CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA 0-LƯỢC ĐỒ CỦA TẬP SÁU ĐIỂM HẦU ĐỒNG BỘI TRONG KHÔNG GIAN XẠ ẢNH P^3

THE REGULARITY INDEX OF 0-SCHEME OF SIX ALMOST EQUIMULTIPLE POINTS IN PROJECTIVE SPACE P^3

Trần Nam Sinh*

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, Việt Nam[1]

*Tác giả liên hệ / Corresponding author: tnsinh@ued.udn.vn

(Nhận bài / Received: 15/12/2024; Sửa bài / Revised: 11/3/2025; Chấp nhận đăng / Accepted: 14/3/2025)

DOI: 10.31130/ud-jst.2025.538

Tóm tắt - Ký hiệu P^n là không gian xạ ảnh có chiều bằng *n*, $S = k[x_0, x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức theo các biến $x_0, x_1, ..., x_n$ với hệ số được lấy trên trường đóng đại số *k*. A_i là các điểm trong P^n, a_i là các số nguyên dương. Gọi *J* là giao luỹ thừa các iđêan nguyên tố $\wp_i$ sinh bởi *n* dạng tuyến tính độc lập tuyến tính. Vành *R/J* là một vành phân bậc dương, các phần phân bậc là các *k*-không gian véc tơ. Ký hiệu $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$ là 0-lược đồ xác định bởi *J*. Chỉ số chính quy của *R/J* (hay *G*) ký hiệu là *reg(R/J)* hay *reg(G)* được định nghĩa qua chiều của các *k*-không gian véc tơ này. Tuy nhiên, việc tính *reg(G)* cho một tập điểm tuỳ ý là không dễ và có rất ít kết quả tính được nó. Kết quả của tác giả là tính *reg(G)* cho một tập sáu điểm hầu đồng bội ở vị trí bất kỳ trong P^3.

Từ khóa - Tập điểm béo; hầu đồng bội; chỉ số chính quy; vành toạ độ; 0-lược đồ

Abstract - The denote by P^n the projective space with its dimension is *n*, $S = k[x_0, x_1, ..., x_n]$ is polynomial ring in variables $x_0, x_1, ..., x_n$ over the algebraic closed field. If A_i in P^n and a_i in positive integer number. Let *J* be the power intersection of prime ideals generated by n linearly independent linear forms. The *R/J* ring is a positive-degree ring, the degree parts of which are *k*-vector spaces. The denote by $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$ is 0-scheme defined by *J*. The regularity index of *R/J* (or *G*), denote by *reg(R/J)* (or *reg(G)*) is defined by the dimension of these *k*-vector spaces. However, computing *reg(G)* for an arbitrary set of points is not easy and there are very few results that can compute it. The author's result is to compute *reg(G)* for a set of six nearly equimultiple points given at any position in P^3.

Key words - fat points; almost equimultiple; the regularity index; coordinate ring; 0-scheme

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, tác giả ký hiệu $P^n := P^n_k$ là một không gian xạ ảnh với số chiều bằng *n*, $S = k[x_0, x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức theo biến $x_0, x_1, ..., x_n$ bậc chuẩn hệ số được lấy trên trường đóng đại số *k*. Giả sử $A_1, ..., A_t$ là các điểm phân biệt trong P^n. Với *j =1,…,t*, ký hiệu $\wp_i$ là iđêan nguyên tố thuần nhất xác định bởi A_i. Với các số nguyên dương $a_1, ..., a_t$ iđêan $J = \wp_1^{a_1} \cap \cdots \cap \wp_t^{a_t}$ là giao luỹ thừa các iđêan nguyên tố $\wp_i$ sinh bởi *n* dạng tuyến tính độc lập tuyến tính, ký hiệu *G* là 0-lược đồ xác định bởi *J* và gọi

$$G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$$

là tập điểm béo trong P^n.

