶN VÀ KHẢ TÍCH ĐỊA PHƯƠNG

APPLYING THE CONVOLUTION TO STUDY SOME PROPERTIES ON THE LOCAL BOUNDED AND LOCAL INTEGRABLE FUNCTION CLASS

Hồ Duy Nguyên[1]*, Bùi Lê Hương Thảo[1], Tạ Tiểu Mi[1], Trần Mạnh Tân[1], Phan Huy Phúc[1], Phạm Văn Dược[2]

[1]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

[2]Đại học Duy Tân, Việt Nam

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: nguyenlqddn@gmail.com

(Nhận bài / Received: 15/11/2024; Sửa bài / Revised: 02/02/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 05/02/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.481

Tóm tắt - Trong bài báo này, nhóm tác giả đã ứng dụng tích chập để nghiên cứu một số kết quả trên lớp hàm khả tích và bị chặn địa phương. Trong [1], đã có kết quả xấp xỉ hàm điều hòa dưới bởi họ các hàm điều hòa dưới trơn. Ở đây, nhóm tác giả sử dụng kỹ thuật đó cho lớp hàm rộng hơn đó là lớp hàm khả tích và bị chặn địa phương. Cụ thể, nhóm tác giả đã sử dụng tích chập để xây dựng hàm điều hòa dưới trơn từ hàm khả tích và bị chặn địa phương và nghiên cứu một số kết quả của họ hàm này như tính giảm và tính hội tụ tới hàm chính quy hoá. Sử dụng các kết quả đạt được đó, nhóm tác giả rút ra được một kết quả mạnh hơn bằng việc loại bỏ đi tính bị chặn dưới địa phương của hàm gốc.

Từ khóa - Tích chập; hàm khả tích địa phương; hàm bị chặn địa phương; hàm điều hòa dưới; hàm nửa liên tục trên

Abstract - In this paper, we are going to use convolution to establish several results concerning the class of integrable and locally bounded functions. In [1], the author has proven the estimation of the subharmonic functions by the family of smooth subharmonic functions. In the present work, the authors extend this technique to a wider function class of integrable and locally bounded functions. Specifically, the authors have used convolution to construct smooth subharmonic functions from the functions of local bound and local integration and studied some properties of these functions. Building on these results, the authors derive a stronger result that omits the local bound of the original function.

Key words - Convolution; local integrable functions; local bounded functions; subharmonic functions; upper semicontinuous functions

1. Giới thiệu

Hàm số, vừa là đối tượng, vừa là công cụ nghiên cứu chính của toán học nói riêng và của nhiều lĩnh vực khoa học khác nói chung. Lớp hàm trơn là lớp hàm cơ bản và rất quan trọng. Nhiều kết quả đẹp đã được chứng minh trên lớp hàm này. Tuy nhiên, khi biểu diễn mối quan hệ của nhiều sự vật, hiện tượng với nhau trong tự nhiên và trong xã hội dưới dạng hàm số thì đa phần là các hàm nhận được không trơn, thậm chí có thể không còn liên tục. Vì vậy, một trong những nhiệm vụ của toán học là nghiên cứu mở rộng tới các lớp hàm rộng hơn các lớp hàm trơn nhằm đáp ứng các yêu cầu thực tế đó. Dù là rộng hơn, nhưng các lớp hàm đó vẫn còn bảo tồn được một số tính chất quan trọng của lớp hàm trơn hoặc phải được xấp xỉ bởi các hàm trơn.

Hàm điều hòa dưới là đối tượng nghiên cứu chính của lý thuyết thế vị. Đây là lớp hàm với yêu cầu trong định nghĩa chỉ là nửa liên tục trên và khả tích địa phương nên có phạm vi rộng và có nhiều ứng dụng trong toán học và trong hệ động lực. Trong [1], tác giả đã thiết lập kết quả xấp xỉ hàm điều hòa dưới bởi họ các hàm điều hòa dưới trơn bằng cách sử dụng khái niệm tích chập. Đây là kết quả quan trọng, có ý nghĩa cả về lý thuyết lẫn ứng dụng.