Vành toạ độ thuần nhất *R/J* của *G* là phân bậc dương $R/J = \oplus_{s\geq 0}(R/J)_s$ có số bội $e(R/J) := \sum_{i=1}^{t}\binom{a_i+n-1}{n}$. Mỗi phân bậc $(R/J)_s$ là một *k*-không gian véc tơ hữu hạn chiều. Hàm số

$$h_G(s) = \dim_k(R/J)_s$$

được gọi là hàm Hilbert của *G*.

Chỉ số chính quy của tập điểm béo *G* được xác định là số nguyên dương *s* bé nhất sao cho $h_Z(s) = e(R/J,)$, ký hiệu *reg(G)*.

Việc đưa ra chặn trên khá nhỏ là không khó, nhưng đưa ra chặn trên chặt là khó, chính vì vậy để tính được *reg(G)* là bài toán khó. Ta có thể tìm thấy những kết quả về chặn trên của *reg(G)* trong [1-6].

Năm 1996 sau khi quan sát một số kết quả trước đó N.V. Trung (xem [6]) đã đưa ra giả thuyết sau:

Cho tập điểm béo $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$ trong P^n, đặt

$$D_k = max\{[\frac{\sum_{i_l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid, A_{i_1}, ..., A_{i_q} \text{ có giá nằm trên một } k\text{- phẳng}\},$$

D=max$\{D_k \mid k=1,…,n\}$.

Khi đó *reg(G)* $\leq D$.

Trong không gian xạ ảnh P^n, tập điểm $A=\{A_1,…,A_t\}$ được gọi là không suy biến nếu *A* không nằm trên một *(n-1)*-phẳng. Tập điểm béo $G=a_1P_1+\cdots+a_tA_t$ được gọi là không suy biến nếu *A* không suy biến.

Năm 2016, E. Ballico, O. Dumitrescu và Postinghel (xem [1]) đã chứng minh được giả thuyết của Trung cho cho tập $G = a_1A_1+\cdots+ a_{n+3}A_{n+3}$ không suy biến trong P^n.

Giả thuyết nói trên đã được Nagel và Trok (xem [5]) đã chứng minh hoàn toàn trong năm 2018, tuy nhiên việc đưa ra công thức tính *reg(G)* vẫn là bài toán mở. Cho đến nay có rất ít kết quả được đăng trên các tạp chí có uy tín.

[1] The University of Danang - University of Science and Education, Viet Nam (Tran Nam Sinh)

Với $A_1,\dots,A_t$ có giá nằm trên một đường thẳng. Năm 1984, Davis và Geramita (xem [3, Corollary 2.3]) đã tính được chỉ số chính quy của $G = a_1A_1 + \cdots + a_tA_t$:

$$reg(G) = a_1 + \cdots + a_t - 1.$$

Một đường cong hữu tỷ chuẩn trong P^n là đường cong có phương trình tham số

$$x_0 = s^n, x_1 = s^{n-1}v, \dots, x_{n-1} = sv^{n-1}, x_n = v^n.$$

Cho một tập điểm béo $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$ trong P^n, với $a_t \le a_{t-1} \le \cdots \le a_1$. Năm 1993, Catalisano, Trung và Valla đã tính được *reg(G)* (xem [2]) cho tập điểm $A_1,\dots, A_t$ nằm trên đường cong hữu tỷ chuẩn trong P^n (xem [2, Proposition 7]), thì

$$reg(G) = \max\left\{a_1 + a_2 - 1, \left[(\sum_{i=1}^{t} a_i + n - 2)/\mathrm{n}\right]\right\}.$$

Với tập $t+2$ điểm béo không nằm trên *(t-1)*-phẳng trong P^n($t \le n$), năm 2012, Thiện (xem [7, Theorem 3.4]) đã đưa ra công thức tính *reg(G):*

reg(G)=D.

Mở rộng kết quả này cho tập $t+3$ điểm béo đồng bội không nằm trên *(t-1)*-phẳng trong P^n, năm 2017, P.V. Thiện và T.N. Sinh (xem [8, Theorem 4.6]) đã đưa ra công thức *reg(G)*:

reg(G)=D

Trong trường hợp $a_j = a$ hoặc $a_j = a-1$ thì $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$ được gọi là hầu đồng bội, với mọi $i = 1,\dots t$.