Trong bài báo này, nhóm tác giả sử dụng công cụ tích chập và kỹ thuật tương tự trong [1] để chứng minh một số kết quả trên lớp hàm rộng hơn là lớp hàm khả tích và bị chặn địa phương. Cụ thể, trong các Định lý 3.1 và Định lý 3.2, nhóm tác giả đã sử dụng tích chập để xây dựng hàm điều hòa dưới trơn từ hàm khả tích và bị chặn địa phương và nghiên cứu một số kết quả của họ hàm này như tính giảm và tính hội tụ tới hàm chính quy hoá. Sử dụng các định lý này, nhóm tác giả rút ra được một số kết quả của hàm chính quy hoá ở Hệ quả 3.3. Trong Định lý 3.4, nhóm tác giả đã mở rộng kết quả trong Hệ quả 3.3 bằng việc loại bỏ đi tính bị chặn dưới địa phương của hàm gốc.

2. Kiến thức chuẩn bị

Trong mục này, nhóm tác giả sẽ nhắc lại một số khái niệm và kết quả để chuẩn bị cho việc trình bày các kết quả chính ở mục sau. Chi tiết hơn về các khái niệm và kết quả liên quan, ta có thể tham khảo thêm trong các tài liệu [1]-[4].

2.1 Hàm nửa liên tục trên: Cho X là một không gian tô pô. Hàm $u: X \to [-\infty, \infty)$ được gọi là hàm nửa liên tục trên nếu tập $\{x \in X: u(x) < a\}$ là tập mở trong X với mọi $a \in \mathbb{R}$. Hàm $v: X \to (-\infty, \infty]$ được gọi là hàm nửa liên tục dưới nếu hàm $-v$ là hàm nửa liên tục trên.

[1] The University of Danang - University of Science and Education, Vietnam (Ho Duy Nguyen, Bui Le Huong Thao, Ta Tieu Mi, Tran Manh Tan, Phan Huy Phuc)

[2] Duy Tan University, Vietnam (Pham Van Duoc)

2.2 Nhận xét: Nếu $\{u_i: i \in I\}$ là họ các hàm nửa liên tục trên thì hàm $u = \inf\{u_i: i \in I\}$ cũng là hàm nửa liên tục trên. Thật vậy, lấy $a \in \mathbb{R}$, theo định nghĩa của inf ta có

$$\{x \in X: u(x) < a\} = \cup_{i\in I}\{x \in X: u_i(x) < a\}.$$

Do $\{x \in X: u_i(x) < a\}$ là các tập mở nên suy ra tập $\{x \in X: u(x) < a\}$ cũng là tập mở, tức là u là hàm nửa liên tục trên.

2.3 Hàm điều hòa dưới: Cho U là một tập con mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u: U \to [-\infty, \infty)$ được gọi là hàm điều hòa dưới nếu u là hàm nửa liên tục trên và thoả mãn với mọi $\bar{\Delta}(\omega, r) = \{z \in U: |z - \omega| \le r\} \subset U$, ta có

$$u(\omega) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt. \quad (1)$$

Bất đẳng thức (1) được gọi là bất đẳng thức trung bình dưới. Hàm $v: X \to (-\infty, \infty]$ được gọi là hàm điều hòa trên nếu hàm $-v$ là hàm điều hòa dưới.

2.4 Nhận xét: Nếu $\{u_i: i \in I\}$ là họ các hàm điều hòa dưới thì hàm $u = \sup\{u_i: i \in I\}$ cũng là hàm điều hòa dưới nếu u là hàm nửa liên tục trên. Thật vậy, theo giả thiết thì u là hàm nửa liên tục trên nên để chứng minh u là hàm điều hòa dưới, ta sẽ chỉ ra u thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới. Lấy $\bar{\Delta}(\omega, r) \subset U$, với mọi $i \in I$ ta có

$$u_i(\omega) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_i(\omega + re^{it})dt$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt.$$

Từ đó suy ra

$$u(\omega) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt.$$

Vậy u là hàm điều hòa dưới.

2.5 Cho U là một tập mở trong $\mathbb{C}$. Với mỗi $r > 0$ ta đặt

$$U_r = \{z \in U: dist(z, \partial U) > r\},$$

ở đây $dist(z, \partial U)$ là khoảng cách từ điểm z tới tập ∂U.

2.6 Chính quy hoá: Cho X là một không gian metric và Y là tập con khác rỗng của X. Cho $u: Y \to [-\infty, +\infty)$ là hàm bị chặn trên địa phương. Ta định nghĩa chính quy hoá u^* của u là hàm xác định như sau:

$$u^*(x) = \limsup_{y\in Y, y\to x} u(y), (x \in \bar{Y}).$$

Từ định nghĩa ta có thể suy ra $u^* \ge u$ trên Y, nếu $v: Y \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên và $u \le v$ thì $u^* \le v$, đặc biệt nếu u là hàm nửa liên tục trên thì $u^* = u$.

2.7 Hàm test: Ta gọi hàm test là hàm $\chi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ thoả mãn: $\chi \in C^\infty$, $\chi \ge 0$, $\chi(z) = \chi(|z|)$, $supp\chi \subset \Delta(0,1)$, $\int_{\mathbb{C}} \chi dA = \int_{\Delta(0,1)} \chi dA = 1$. Ở đây $\Delta(0,1)$ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ và dA là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{C}$. Khi đó, với mỗi $r > 0$ ta đặt:

$$\chi_r(z) = \frac{1}{r^2}\chi\left(\frac{z}{r}\right) \ (z \in \mathbb{C}).$$

Hàm χ_r có các tính chất: $\chi_r \in C^\infty, \chi_r \ge 0, \chi_r(z) = \chi_r(|z|), supp\chi_r \subset \Delta(0, r), \int_{\mathbb{C}} \chi_r dA = \int_{\Delta(0,r)} \chi dA = 1$.

2.8 Tích chập: Cho hàm $u: U \subset \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty)$ là hàm khả tích địa phương và $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục có giá compact $supp\varphi \subset \Delta(0, r)$. Khi đó, tích chập của u và φ là hàm $u * \varphi: U_r \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$u * \varphi(z) = \int_{\mathbb{C}} u(z - w)\varphi(w)dA(w) \ (w \in U_r).$$

Từ định nghĩa ta có một số tính chất sau đây của tích chập bằng cách đổi biến, ta có công thức sau đây của tích chập:

$$u * \varphi(z) = \int_{\mathbb{C}} u(w)\varphi(z - w)dA(w).$$

2.9 Nhận xét: Từ công thức này, kết hợp với tính chất đạo hàm của tích phân phụ thuộc tham số ta suy ra nếu $\varphi \in C^k$ thì $u * \varphi \in C^k$ với mọi $1 \le k \le +\infty$. Đặc biệt, ta có $u * \chi_r \in C^\infty(U_r)$.

2.10 Mệnh đề: Cho hàm $u: U \subset \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty)$ là hàm khả tích địa phương. Khi đó, với mọi $r, s > 0$ ta có

$$(u * \chi_r) * \chi_s = (u * \chi_s) * \chi_r \ trên \ U_{r+s}.$$

Chứng minh:

Lấy $z \in U_{r+s}$, áp dụng Định lý Fubini ta có:

$$[(u * \chi_r) * \chi_s](z) = \int_{\mathbb{C}} (u * \chi_r)(z - w)\chi_s(w)dA(w)$$
$$= \int_{\mathbb{C}} \left[\int_{\mathbb{C}} u(z - w - t)\chi_r(t)dA(t)\right]\chi_s(w)dA(w)$$
$$= \int_{\mathbb{C}} \left[\int_{\mathbb{C}} u(z - w - t)\chi_s(w)dA(w)\right]\chi_r(t)dA(t)$$
$$= \int_{\mathbb{C}} (u * \chi_s)(z - t)\chi_r(t)dA(t)$$
$$= [(u * \chi_s) * \chi_r](z).$$

Vậy $(u * \chi_r) * \chi_s = (u * \chi_s) * \chi_r$ trên U_{r+s}.

2.11 Định lý: Nếu u là hàm điều hòa dưới trên U thì $u * \chi_r$ là hàm các hàm điều hòa dưới trơn trên U_r và $u * \chi_r \downarrow u$ khi $r \downarrow 0$.

Chứng minh: Xem Định lý 1.1.24 trong [1].

3. Kết quả chính

Kết quả chính đầu tiên là ta sử dụng tích chập để xây dựng hàm điều hòa dưới trơn từ một hàm đo được, bị chặn trên và chặn dưới địa phương và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới.