Nôi dung của bài báo này, tác giả đưa ra công thức tính chỉ số chính quy của tập điểm hầu đồng bội $G=3P_1+3P_2+3P_3+4P_4+4P_5+4P_6$. Kết quả này được nêu trong Định lý 3.5 ở Mục 3 trong bài báo này.

2. Các bổ đề cần dùng

Để chuẩn bị cho phần chứng minh nội dung chính ở phần 3, tác giả cần sử dụng các bổ đề sau.

Hai bổ đề đầu tiên chỉ ra công thức tính chỉ số chính quy của tập $n+2$ và $n+3$ điểm trong P^3.

Bổ đề 2.1. *([7, Định lý 3.4]). Giả sử $A_1,\dots,A_{s+2}$ là các điểm phân biệt không nằm trên (t-1)-phẳng trong P^n, $t \le n$, cho các số nguyên dương $a_1,\dots,a_t$. Đặt $J = \wp_1^{a_1} \cap \cdots \cap \wp_{t+2}^{a_{t+2}}$. Khi đó, reg(R/J)=*max*{D_k|k=1,…,n}, với*

$$D_j = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid \ A_{i_1},\dots,A_{i_q} \ \text{có giá nằm}$$

trên một k-phẳng}, k=1,…,n.

Bổ đề 2.2. *([8, Định lý 3.1]). Giả sử $A_1,\dots, A_{t+3}$ là các điểm phân biệt ở vị trí tổng quát trên t-phẳng, không nằm trên (t-1)-phẳng trong P^n, $t \le n$, và a_i là các số nguyên dương. Cho tập điểm béo*

$G = a_1P_1+\cdots+ a_{t+3}A_{t+3}.$

*Khi đó, reg(G) =*max*{D_j | j= 1,2,…,n}, với*

$$D_j = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid \ A_{i_1},\dots,A_{i_q} \ \text{có giá nằm}$$

trên một k-phẳng}, k=1,…,n.

Để đánh giá chặn trên cho chỉ số chính quy cho trường hợp $n+3$ điểm béo trong P^n ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 2.3. *([1, Định lý 2.1]). Giả sử $G = a_1A_1+\cdots+ a_{n+3}A_{n+3}$ là một tập n+3 điểm béo không suy biến trong P^n. Khi đó,* reg(G) ≤ max{D_j |j=1,…,n}*, với*

$$D_j = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid \ A_{i_1},\dots,A_{i_q} \ \text{có giá nằm}$$

trên một k-phẳng}, k=1,…,n.

Cho tập các chỉ số *{1,…,t}* và *{$i_1,\dots,i_s$}* ⊆ *{1,…,t}* là tập chỉ số con của *{1,…,t}*. Ta gọi $H = a_{i_1}A_{i_1} + \cdots + a_{i_r}A_{i_r}$ là *tập điểm béo con* của tập $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$.

Bổ đề sau cho ta thấy được chỉ số chính quy của 0-lược đồ con luôn bị chặn trên.

Bổ đề 2.4. *([7, Bổ đề 3.3]). Giả sử A={$A_1,\dots, A_t$ } là tập các điểm phân biệt trong P^n và $a_1,\dots,a_t$ là các số nguyên dương. Đặt $J = \wp_1^{a_1} \cap \cdots \cap \wp_t^{a_s}$. Nếu $B = \{A_{i_1},\dots,A_{i_r}\}$ là một tập con của A và $p = \wp_{i_1}^{m_{i_1}} \cap \cdots \cap \wp_{i_r}^{m_{i_r}}$ khi đó*

reg(R/p) ≤ reg(R/J).

Từ đây suy ra, nếu $G = a_1A_1+\cdots+a_tA_s$ và $H = a_{i_1}A_{i_1} + \cdots + a_{i_r}A_{i_r}$ là các tập điểm béo xác định bởi iđêan J, thì ta có

reg(H) ≤ reg(G).