Định lý 3.1 Cho U là tập mở trong $\mathbb{C}$. Cho hàm $u: U \to [-\infty, \infty)$ là hàm đo được Borel, bị chặn trên và bị chặn dưới địa phương và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương. Chứng minh rằng:

a) Hàm $u * \chi_r$ là hàm điều hòa dưới trơn trên U_r với mỗi $r > 0$.

b) Chứng minh rằng: $\lim_{r\to 0} u * \chi_r = u^*$ trên U.

Chứng minh:

a) Theo nhận xét 2.9, $u * \chi_r \in C^\infty(U_r)$. Để chứng minh $u * \chi_r$ là hàm điều hòa dưới ta sẽ chứng minh nó thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương. Thật vậy, lấy $z_0 \in U_r$ tuỳ ý. Khi đó, tồn tại $r' > 0$ sao cho $\Delta(z_0, r') \subset U_r$. Với mỗi $0 < r < r'$, áp dụng Định lý Fubini và giả thiết hàm u thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}&(u*\chi_r)(z_0+re^{it})dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\mathbb{C}}u(z_0+re^{it}-w)\chi_r(w)\,dA(w)\right]dt\\
&=\int_{\mathbb{C}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{it}-w)dt\right]\chi_r(w)dA(w)\\
&\geq\int_{\mathbb{C}}u(z_0-w)\chi_r(w)dA(w)\\
&=(u*\chi_r)(z_0)
\end{aligned}$$

b) Lấy $z_0 \in U$. Tồn tại $r_0 > 0$ sao cho $z_0 \in U_{r_0}$. Do U_{r_0} là tập mở nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\bar{\Delta}(z_0,\delta) \subset U_{r_0}$. Do u là hàm bị chặn dưới địa phương nên ta có thể chọn δ đủ nhỏ sao cho u bị chặn dưới trên $\bar{\Delta}(z_0,\delta)$. Khi đó, nếu cần có thể cộng vào hàm u một hằng số, ta có thể giả sử $u > 0$ trên $\bar{\Delta}(z_0,\delta)$. Khi đó, với $r < r_0$ ta có $U_r \supset U_{r_0} \supset \bar{\Delta}(z_0,\delta)$. Vậy với $r < \delta$ ta có:

$$\begin{aligned}
(u*\chi_r)(z_0)&=\int_{\mathbb{C}}u(z_0-w)\chi_r(w)dA(w)\\
&=\int_{\bar{\Delta}(0,r)}u(z_0-w)\chi_r(w)dA(w)\\
&\leq sup_{w\in\bar{\Delta}(0,r)}u(z_0-w)=sup_{\bar{\Delta}(z_0,r)}u
\end{aligned}$$

Cho $r \downarrow 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to0}(u*\chi_r)(z_0)&\leq\lim_{r\to0}sup_{\bar{\Delta}(z_0,r)}u\\
&=\limsup_{z\to z_0}u(z)=u^*(z_0) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Mặt khác, do $supp\chi_r \subset \bar{\Delta}(0,r)$ nên ta có

$$\begin{aligned}
(u*\chi_r)(z_0)&=\int_{\mathbb{C}}u(z_0-w)\chi_r(w)dA(w)\\
&=\int_{\bar{\Delta}(0,r)}u(z_0-w)\chi_r(w)dA(w)
\end{aligned}$$

Với $w \in \bar{\Delta}(0,r)$ đổi biến qua tọa độ cực ta có $w = se^{it}$, $0 \leq s \leq r$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Lúc này $dA(w) = sdsdt$. Ta có:

$$(u*\chi_r)(z_0)=\int_0^r\int_0^{2\pi}u(z_0-se^{it})\chi_r(se^{it})sdsdt.$$

Bởi tính chất $\chi_r(z) = \chi_r(|z|)$ ta suy ra

$$\begin{aligned}
(u*\chi_r)(z_0)&=\int_0^r\int_0^{2\pi}u(z_0-se^{it})\chi_r(s)sdsdt\\
&=\int_0^r\left[\int_0^{2\pi}u(z_0-se^{it})dt\right]\chi_r(s)sds
\end{aligned}$$

Do u thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới và áp dụng lại tính chất của hàm χ_r ta có:

$$\begin{aligned}
(u*\chi_r)(z_0)&\geq\int_0^r 2\pi u(z_0)\chi_r(s)sds\\
&=u(z_0)\int_0^r\int_0^{2\pi}\chi_r(s)sdsdt\\
&=u(z_0)\int_0^r\int_0^{2\pi}\chi_r(se^{it})sdsdt
\end{aligned}$$