Bổ đề sau giúp ta tính được chỉ số chính quy của tập điểm nằm trên đường thẳng.

Bổ đề 2.5. *([3, Hệ quả 2.3]). Giả sử $G=a_1A_1+\cdots+a_tA_t$ là một tập điểm béo tùy ý trong P^n. Khi đó*

reg(G) = $a_1+\cdots+a_t$ -1

nếu và chỉ nếu các điểm $A_1,\dots,A_t$ nằm trên một đường thẳng.

3. Chỉ số chính quy của lược đồ $G=3A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 4A_5 + 4A_6$ trong P^3

Phần này tác giả trình bày các kết quả chính của nghiên cứu. Tác giả bắt đầu từ bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. *Cho tập sáu điểm phân biệt không suy biến A={$A_1,\dots,A_6$ } trong P^3 sao cho không có năm điểm nào của chúng nằm trên 2-phẳng. Với các số nguyên dương $a_1,\dots,a_6$, xét tập điểm béo*

$G=a_1A_1+\cdots+a_6A_6$..

Đặt $D_k = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid \ A_{i_1},\dots,A_{i_q}$ *có giá nằm trên một j-phẳng}, và*

D=max{D_k| k=1,2,3}.

Khi đó, nếu D=D_1 hoặc D=D_2 thì reg(G) = D.

Chứng minh.

• Nếu $D=D_1$: Khi đó có một đường thẳng gọi là *d* đi qua các điểm $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ sao cho $D_1 = a_{i_1} + \cdots + a_{i_r} - 1$. Xét tập điểm béo $H = a_{i_1}A_{i_1} + \cdots + a_{i_r}A_{i_r}$, theo Bổ đề 2.4 và Bổ đề 2.5, ta có

D = reg(H) ≤ reg(G).

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.3, ta có $reg\ (G) \le D$. Do đó, $reg(G) = D$.

• Nếu $D = D_2$: Gọi α là 2-phẳng đi qua các điểm $A_{i_1},..., A_{i_s}$ sao cho $D_2 = \left[\frac{a_{i_1} + \cdots + a_{i_s}}{2}\right]$, theo giả thiết, không có 5 điểm của A nằm trên 2-phẳng, nên $s \le 4$. Xét tập điểm béo $U = a_{i_1} A_{i_1} + \cdots + a_{i_s} A_{i_s}$, theo Bổ đề 2.1 ta có:

$$reg(U) = D_2 = D.$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.4, ta có $reg(U) \le reg(G) \le D$.

Từ đó ta nhận được $reg(G) = D$.

Bổ đề 3.1 đã được chứng minh.

Bổ đề 3.2. *Trong không gian xạ ảnh P^n, cho tập $n + 3$ điểm không suy biến $A = \{A_1,..., A_{n+3}\}$. Với $a_1,...,a_{n+3}$ là số nguyên dương, xét tập điểm béo*

$$G = a_1A_1 + \cdots + a_{n+3}A_{n+3}$$

Đặt

$$D_k = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid A_{i_1},..., A_{i_q} \text{ có giá nằm trên một k-phẳng}\}, \text{ và } D = \max\{D_k \mid k = 1,2,..,n\}.$$

Khi đó, nếu $D = D_1$ thì $reg(G) = D$.

Chứng minh. Giả sử $A_{i_1},..., A_{i_r}$ là r điểm nằm trên đường thẳng sao cho

$$D = D_1 = a_{i_1} + \cdots + a_{i_r} - 1.$$

Khi đó, xét lược đồ $U = a_{i_1} A_{i_1} + \cdots + a_{i_r} A_{i_r}$.

Theo Bổ đề 2.5 ta có $reg(U) = D_1 = D$.

Mặt khác, $B = \{A_{i_1},..., A_{i_r}\}$ là một tập con của A nên U là một lược đồ con của G. Theo Bổ đề 2.4 và Bổ đề 2.3 ta có

$$D = reg(U) \le reg(G) \le D.$$

Vậy $reg(G) = D$.

Bổ đề 3.2 đã chứng minh xong.

Bổ đề 3.3. *Trong không gian P^3, cho tập 6 điểm phân biệt không suy biến $A = \{A_1,...,A_6\}$ sao cho không có năm điểm nào của A nằm trên 2-phẳng. Xét lược đồ sau*

$$G = 3A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 4A_5 + 4A_6.$$

Đặt

$$D_k = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid A_{i_1},..., A_{i_q} \text{ có giá nằm trên một k-phẳng}\}, \text{ với } a_{i_l} = 3 \text{ hoặc } a_{i_l} = 4.$$

$$D = \max\{D_k \mid k = 1,2,3\}.$$

Khi đó $reg(G) = D$.

Chứng minh:

Từ giả thiết không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng nên không có 4 điểm nào A nằm trên một đường thẳng.

• Nếu A có ba điểm nằm trên một đường thẳng thì

$$8 \le D_1 \le 11;\ 6 \le D_2 \le 7;\ D_3 = 8.$$

Suy ra, $D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1$.

• Nếu A không có ba điểm nằm trên một đường thẳng thì

$$D_1 = 7;\ 6 \le D_2 \le 7;\ D_3 = 7.$$

Suy ra, $D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1$.

Do đó, ta có $D = D_1$.

Theo Bổ đề 3.2 ta có $reg(G) = D$.

Ta đã chứng minh xong Bổ đề 3.3 □

Mệnh đề 3.4. *Trong không gian xạ ảnh P^3, cho tập sáu điểm phân biệt, không suy biến, không ở vị trí tổng quát $A = \{A_1,...,A_6\}$. Xét lược đồ sau*

$$G = 3A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 4A_5 + 4_6.$$

Đặt

$$D_k = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid A_{i_1},..., A_{i_q} \text{ có giá nằm trên một k-phẳng}\}, \text{ với } a_{i_l} = 3 \text{ hoặc } a_{i_l} = 4.$$

$$D = \max\{D_k \mid k = 1,2,3\}.$$

Khi đó $reg(G) = D$.

Chứng minh:

Trong trường hợp A không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng α thì theo Bổ đề 3.3, ta có

$$reg(G) = D.$$

Ngược lại ta xét các khả năng sau:

Nếu A có 4 điểm nằm trên một đường thẳng d. Khi đó,

$$12 \le D_1 \le 14;\ 8 \le D_2 \le 9 \text{ và } D_3 = 7.$$

Do đó

$$D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1.$$

Theo Bổ đề 3.2 ta có $reg(G) = D$.

Nếu A có ba điểm nằm trên một đường thẳng l. Khi đó mọi 2-phẳng đi qua 5 điểm của A luôn chưa d. Ta xét các khả năng sau.

• Nếu l đi qua A_1, A_2, A_3. Khi đó

$$D_1 = 8;\ D_2 = \left[\frac{3.3 + 2.4 + 2 - 2}{2}\right] = 8; D_3 = 7.$$

Suy ra $D = max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1$.

• Nếu l đi qua hai điểm trong ba điểm $\{A_1, A_2, A_3\}$. Khi đó

$$TD_1 = 9;\ 8 \le D_2 \le 9;\ D_3 = 7.$$

Suy ra $D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1$.

• Nếu d đi qua hai điểm trong ba điểm $\{A_1, A_2, A_3\}$. thì

$$D_1 = 10;\ 8 \le D_2 \le 9;\ D_3 = 7.$$

Suy ra $D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1$.

• Nếu d không đi qua hai điểm trong ba điểm $\{A_1, A_2, A_3\}$ thì

$$D_1 = 11;\ D_2 = 9;\ D_3 = 7.$$

Suy ra $D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_1$.

Do đó $D = D_1$.

Theo Bổ đề 3.2 ta có

$$reg(G) = D.$$

Nếu A không có ba điểm nào nằm trên một đường thẳng. Khi đó

$D_1 = 7$; $7 \leq D_2 \leq 9$; $D_3 = 7$.

Suy ra $D = \max\{D_1, D_2, D_3\} = D_2$.