Hay

$$(u*\chi_r)(z_0)\geq\ u(z_0)\int_{\bar{\Delta}(0,r)}\chi_r(w)dA(w)=u(z_0)$$

Vậy ta có $(u*\chi_r)(z_0) \geq u(z_0)$. Do z_0 là bất kỳ trong U nên suy ra $u*\chi_r \geq u$ trên U. Do $u*\chi_r$ là hàm liên tục nên ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to0}(u*\chi_r)(z_0)&=\lim_{r\to0}\left[limsup_{z\to z_0}(u*\chi_r)(z)\right]\\
&\geq limsup_{z\to z_0}u(z)=u^*(z_0) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta suy ra

$$\lim_{r\to0}(u*\chi_r)(z_0)=u^*(z_0).$$

Do z_0 là bất kỳ trong U nên suy ra

$$\lim_{r\to0}(u*\chi_r)=u^*.$$

Vậy định lý được chứng minh.

Trong kết quả sau đây, ta sử dụng Định lý 3.1 để chứng minh tính chất quan hệ giữa tích chập và tính chính quy hoá. Kết quả này tốt hơn kết quả trong Định lý 2.11 ở trên.

Định lý 3.2 Cho U là tập mở trong $\mathbb{C}$. Cho hàm $u: U \to [-\infty,\infty)$ là hàm đo được Borel, bị chặn trên và bị chặn dưới địa phương và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương. Chứng minh rằng, $u*\chi_r$ là giảm theo r và $u*\chi_r = u^**\chi_r$ trên U.

Chứng minh:

Trước hết, ta chứng minh $u*\chi_r$ là giảm theo r. Lấy $r > r'$. Theo Định lý 3.1, với mọi $s > 0$ thì $u*\chi_s$ là hàm điều hòa dưới trên U_s. Do đó, theo Định lý 2.11 ta có $(u*\chi_s)*\chi_r$ là giảm theo r, tức là ta có:

$$(u*\chi_s)*\chi_r\geq(u*\chi_s)*\chi_{r'}.$$

Theo Mệnh đề 2.10 ta có:

$$(u*\chi_s)*\chi_r=(u*\chi_r)*\chi_s$$
$$(u*\chi_s)*\chi_{r'}=(u*\chi_{r'})*\chi_s.$$

Vậy ta có:

$$(u*\chi_r)*\chi_s\geq(u*\chi_{r'})*\chi_s.$$

Từ bất đẳng thức trên, cho $s \downarrow 0$, theo Định lý 2.11 ta có

$$u*\chi_r\geq u*\chi_{r'}.$$

Bây giờ ta chứng minh $u*\chi_r = u^**\chi_r$. Theo Định lý 2.11 ta có

$$\lim_{s\to0}(u*\chi_r)*\chi_s=\ u*\chi_r. \qquad (4)$$

Theo Mệnh đề 2.10 và Định lý 3.1 ta có:

$$\lim_{s\to0}(u*\chi_r)*\chi_s=\lim_{s\to0}(u*\chi_s)*\chi_r=u^**\chi_r \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra $u*\chi_r = u^**\chi_r$.

Vậy định lý được chứng minh.

Hệ quả 3.3 Cho U là tập mở trong $\mathbb{C}$. Cho hàm $u: U \to [-\infty,\infty)$ là hàm đo được Borel, bị chặn trên và bị chặn dưới địa phương và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương. Chứng minh rằng, chính quy hoá u^* là hàm điều hòa dưới trên U và $u = u^*$ hầu khắp nơi trên U.

Chứng minh:

Theo Định lý 3.1 ta có $u*\chi_r$ là hàm điều hòa dưới, giảm theo r và thoả mãn

$$u^*=\lim_{r\to0}u*\chi_r=inf_{r>0}(u*\chi_r).$$

Từ đẳng thức này và theo Nhận xét 2.4 ta suy ra u^* là hàm điều hòa dưới trên U.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $u = u^*$ hầu khắp nơi trên U. Theo Định lý 3.2, với mọi $r > 0$ ta có:

$$u * \chi_r = u^* * \chi_r$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{C}} [u^*(z_0 - w) - u(z_0 - w)]\chi_r(w)dA(w) = 0$$