Gọi $V = \{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}, A_{i_5}\}$ là năm điểm nằm trên 2-phẳng α. Xét lược đồ con

$$H = a_{i_1}A_{i_1} + a_{i_2}A_{i_2} + a_{i_3}A_{i_3} + a_{i_4}A_{i_4} + a_{i_5}A_{i_5}.$$

Theo Bổ đề 2.2, ta có $reg(G) \leq reg(H) = D_2 = D$.

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.3 ta có $reg(G) \leq D$.

Do đó

$reg(G) = D$.

Mệnh đề 3.4 được chứng minh. ☐

Định lý 3.5. *Cho $A=\{A_1,\dots,A_6\}$ là tập 6 điểm phân biệt không suy biến, không trong P^3. Cho lược đồ sau*

$G=3A_1+3A_2+3A_3+4A_4+4A_5+4A_6$.

Đặt

$$D_k = max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} a_{i_l} + k - 2}{k}] \mid A_{i_1},\dots,A_{i_q} \text{ nằm trên một}$$

k-phẳng}, với $a_{i_l} = 3$ *hoặc* $a_{i_l} = 4$.

$D = \max\{D_k \mid k=1,2,3\}$.

Khi đó $reg(G) = D$.

Chứng minh.

Trường hợp A ở vị trí tổng quát trong P^3 thì theo Bổ đề 2.2 ta có

$reg(G) = D$.

Do đó ta xét các khả năng sau của A.

- A không có 5 điểm nằm trên 2-phẳng. Theo Bổ đề 3.2 ta có

$reg(G) = D$.

- A có 5 điểm nằm trên 2-phẳng. Theo Mệnh đề 3.4 ta có

$reg(G) = D$.

Ta đã chứng minh xong Định lý 3.5. ☐

4. Kết luận

Việc tính chỉ số chính quy của một 0-lược đồ là rất khó, có rất ít kết quả tính về nó. Với 0-lược đồ $G=3A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 4A_5 + 4A_6$ trong không gian xạ ảnh P^3. Tác giả đã chỉ ra công thức tính $reg(G)$. Việc tính chỉ số chính quy của một 0-lược đồ vẫn là bài toán mở.

REFERENCES

[1] E. Ballico, O. Dumitrescu, and E. Postighel, "On Segre's bound for fat points in P^n", *J. Pure and Appl. Algebra*, Vol. 220, no. 6, pp. 2307-2323, 2016. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.11.008

[2] M. V. Catalisano, N. V. Trung, and G. Valla, "A sharp bound for the regularity index of fat points in general position", *Proc. Amer. Math. Soc*, Vol. 118, no. 3, pp. 717-724, 1993. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1993-1146859-0.

[3] E. D. Davis and A.V. Geramita, "The Hilbert function of a special class of 1-dimensional Cohen – Macaulay graded algebras, The Curves Seminar at Queen's", *Queen's Paper in pure and Appl. Math*, Vol. 67, pp. 1-29, 1984.

[4] G. Fatabbi and A. Lorenzini, "On the sharp bound for the regularity index for any set of fat points", *J. Pure Apple. Algebra*, Vol. 161, no. 1-2, pp. 91-111, 2001. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(00)00083-9.

[5] U. Nagel and B. Trok, "Segre's regularity bound for fat points scheme", *Annali della Scuole Normale Superiore*, Vol. XX, no. 5, pp. 217-237, 2020.

[6] P. V. Thien, "Segre bound for the regularity index of fat points in P^3", *J. Pure and Appl. Algebra*, Vol. 151, no. 2, pp. 197–214, 2000. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00055-9.

[7] P. V. Thien, "Regularity index of s+2 fat points not on a linear (s-1)-space", *Comm. Algebra*, Vol. 40, pp. 10, pp. 3704–3715, 2012. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.593385.

[8] P. V. Thien and T. N. Sinh, "On the regularity index of fat points not on a linear (r-1)-space", $s \leq r+3$, *Comm. Algebra*, Vol. 45, no. 10, pp. 4123-4138, 2017. https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.06347.