Mà với mọi w, ta có

$$[u^*(z_0 - w) - u(z_0 - w)]\chi_r(w) \geq 0.$$

Từ đó suy ra tập hợp sau

$$A = \{w: [u^*(z_0 - w) - u(z_0 - w)]\chi_r(w) > 0\}$$

có độ đo Lebesgue bằng 0. Ta có

$$A = \{w: u^*(z_0 - w) > u(z_0 - w)\} \cap supp\chi_r. \quad (6)$$

Mặt khác, ta có

$$\cup_{r>0} supp\chi_r = \mathbb{C}. \quad (7)$$

Từ (6) và (7) ta suy ra tập hợp sau

$$B = \{w: u^*(z_0 - w) > u(z_0 - w)\}$$

có độ đo Lebesgue bằng 0, tức là $u = u^*$ hầu khắp nơi trên U.

Vậy hệ quả được chứng minh.

Hệ quả 3.3 được rút ra từ Định lý 3.1 và Định lý 3.2 với các giả thiết là hàm u bị chặn dưới và chặn trên địa phương. Tính bị chặn trên địa phương là giả thiết cần thiết để định nghĩa chính quy hoá u^*. Kết quả sau đây sẽ chỉ ra rằng, Hệ quả 3.3 vẫn đúng nếu ta bỏ giả thiết bị chặn dưới địa phương của hàm u.

Định lý 3.4 Cho U là tập mở trong $\mathbb{C}$. Cho hàm $u: U \to [-\infty, \infty)$ là hàm đo được Borel, bị chặn trên địa phương và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương. Chứng minh rằng, chính quy hoá u^* là hàm điều hòa dưới trên U và $u = u^*$ hầu khắp nơi trên U.

Chứng minh:

Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $u_n = \max(u, -n)$. Khi đó, hàm u_n thoả mãn giả thiết của Định lý 3.1 và Định lý 3.2. Theo Hệ quả 3.3, hàm u_n^* là hàm điều hòa dưới trên U và $u_n = u_n^*$ hầu khắp nơi trên U.

Mặt khác, ta có dãy (u_n) là dãy giảm và hội tụ tới u. Từ đó suy ra dãy (u_n^*) cũng là dãy giảm và hội tụ tới u^* trên U vì:

$$u_n^*(z) = \limsup_{w \to z} u_n(w)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n^*(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\limsup_{w\to z} u_n(w)\right] = \limsup_{w\to z}\left[\lim_{n\to\infty} u_n(w)\right]$$

Hay

$$\lim_{n\to\infty} u_n^*(z) = \limsup_{w\to z} u(w) = u^*(z).$$

Bây giờ ta chứng minh $u = u^*$ hầu khắp nơi trên U. Trước hết ta có thể kiểm tra bao hàm thức sau đây:

$$\{z \in U: u^*(z) > u(z)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \in U: u_n^*(z) > u_n(z)\}.$$

Từ đó và áp dụng tính chất σ −cộng tính dưới của độ đo ta có:

$$\begin{aligned} &dA(\{z \in U: u^*(z) > u(z)\}) \\ &\leq dA\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \in U: u_n^*(z) > u_n(z)\}\right] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} dA[\{z \in U: u_n^*(z) > u_n(z)\}] = 0. \end{aligned}$$

Tức là, $u = u^*$ hầu khắp nơi trên U.

Vậy định lý được chứng minh.

4. Kết luận

Nghiên cứu đã: (1) sử dụng tích chập để xây dựng hàm điều hòa dưới trơn từ một hàm đo được, bị chặn trên và chặn dưới địa phương và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới; (2) chứng minh được tính chất quan hệ giữa tích chập và tính chính quy hoá; và (3) chỉ ra Hệ quả 3.3 vẫn đúng nếu ta bỏ giả thiết bị chặn dưới địa phương của hàm u.

Kết quả nghiên cứu của bài báo được mở rộng từ một kết quả quan trọng trong [1]. Nghiên cứu được thiết lập trên lớp hàm rộng hơn nhưng công cụ và kỹ thuật thì tương tự.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. H. Hiep, *Singularities of plurisubharmonic functions*, Pub. Hou. Sci. and Tec. 2016.

[2] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[3] Le Q. Nam, *Analysis of Monge – Ampère Equations*, American Mathematical Society, 2024.

[4] D. H. Armitage and S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer – Verlag London Limitted, 2001.